Tiesitkö tämän?

MAFY-valmennuksen asiakkaat veivät

37 %

Helsingin suomenkielisen yleislääketieteellisen opiskelupaikoista vuonna 2017.

31 %

Aalto-yliopiston tuotantotalouden opiskelupaikoista vuonna 2017.

40% pk-seudun lukioista käyttää Mafynettiä

Mafynetti-kertauskurssit julkaistiin lukioiden käyttöön syksyllä 2017 ja nyt jo 40% pk-seudun lukioista on ottanut Mafynetin käyttöönsä! Paljon toivotut MAFY-valmennuksen oppimateriaalit lukion ensimmäiselle vuosikurssille julkaistaan lukuvuodelle 2018-2019.

Kysy lisää mafy.fi/yhteydenotto.

Fysiikka, kevät 2018

Mallivastaukset, 21.3.2018

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista pk-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen ja Joonas Suorsa. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
`www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot`
`info@mafyvalmennus.fi`

1. Tehtävänäsi on määrittää alla olevan taulukon suureet a–f. Mikä tai mitkä taulukon ensimmäisen rivin suureet täytyy tuntea, jotta kukin suure a–f voidaan määrittää? Merkitse vastauksesi rasteilla vastauspaperille kopioimaasi taulukkoon.

	aika	jännite	massa	matka	sähkövirta	tilavuus
a) nopeus						
b) liikemäärä						
c) aallonpituus						
d) tiheys						
e) resistanssi						
f) vaihtojännitteen taajuus						

Ratkaisu.

	aika	jännite	massa	matka	sähkövirta	tilavuus
a) nopeus	X			X		
b) liikemäärä	X		X	X		
c) aallonpituus				X		
d) tiheys			X			X
e) resistanssi		X			X	
f) vaihtojännitteen taajuus	X					

Pisteytys: 1p / oikea rivi 6p

Huomautus lukijalle: Tehtävässä ei otettu kantaa siihen, mitä ensimmäisen rivin suureet täsmälleen kuvaavat (mikä aika? minkä pisteiden välinen jännite?), joten tässä täytyy tulkita, että ne voivat kuvata mitä tahansa, kunhan kyseessä on oikea suure.

Selitykset vastauksille (ei vaadittu vastauksessa):

a) Nopeus on $v = \dfrac{s}{\Delta t}$, missä s on matka ja Δt on aika, joten sen määrittämiseksi tarvitsee tietää matka ja aika.

b) Liikemäärä on $p = mv$, missä m on massa, joten sen määrittämiseksi tarvitsee tietää massa sekä samat suureet kuin nopeuden määrittämiseksi, eli matka ja aika.

c) Aallonpituus on matka, joten sen määrittämiseksi tarvitsee tietää vain matka.

d) Tiheys on $\rho = \dfrac{m}{V}$, missä m on massa ja V on tilavuus, joten sen määrittämiseksi tarvitsee tietää massa ja tilavuus.

e) Vastuksen resistanssi on $R = \frac{U}{I}$, missä U on vastuksen jännitehäviö (eli jännite) ja I on vastuksen läpi kulkeva sähkövirta, joten sen määrittämiseksi tarvitsee tietää jännite ja sähkövirta.

f) Vaihtojännitteen taajuus on $f = \frac{1}{T}$, missä T on jaksonaika, joten sen määrittämiseksi tarvitsee tietää aika.

2. Kestävyysjuoksun 10 000 metrin maailmanennätys vuodelta 2005 on Etiopian Kenenisa Bekelen nimissä. Bekelen ennätysjuoksun väliajat on annettu taulukossa. Samassa taulukossa on esitetty myös Paavo Nurmen väliajat vuoden 1921 maailmanennätysjuoksusta.

Matka (m)	0	2 000	4 000	6 000	8 000	10 000
Bekelen aika (min:sek)	0:00	5:16	10:30	15:45	21:05	26:18
Nurmen aika (min:sek)	0:00	5:52	11:58	18:11	24:27	30:40

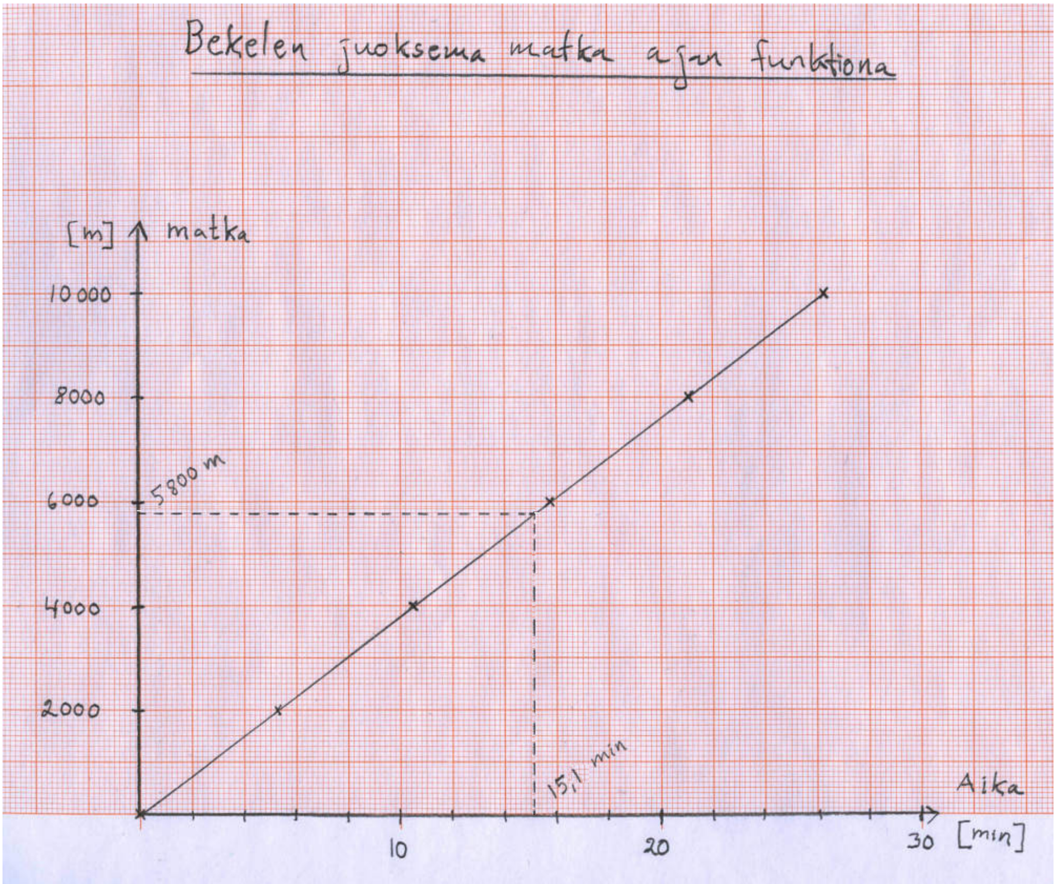
a) Piirrä Bekelen juoksema matka siihen käytetyn ajan funktiona. (3 p.)
b) Oliko Bekelen nopeus ennätysjuoksussa vakio? Perustele. (1 p.)
c) Jos Bekele ja Nurmi olisivat juosseet samassa kilpailussa, kuinka pitkälle Bekele olisi ehtinyt, kun Nurmi olisi saavuttanut matkan puolivälin? Anna vastaus 100 metrin tarkkuudella. (2 p.)

Ratkaisu.

a) Lasketaan kuvaajan piirtämistä varten Bekelen väliajat minuutteina.

$$\begin{aligned} 5\,\text{min}\,16\,\text{s} &= \left(5+\frac{16}{60}\right)\text{min} \approx 5{,}27\,\text{min} \\ 10\,\text{min}\,30\,\text{s} &= 10{,}50\,\text{min} \\ 15\,\text{min}\,45\,\text{s} &= 15{,}75\,\text{min} \\ 21\,\text{min}\,05\,\text{s} &\approx 21{,}08\,\text{min} \\ 26\,\text{min}\,18\,\text{s} &= 26{,}30\,\text{min} \end{aligned}$$

Piirretään kuvaaja:



3p

Pisteytyksestä:

Huom! Kuvaajaan on merkitty myös c-kohdan merkinnät.

b) Mittauspisteet osuvat hyvin suoralle, joten Bekelen kulkema matka kasvaa tasaisesti ajan funktiona. Näin ollen nopeus on hyvällä tarkkuudella pitkällä aikavälillä vakio.

1p

Lisähuomautus: Lyhyellä aikavälillä, kuten yhden askeleen aikana, nopeus ei tietenkään ole vakio, mutta kysymys täytyy tulkita siten, että siinä tarkoitetaan, muuttuuko Bekelen juoksunopeus pidemmällä aikavälillä vai ei.

c) Mittauksista nähdään, että Nurmen nopeus on likimain vakio. Näin ollen Nurmi on juoksun puolessa välissä noin ajanhetkellä, joka on puolessa välissä Nurmen 4000 metrin ja 6000 metrin aikoja, eli ajanhetkellä

$$t = \frac{\left(11 + \frac{58}{60}\right)\text{ min} + \left(18 + \frac{11}{60}\right)\text{ min}}{2} = 15{,}075\,\text{min} \approx 15{,}1\,\text{min}.$$ 1p

Bekelen kuvaajasta (a-kohdassa) saadaan luettua, että ajanhetkellä $t = 15{,}1\,\text{min}$ Bekele on juossut jo matkan 5800 m. 1p

3. Kattilassa on 1,2 litraa kasviskeittoa. Keitto jäähdytetään jäävesiseoksessa, jonka lämpötila pysyy vakiona jäähtymisen ajan. Keiton lämpötilan muutosta tarkkaillaan jäähtymisen aikana. Havaitaan, että keiton alkulämpötila on 65,0 °C, ja se jäähtyy 25 minuutissa 8,0 °C:n lämpötilaan. Keiton voidaan olettaa olevan kokonaan vettä.

   a) Kuinka suuri on keskimääräinen teho, jolla keitto jäähtyy lämpötilan tarkkailun aikana?
   b) Hahmottele kuvaaja keiton lämpötilasta ajan funktiona tarkkailun aikana. Selitä lyhyesti piirtämäsi kuvaajan muoto.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} V &= 1{,}2\,\mathrm{l} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ c &= 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot {}^\circ\mathrm{C}} \\ T_1 &= 65{,}0\,^\circ\mathrm{C} \\ T_2 &= 8{,}0\,^\circ\mathrm{C} \\ \Delta t &= 25 \cdot 60\,\mathrm{s} \\ \rho_v &= 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3. \end{aligned}$$

Huomautus lukijalle: Veden tiheyden voi määrittää taulukkoarvojen avulla tarkemminkin, mutta se ei ole tässä mallissa tarpeen, joten riittää käyttää epätarkempaa arvoa $1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$.

Keiton massa on

$$m = \rho V\,. \tag{1}$$

Keiton jäähtyessä vapautuvan lämpöenergian määrä on

$$Q = cm\Delta T = cm(T_1 - T_2). \tag{2}$$

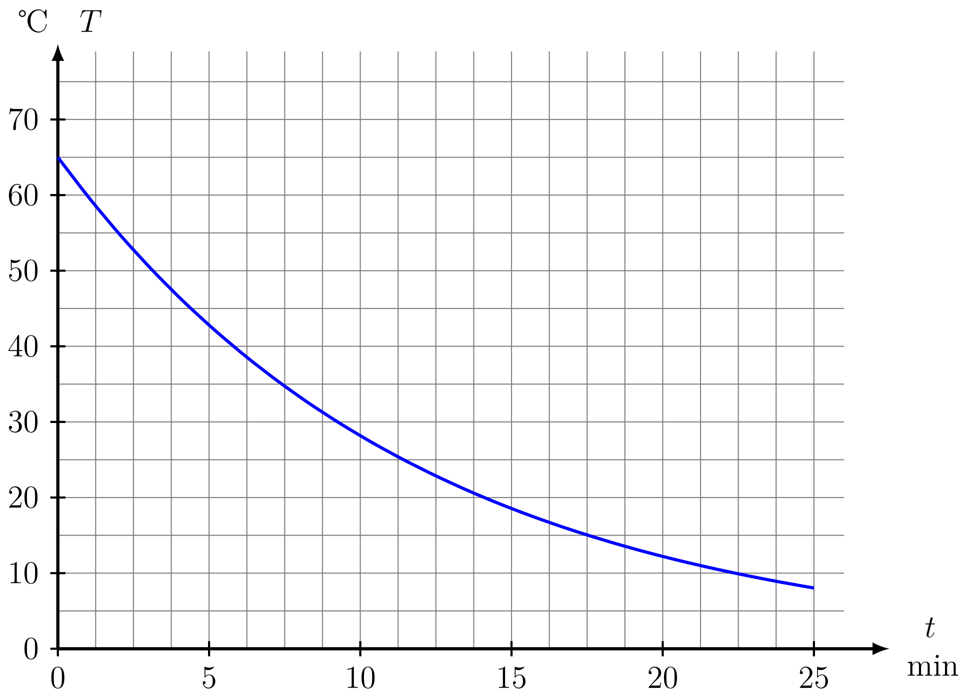
1p

Tällöin keskimääräinen teho, jolla keitto jäähtyy on

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q}{\Delta t} \quad \|\ \text{sij. (2)} \\ P &= \frac{cm(T_1 - T_2)}{\Delta t} \quad \|\ \text{sij. (1)} \\ P &= \frac{4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 1{,}0 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot (65{,}0\,^\circ\mathrm{C} - 8{,}0\,^\circ\mathrm{C})}{25 \cdot 60\,\mathrm{s}} \\ &= 191{,}064\,\mathrm{W} \approx 190\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Vastaus: Keitto jäähtyy keskimäärin teholla 190 W. 2p

b)



2p

Lämpöä siirtyy sitä suuremmalla teholla, mitä suurempi on keiton ja lämpötilassa 0 °C olevan jäävesiseoksen lämpötilaero. Tämän vuoksi käyrä on aluksi jyrkempi (suurempi lämpötilaero) ja loivenee ajan kuluessa kun lämpötilaero pienenee. 1p

4. Lääketieteellisissä tutkimuksissa kehon sisäosia kuvannetaan ultraääntä käyttämällä.

a) Mitä ovat ääni ja ultraääni? (2 p.)
b) Taulukossa on annettu ultraäänen nopeuksia eri kudoksissa. Kuinka suuri on ultraäänen aallonpituus rasvakudoksessa, kun sen taajuus on 11 MHz? (1 p.)
c) Selitä mihin aaltoliikkeen ominaisuuksiin perustuu ultraäänitutkimuksen käyttö elimien kuvantamisessa. (3 p.)

kudos / elin	äänen nopeus (m/s)
rasva	1 450
munuainen	1 570
lihas	1 590
luu	4 080

Ratkaisu.

a) Ääni on väliainetta pitkin etenevää mekaanista aaltoliikettä. 1p

Huomautus lukijalle: Joissain kirjoissa äänen määritelmään kuuluu, että ääni on kuultavissa, eli taajuudeltaan noin 20 Hz - 20 kHz. Toisissa ääneksi lasketaan myös muut taajuudet. Tämän takia on hyväksyttävää, muttei tarvittavaa kirjoittaa tätä vastaukseen.

Ultraääni on väliainetta pitkin etenevää mekaanista aaltoliikettä, jonka taajuus on yli 20 kHz, eli sellaista ääntä, mitä normaalikuuloinen ihminen ei kuule. 1p

b)

$$f = 11\,\text{MHz} = 11 \cdot 10^6\,\text{Hz}$$
$$v = 1450\,\text{m/s}.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä:

$$v = f\lambda \quad \| : f$$
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1450\,\text{m/s}}{11 \cdot 10^6\,\text{Hz}} = 131{,}8181\ldots \cdot 10^{-6}\,\text{m} \approx 130\,\mu\text{m}.$$

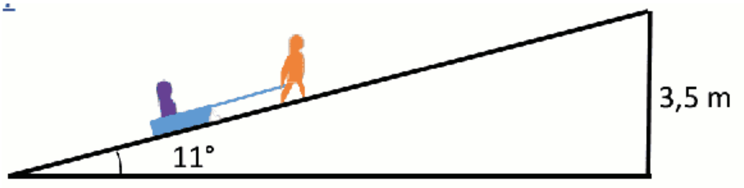
Vastaus: Ultraäänen aallonpituus rasvakudoksessa on 130 µm. 1p

c) Eri elimet ovat keskenään eri väliaineita ultraäänelle. Aaltoliike etenee eri nopeuksilla eri väliaineissa, 1p
ja aaltoliikkeen kohdatessa kahden eri väliaineen rajapinnan siitä heijastuu osa takaisin. 1p
Mitä suurempi ero rajapinnan eri puolien välisessä aalto-opillisessa tiheydessä on, sitä enemmän ultraääntä heijastuu rajapinnasta. 1p

Kun ultraääntä lähetetään kudoksiin ja eri rajapinnoilta tulevien heijastusten ajat ja intensiteetit mitataan, voidaan muodostaa kuva, jossa eri kudokset erottuvat toisistaan.

Pisteytyksestä c-kohdassa: Kustakin oleellisesta ominaisuudesta saa 1p. Oppikirjoissa on käsitelty hyvin pintapuolisesti ultraäänikuvantaminen, joten perinpohjaista selitystä siitä, miten ominaisuuksia hyödynnetään kuvantamisessa, ei vaadita. Jos ei ole lainkaan selitetty, miten ominaisuudet liittyvät kuvantamiseen, menettää yhden pisteen.

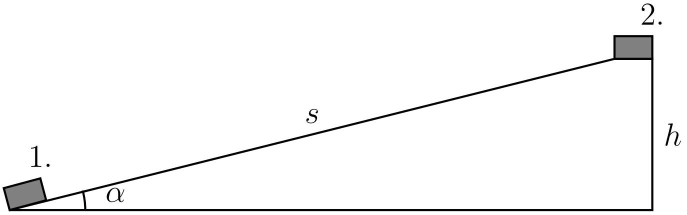
5. Isosisko vetää pikkusiskon pulkalla lumisen mäen päälle nopeudella 0,65 m/s. Mäen muodostama kulma vaakatason suhteen on 11° ja mäen korkeus 3,5 m. Pikkusiskon ja pulkan yhteinen massa on 15 kg. Pulkan ja mäen välinen liikekitkakerroin on 0,056. Kuinka suuren työn isosisko tekee pulkkaan vetäessään pulkan mäen päälle?



Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
v &= 0{,}65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
\alpha &= 11^\circ \\
h &= 3{,}5\,\mathrm{m} \\
m &= 15\,\mathrm{kg} \\
\mu &= 0{,}056.
\end{aligned}
$$

Piirretään tilannekuva.

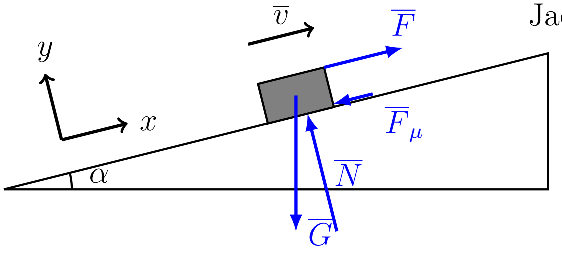


Kuvan geometriasta saadaan, että

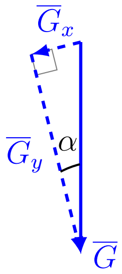
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \quad \| \cdot \frac{s}{\sin(\alpha)}$$

$$s = \frac{h}{\sin(\alpha)} \tag{1}$$

Voimakuvio:



Jaetaan $\overline{G}$ komponentteihin:



$$\begin{aligned} G_x &= G\sin(\alpha) \\ &= mg\sin(\alpha) \qquad (2) \\ G_y &= G\cos(\alpha) \\ &= mg\cos(\alpha). \qquad (3) \end{aligned}$$

Voimakuvio 1p

Liike on tasaista sekä x- että y-suunnissa, joten kiihtyvyys on nolla. Newtonin II lailla y-suunnassa:

$$\begin{aligned} \sum \overline{F}_y &= m\overline{a}_y = \overline{0} \\ \overline{N} + \overline{G}_y &= \overline{0} \\ N - G_y &= 0 \\ N &= G_y \\ N &= mg\cos(\alpha) \qquad (4) \end{aligned}$$

1p(2p)

LOPPUOSA RATKAISUSTA – VAIHTOEHTO 1:

Newtonin II lain nojalla x-suunnassa:

$$\begin{aligned} \sum \overline{F}_x &= m\overline{a}_x = \overline{0} \\ \overline{F} + \overline{G}_x + \overline{F}_\mu &= \overline{0} \\ F - G_x - F_\mu &= 0 \\ F &= G_x + F_\mu \end{aligned}$$

Sijoitetaan $G_x = mg\sin(\alpha)$ yhtälöstä (2) ja $F_\mu = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$ yhtälön (4) nojalla.

$$F = mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)$$

1p(3p)

Näin ollen isosiskon tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= Fs \\ W &= (mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha))s \end{aligned}$$

1p(4p)

Sijoitetaan $s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$ yhtälöstä (1).

$$
\begin{aligned}
W &= (mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)) \cdot \frac{h}{\sin(\alpha)} \\
W &= mgh\left(1 + \frac{\mu\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) \qquad \text{1p(5p)} \\
W &= 15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3{,}5\,\text{m} \cdot \left(1 + \frac{0{,}056 \cdot \cos(11^\circ)}{\sin(11^\circ)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W &= 663{,}401\ldots\,\text{J} \\
W &\approx 660\,\text{J}.
\end{aligned}
$$

Vastaus: Isosisko tekee pulkkaan 660 J suuruisen työn. 1p(6p)

LOPPUOSA RATKAISUSTA – VAIHTOEHTO 2:

Merkitään kitkan tekemää työtä W_μ:llä ja isosiskon tekemää työtä W:llä. Sovitaan potentiaalienergian nollataso mäen alapäähän. Mekaniikan energiaperiaatteen nojalla

$$E_{k1} + \underbrace{E_{p1}}_{0} + W + W_\mu = E_{k2} + E_{p2}$$

Liike on tasaista, joten $E_{k1} = E_{k2}$.

$$
\begin{aligned}
\cancel{E_{k1}} + W + W_\mu &= \cancel{E_{k2}} + E_{p2} \\
W + W_\mu &= E_{p2} \\
W &= E_{p2} - W_\mu \qquad \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $E_{p2} = mgh$ ja $W_\mu = -F_\mu s = -\mu N s$.

$$
\begin{aligned}
W &= mgh - (-\mu N s) \\
W &= mgh + \mu N s \qquad \text{1p(4p)}
\end{aligned}
$$

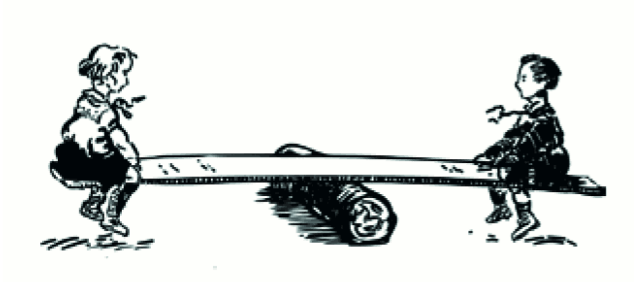
Sijoitetaan $N = \cos(\alpha)mg$ yhtälöstä (4) ja $s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$ yhtälöstä (1).

$$
\begin{aligned}
W &= mgh + \mu\cos(\alpha)mg \cdot \frac{h}{\sin(\alpha)} \\
W &= mgh\left(1 + \frac{\mu\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) \qquad \text{1p(5p)} \\
W &= 15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3{,}5\,\text{m} \cdot \left(1 + \frac{0{,}056 \cdot \cos(11^\circ)}{\sin(11^\circ)}\right)
\end{aligned}
$$

$$W = 663{,}401\ldots\ \mathrm{J}$$
$$W \approx 660\,\mathrm{J}.$$

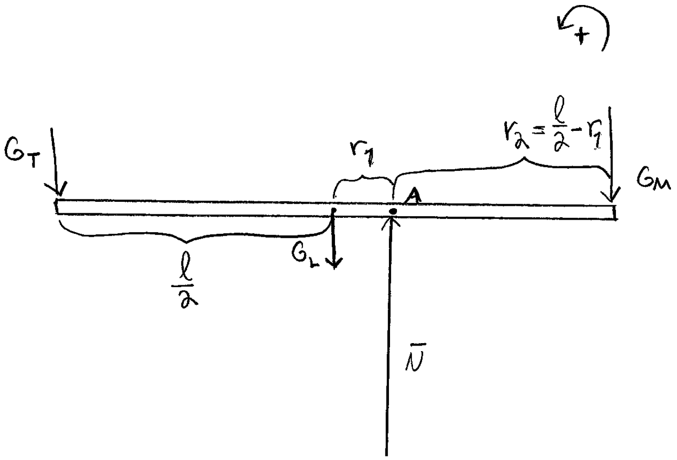
Vastaus: Isosisko tekee pulkkaan 660 J suuruisen työn. 1p(6p)

6. Maija ja Timo rakensivat keinulaudan tasapaksusta ja tasaleveästä lankusta ja tukista. Mihin kohtaan keinulaudan alle tukki on laitettava, jotta lankku olisi vaakasuorassa, kun lapset istuvat lankun päissä? Maijan massa on 28 kg, Timon 17 kg ja lankun 11 kg. Lankun pituus on 3,2 m.



Ratkaisu.

$$m_T = 17\,\text{kg}$$
$$m_M = 28\,\text{kg}$$
$$m_L = 11\,\text{kg}$$
$$l = 3{,}2\,\text{m}$$



Voimakuvio 1p

Tukki on asetettava kohtaan, jossa momenttien summa pisteen A suhteen on nolla, eli

$$\sum M_A = 0$$

$$G_T \cdot \left(\frac{l}{2} + r_1\right) + G_L r_1 - G_M \left(\frac{l}{2} - r_1\right) = 0$$ 1p(2p)

$$m_T g \cdot \left(\frac{l}{2} + r_1\right) + m_L g r_1 - m_M g \left(\frac{l}{2} - r_1\right) = 0 \quad \| : g$$

$$m_T \cdot \frac{l}{2} + m_T r_1 + m_L r_1 - m_M \frac{l}{2} + m_M r_1 = 0$$ 1p(3p)

$$m_T r_1 + m_L r_1 + m_M r_1 = m_M \frac{l}{2} - m_T \frac{l}{2}$$

$$r_1(m_T + m_L + m_M) = \frac{l}{2}(m_M - m_T) \quad \| : (m_T + m_L + m_M)$$

$$r_1 = \frac{l(m_M - m_T)}{2(m_T + m_L + m_M)}$$ 1p(4p)

$$r_1 = \frac{3{,}2\,\mathrm{m} \cdot (28\,\mathrm{kg} - 17\,\mathrm{kg})}{2 \cdot (17\,\mathrm{kg} + 11\,\mathrm{kg} + 28\,\mathrm{kg})}$$

$$r_1 = 0{,}3142\ldots\,\mathrm{m}$$ 1p(5p)

Lasketaan pisteen A etäisyys siitä laudan päästä, jossa Maija istuu.

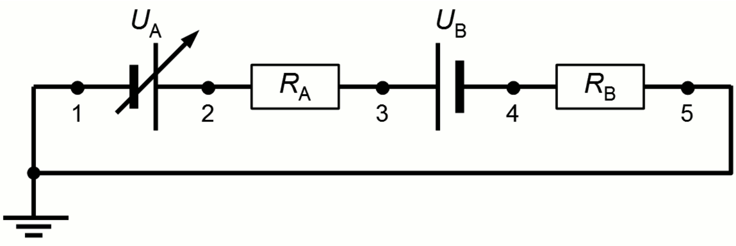
$$r_2 = \frac{l}{2} - r_1 = \frac{3{,}2\,\mathrm{m}}{2} - 0{,}3142\ldots\,\mathrm{m} = 1{,}2857\ldots\,\mathrm{m} \approx 1{,}3\,\mathrm{m}$$

Vastaus: Tukki on asetettava 1,3 m etäisyydelle siitä laudan päästä, jossa Maija istuu 1p(6p)

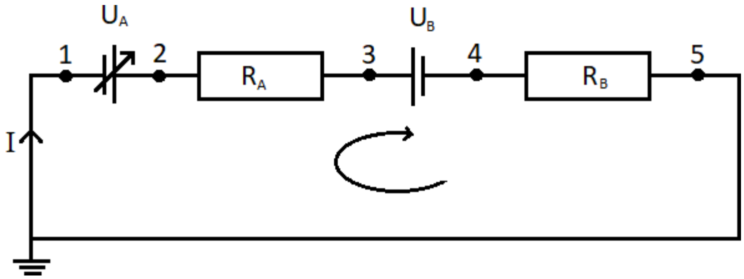
7. Kuvan esittämässä kytkennässä $R_A = 220\,\Omega$, $R_B = 330\,\Omega$ ja $U_B = 3{,}0\,\text{V}$. Jännitelähteiden sisäinen resistanssi jätetään huomioimatta. Tarkastellaan tilannetta, jossa

a) $U_A = 6{,}0\,\text{V}$ (4 p.)
b) $U_A = 1{,}5\,\text{V}$. (2 p.)

Piirrä tilanteista a ja b kuvaajat (potentiaalikäyrät), joista ilmenevät potentiaalien arvot pisteissä 1–5. Ilmoita myös potentiaalien arvot näissä pisteissä.



Ratkaisu.



Ratkaistaan virta I. Kirchoffin 2. lain mukaan

$$U_A - R_A I - U_B - R_B I = 0$$
$$R_A I + R_B I = U_A - U_B$$
$$(R_A + R_B)I = U_A - U_B \quad \| : (R_A + R_B)$$
$$I = \frac{U_A - U_B}{R_A + R_B}$$

a)

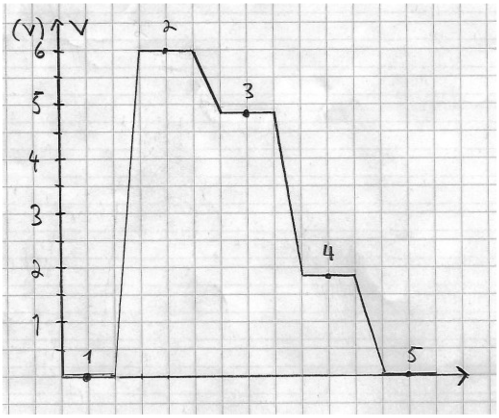
$$I_a = \frac{6{,}0\,\text{V} - 3{,}0\,\text{V}}{220\,\Omega + 330\,\Omega} = 5{,}4545\ldots \cdot 10^{-3}\,\text{A}$$ 1/3p

Lasketaan kysytyt potentiaalit. Pisteet 1 ja 5 ovat maadoitetun kohdan kanssa samassa potentiaalissa, joten

$$V_1 = V_5 = 0\,\mathrm{V}$$
$$V_2 = V_1 + U_A = 0\,\mathrm{V} + 6{,}0\,\mathrm{V} = 6{,}0\,\mathrm{V}$$
$$V_3 = V_2 - R_A I_a = 6{,}0\,\mathrm{V} - 220\,\Omega \cdot 5{,}4545\ldots \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = 4{,}8\,\mathrm{V}$$
$$V_4 = V_3 - U_B = 4{,}8\,\mathrm{V} - 3{,}0\,\mathrm{V} = 1{,}8\,\mathrm{V}$$

1/3p / oikea potentiaali 5/3p (2p)

Piirretään kysytty kuvaaja



2p(4p)

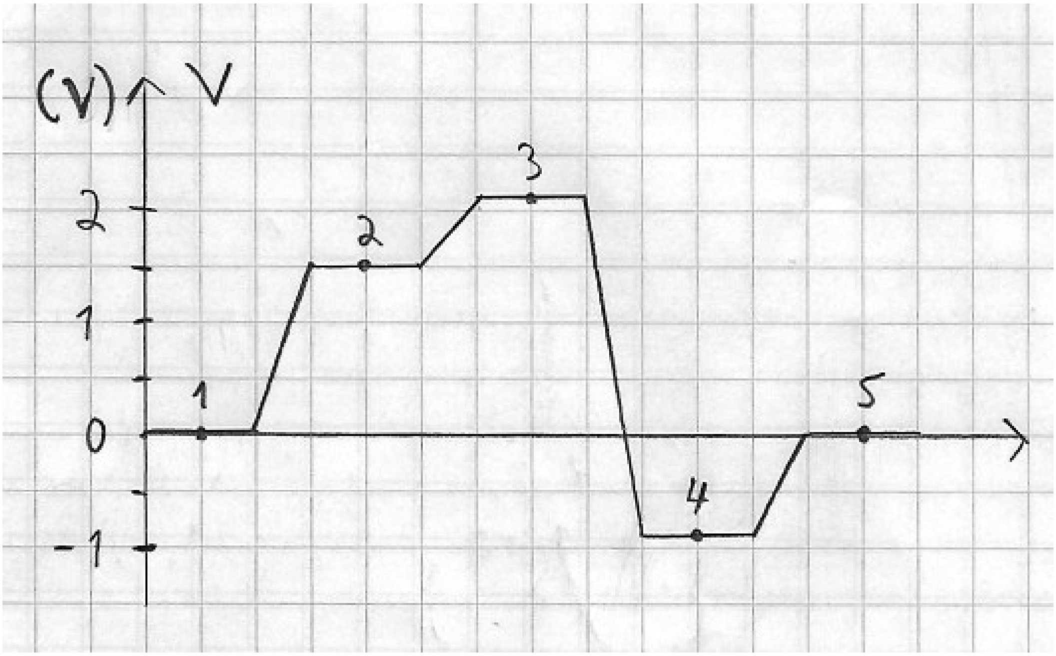
b)

$$I_b = \frac{1{,}5\,\mathrm{V} - 3{,}0\,\mathrm{V}}{220\,\Omega + 330\,\Omega} = -2{,}7272\ldots \cdot 10^{-3} A$$ 1/3p

Virran suunta on vastapäivään kuvassa. Lasketaan kysytyt potentiaalit.

$$V_1 = V_5 = 0\,\mathrm{V}$$
$$V_2 = 0\,\mathrm{V} + U_2 = 1{,}5\,\mathrm{V}$$
$$V_3 = V_2 - R_A I_b = 1{,}5\,\mathrm{V} + 220\,\Omega \cdot 2{,}7272\ldots \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = 2{,}1\,\mathrm{V}$$ 1/3p
$$V_4 = V_3 - U_B = 2{,}1\,\mathrm{V} - 3{,}0\,\mathrm{V} = -0{,}9\,\mathrm{V}$$ 1/3p (5p)

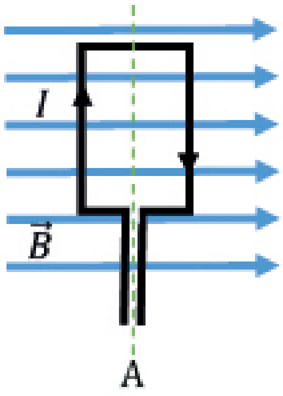
Piirretään kysytty kuvaaja



1p(6p)

8. Suorakulmainen virtasilmukka on sijoitettu homogeeniseen magneettikenttään. Kentän magneettivuon tiheys on 0,22 T. Silmukassa kulkee sähkövirta, jonka voimakkuus on 1,3 A. Silmukan korkeus on 15 cm ja leveys 7,3 cm.

   a) Kuinka suuri momentti silmukan akseliin A kohdistuu, kun kenttä on kuvan mukaisesti silmukan tason suuntainen?
   b) Silmukan annetaan kääntyä momentin vaikutuksesta akselin A ympäri. Kuinka momentin suuruus muuttuu? Määritä momentin suurin ja pienin arvo silmukan kääntyessä?



Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
B &= 0{,}22\,\mathrm{T} \\
I &= 1{,}3\,\mathrm{A} \\
b &= 15\,\mathrm{cm} = 0{,}15\,\mathrm{m} \\
a &= 7{,}3\,\mathrm{cm} = 0{,}073\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

a) Kun magneettikenttä on silmukan tason suuntainen, magneettikentän ja silmukan tason normaalin välinen kulma on $\alpha = 90°$. Näin ollen silmukkaan kohdistuu keskiakselin A suhteen momentti

$$M = ABI\sin(\alpha)$$ 1p

Silmukan pinta-ala on $A = ab$.

$$M = abBI\sin(\alpha) \quad \text{1p(2p)}$$
$$M = 0{,}073\,\text{m} \cdot 0{,}15\,\text{m} \cdot 0{,}22\,\text{T} \cdot 1{,}3\,\text{A} \cdot \sin(90°)$$
$$M = 3{,}1317 \cdot 10^{-3}\,\text{Nm}$$
$$M \approx 3{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{Nm}.$$

Vastaus: Silmukkaan kohdistuu momentti $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ Nm akselin A suhteen. 1p(3p)

b) Keskiakselin A suhteen silmukkaan vaikuttava momentti on a-kohdassa johdetun yhtälön mukaisesti

$$M = abBI\sin(\alpha).$$

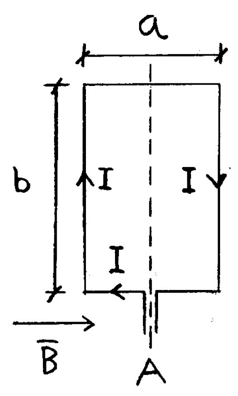
Kun silmukka kääntyy, sen pinnan normaalin ja magneettikentän välinen kulma α pienenee kohti nollaa, kunnes silmukan pinnan normaali on magneettikentän kanssa yhdensuuntainen. Tällöin siis $\sin(\alpha)$ pienenee arvosta $\sin(90°) = 1$ arvoon $\sin(0°) = 0$, 1p(4p)
jolloin momentti saa pienimmän arvonsa $M = 0$. 1p(5p)

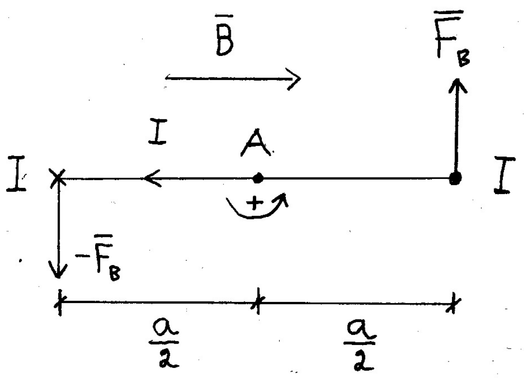
Jos silmukka kääntyy vielä lisää, kulma alkaa taas kasvaa, ja $\sin(\alpha)$ ei ole enää nolla.

Momentti on siis suurimmillaan a-kohdan tilanteessa, eli sen suurin arvo on $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ Nm, ja pienimmillään momentin suuruus on nolla. 1p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

a) Piirretään tilanne kuten tehtävänannossa (vasen kuva) ja akselin suuntaisesti katsottuna (oikea kuva).





Kokonaismomentti aiheutuu kahdesta yhtäsuuresta voimasta F_B, joiden suunnat saadaan oikean käden säännöllä. 1p

Sivuihin, joiden pituus on a, ei kohdistu magneettista voimaa, sillä ne ovat magneettikentän suuntaiset.

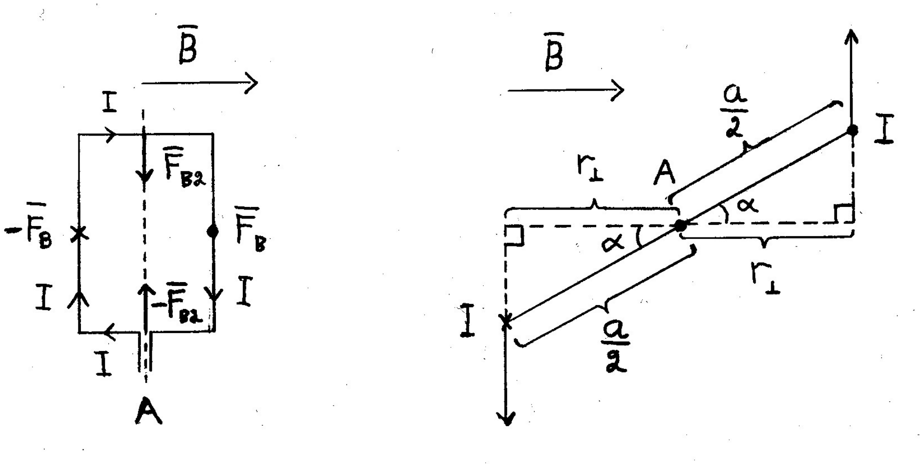
$$\sum M_A = F_B \cdot \frac{a}{2} + F_B \cdot \frac{a}{2}$$
$$\sum M_A = F_B \cdot a$$ 1p(2p)

Magneettikentässä olevaan virtajohtimeen kohdistuu voima $F_B = IbB$.

$$\sum M_A = IbBa$$
$$\sum M_A = 1{,}3\,\mathrm{A} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m} \cdot 0{,}22\,\mathrm{T} \cdot 0{,}073\,\mathrm{m}$$
$$= 3{,}1317 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}$$
$$\approx 3{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}.$$

Vastaus: Silmukkaan kohdistuu momentti $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ Nm akselin A suhteen. 1p(3p)

b) Piirretään kuva tilanteesta, jossa silmukan taso on kääntynyt magneettikentän suhteen.



Tässä tilanteessa a:n pituisiin sivuihin kohdistuu magneettiset voimat. Nämä voimat ovat kuitenkin oikean käden säännön mukaisesti akselin A suuntaiset, joten ne eivät aiheuta momenttia akselin A suhteen.

Kokonaismomentti aiheutuu siis a-kohdan tavoin kahdesta F_B:n suuruisesta voimasta, jotka kohdistuvat b:n pituisiin sivuihin.

$$\sum M_A = 2F_B \cdot r_\perp$$ 1p(4p)

Kuvan geometriasta nähdään, että $r_\perp = \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha)$.

$$\sum M_A = 2F_B \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha)$$
$$\sum M_A = F_B \cdot a \cos(\alpha)$$

Sijoitetaan $F_B = IbB$.

$$\sum M_A = IbBa \cdot \cos(\alpha).$$

Momentin suurin arvo saadaan, kun $\cos(\alpha) = 1$, eli kun $\alpha = 0$, eli a-kohdan tilanteessa. Näin ollen momentin suurin arvo on $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ Nm. 1p(5p)

Kun silmukka alkaa kääntyä, kulma α alkaa kasvaa kohti arvoa 90°, jolloin silmukan pinta on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan. Tällöin $\cos(\alpha)$ siis pienenee kohti arvoa $\cos(90°) = 0$. Näin ollen momentin pienin arvo on siis nolla. 1p(6p)

9. a) Esittele kaksi ionisoivan säteilyn lajia ja anna esimerkki kummankin syntymekanismista.
   b) Esittele kaksi keinoa, joilla voidaan vähentää ionisoivan säteilyn haittavaikutuksia?
   c) Esittele lyhyesti yksi sovellus, jossa ionisoivaa säteilyä käytetään hyödyksi.

Ratkaisu.

a) Huomautus lukijalle: Mitkä tahansa kaksi alla olevista vaihtoehdoista käyvät vastaukseksi.

- Röntgensäteily. Röntgensäteily on korkeaenergistä sähkömagneettista säteilyä. Röntgensäteilyä syntyy esimerkiksi atomien viritystilojen purkautuessa sekä varauksellisten hiukkasten (yleensä elektronien) jarruuntumisessa.
- Gammasäteily. Gammasäteily on korkeaenergistä sähkömagneettistä säteilyä. Gammasäteilyä syntyy atomiytimien viritystilojen purkautuessa sekä annihilaatiossa.
- Alfasäteily. Alfasäteily on hiukkassäteilyä, joka koostuu alfahiukkasista, eli heliumatomin ytimistä. Alfasäteilyä syntyy alfa-aktiivisten aineiden hajoamisessa.
- Beetasäteily. Beetasäteily on hiukkassäteilyä, joka koostuu beetahiukkasista, eli elektroneista tai positroneista. Beetasäteilyä syntyy beeta-aktiivisten aineiden hajoamisessa.

2p

Pisteytyksestä a-kohdassa: Pisteen saamiseen vaaditaan kaksi säteilylajia, joista kummastakin nimeäminen, esittely ja syntymekanismi.

Huomautus lukijalle a-kohdasta: Neutronisäteilyä ei kannata käyttää esimerkkinä, sillä se ei ionisoi atomeja suoraan. Neutronisäteily aiheuttaa ionisoitumista siten, että neutroni absorboituu ytimeen, minkä seurauksena voi syntyä ionisoivaa gammasäteilyä.

b) Huomautus lukijalle: Mitkä tahansa kaksi alla olevista vaihtoehdoista käyvät vastaukseksi.

- Säteilylähteen eristäminen suojaavan materiaalin sisään. Säteily vaimenee kulkiessaan aineen läpi, joten säteilylähteen eristäminen suojaavan materiaalin sisään vähentää säteilyä ja siten sen haittavaikutuksia suojan ulkopuolella.
- Säteilylähteen pitäminen kaukana. Säteily vaimenee kulkiessaan aineen läpi, ja sen intensiteetti heikkenee sen levitessä suuremmalle alueelle,

joten mitä kauempana säteilylähteestä ihminen on, sitä vähemmän säteilyä ihmiseen kohdistuu.

- Säteilylle altistumisajan pitäminen lyhyenä. Mitä lyhyemmän aikaa ihminen altistuu säteilylle, sitä pienemmän säteilyannoksen hän saa.

2p

---

c) Huomautus lukijalle: Mikä tahansa alla olevista vaihtoehdoista käy vastaukseksi.

- Ionisoivaa säteilyä käytetään lääketieteelliseen kuvantamiseen. Kuvattavaa ruumiinosaa säteilytetään eri puolilta ionisoivalla säteilyllä, ja mitataan läpi päässyt säteily, jolloin saadaan muodostettua poikkileikkauskuva kuvattavasta ruumiinosasta.
- Ionisoivaa säteilyä käytetään lääketieteessä sädehoidoissa. Syöpäsoluihin kohdennetaan ionisoivaa säteilyä, joka tuhoaa syöpäsoluja.
- Ionisoivaa säteilyä käytetään lääketieteellisten välineiden puhdistamiseen. Ionisoiva säteily tappaa välineissä mahdollisesti olevat mikrobit.
- Radioaktiivisia aineita voi käyttää merkkiaineina, sillä niiden lähettämä ionisoiva säteily on helppo havaita säteilyilmaisimilla.

2p

---

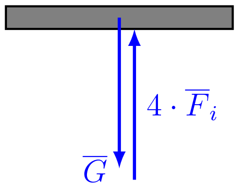
10. Nelikopteri pystyy lentämään, koska sen moottorien siivet saavat aikaan alaspäin suuntautuvan ilmavirran. Kuvan nelikopterin massa on 420 g ja jokaisen neljän roottorin pituus (kärkiväli) on 21 cm. Tarkasteltavassa tilanteessa nelikopteri leijuu paikallaan ilmassa.

   a) Kuinka suuri on roottorien aikaansaaman ilmavirran nopeus? Oletetaan, että ilma virtaa pystysuoraan nopeudella, joka on yhtä suuri koko roottorin siipien pyyhkäisemällä pinta-alalla. (5 p.)
   b) Kuinka suuri teho vähintään tarvitaan ilmavirran tuottamiseen? Riittääkö valmistajan ilmoittama 58 W? (1 p.)

Ratkaisu.

$$m = 420\,\mathrm{g} = 0{,}42\,\mathrm{kg}$$
$$r = \frac{d}{2} = \frac{21\,\mathrm{cm}}{2} = 0{,}105\,\mathrm{m}$$
$$\rho_i = 1{,}293\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

a) Nelikopteriin vaikuttaa sen oma painovoima $\overline{G}$ sekä virtaavan ilman kuhunkin roottoriin kohdistama nostava voima $\overline{F}_i$.



Nelikopteri pysyy paikallaan ilmassa, joten sen kiihtyvyys on nolla, eli Newtonin II lailla: 1p

$$\begin{aligned} \sum \overline{F} &= m\overline{a} = \overline{0} \\ \overline{G} + 4 \cdot \overline{F}_i &= \overline{0} \\ G - 4F_i &= 0 \\ F_i &= \frac{G}{4} = \frac{mg}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

Newtonin III lain nojalla ilma kohdistaa roottoriin yhtä suuren voiman kuin roottori kohdistaa ilmaan. Tarkastellaan aikavälillä Δt roottorin läpi kulkevaa ilmaa. Oletetaan, että sen nopeus on ennen roottorin läpäisyä nolla, ja roottorin läpi menemisen jälkeen v. Impulssiperiaatteen mukaan ajan Δt kuluessa roottorin läpi kulkevaan ilmamassaan m_i kohdistuva impulssi on yhtä suuri kuin ilmamassan liikemäärän muutos, eli

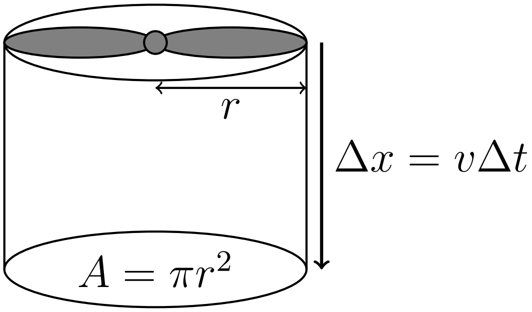
$$\begin{aligned} F_i \Delta t = m_i \Delta v = m_i v \quad &\| : \Delta t \\ F_i = m_i \frac{v}{\Delta t} \end{aligned} \tag{2}$$

1p(2p)

Selvitetään, kuinka suuri ilmamassa m_i yhden roottorin läpi kulkee aikavälillä Δt. Ilmavirtauksen poikkipinta-ala on

$$A = \pi r^2$$

ja ajan Δt kuluessa ilmavirtaus etenee matkan $\Delta x = v\Delta t$.



Näin ollen ajassa Δt roottorin läpi kulkee ilmaa tilavuus

$$V = A\Delta x = \pi r^2 \cdot v\Delta t.$$

1p(3p)

Näin ollen roottorin läpi kulkee siis ilmamassa

$$m_i = \rho_i V = \pi r^2 \rho_i v \Delta t. \tag{3}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2).

$$F_i = \pi r^2 \rho_i v \cancel{\Delta t} \cdot \frac{v}{\cancel{\Delta t}}$$
$$F_i = \pi r^2 \rho_i v^2. \qquad (4)$$

1p(4p)

Sijoitetaan (4) yhtälöön (1) ja ratkaistaan ilmavirran nopeus v.

$$\begin{aligned}
\pi r^2 \rho_i v^2 &= \frac{mg}{4} \quad \| : (\pi r^2 \rho_i) \\
v^2 &= \frac{mg}{4\pi r^2 \rho_i} \\
v &= \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{mg}{4\pi r^2 \rho_i}} \\
v &= \sqrt{\frac{0{,}42\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4 \cdot \pi \cdot (0{,}105\,\mathrm{m})^2 \cdot 1{,}293\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} \\
v &= 4{,}7958\ldots\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v &\approx 4{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Vastaus: Ilmavirran nopeus on $4{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1p(5p)

Huomautus lukijalle: Ilman tiheys on katsottu taulukkokirjasta NTP-olosuhteissa. Jos on katsonut ilman tiheyden $\rho_i = 1{,}22\,\mathrm{kg/m^3}$ eri sivulta lämpötilassa 15 °C, tulee laskun tulokseksi $4{,}937\ldots\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}9\,\mathrm{m/s}$, mikä on myös oikein.

b) Liikkeen suuntainen voima F tekee mekaanista työtä teholla $P = Fv$. Oletetaan, että kaikki energia saadaan hyödynnettyä ilmavirran kiihdyttämiseen, jolloin tarvittava teho on $F_i v$ jokaista roottoria kohti, eli

$$P = 4F_i \cdot v$$

Sijoitetaan (1).

$$\begin{aligned}
P &= 4 \cdot \frac{G}{4} \cdot v \\
P &= Gv \\
P &= mgv \\
P &= 0{,}42\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}7958\ldots\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
P &= 19{,}7598\ldots\,\mathrm{W} \\
P &\approx 20\,\mathrm{W} \quad (< 58\,\mathrm{W})
\end{aligned}$$

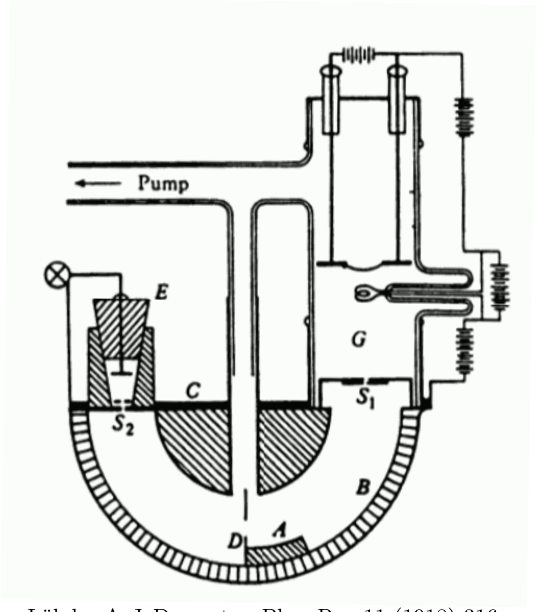
Vastaus: Tarvitaan vähintään teho 20 W ja valmistajan ilmoittama teho riittää. 1p(6p)

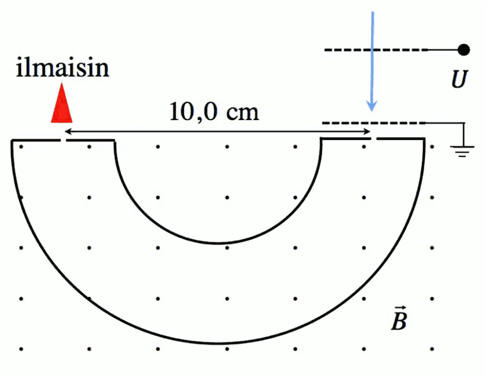
Huomautus lukijalle: Tehon kaavaan voidaan sijoittaa yhtälön $F_i = \frac{G}{4}$ sijaan myös $F_i = \pi r^2 \rho_i v^2$ ja saadaan sama lopputulos.

11. A. J. Dempster rakensi sata vuotta sitten aikansa muihin laitteisiin verrattuna ylivertaisen massaspektrometrin. Hän pyrki selvittämään muun muassa magnesiumin eri isotooppien pitoisuuksia. Ohessa on kuva alkuperäisestä julkaisusta ja sen perusteella piirretty yksinkertaistus.

Tutkittavat metalli-ionit (Mg^+) kiihdytettiin käyttäen jännitettä U. Tämän jälkeen ne ohjattiin pienen sisäänmenoaukon läpi spektrometrikammioon. Ioneista pystyttiin havaitsemaan ne, jotka osuivat ulostuloaukkoon ja sieltä edelleen ilmaisimelle. Massaspektrometrin kammio oli sijoitettu homogeeniseen magneettikenttään, jonka magneettivuon tiheys oli 0,520 T ja jonka suunta oli kuvassa paperista kohti katsojaa. Aukkojen keskikohtien välinen etäisyys oli 10,00 cm ja kummankin aukon leveys 1,4 mm.

Millaista kiihdytysjännitettä tulee käyttää, jotta magnesiumin yleisin isotooppi päätyy ilmaisimelle? Nimeä vastauksessasi käyttämäsi fysikaaliset lait ja mallit.





Lähde: A. J. Dempster, Phys Rev 11 (1918) 316

Ratkaisu. Magnesiumin yleisin isotooppi on taulukkokirjan mukaan ^{24}Mg, jonka $^{24}Mg^+$-ionin massa on

$$\begin{aligned}m &= 23{,}9850424 - 5{,}4857991 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{u}\\ &= 23{,}9844\ldots\,\mathrm{u}\\ &= 23{,}9844\ldots \cdot 1{,}6605389 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\\ &= 3{,}982718\ldots \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

Huomautus lukijalle: Puuttuvan elektronin massaa ei ole välttämätöntä huomioida, koska se ei vaikuta merkittävästi lopputulokseen.

Kun ionit kiihdytetään sähkökentässä, työperiaatteen mukaan

$$W = \Delta E_k$$

Sijoitetaan sähkökentän tekemän työn kaava $W = QU$.

$$QU = \frac{1}{2}mv^2 \quad \| : Q$$
$$U = \frac{m}{2Q} \cdot v^2. \tag{1}$$

2p

Spektrometrikammiossa nopeudella v liikkuviin ioneihin kohdistuu magneettinen voima, jonka suuruus on

$$F_B = QvB\,. \tag{2}$$

Voiman $\overline{F}_B$ suunta on kohtisuorassa nopeutta $\overline{v}$ vastaan. Näin ollen $\overline{F}_B$ aiheuttaa ympyräliikkeessä olevalle ionille keskeiskiihtyvyyden Newtonin II lain mukaisesti:

$$\overline{F}_B = m\overline{a}_n$$
$$F_B = ma_n \quad \| \text{ Sij. (2) ja } a_n = \frac{v^2}{r}$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r} \quad \| : v$$
$$QB = \frac{m}{r} \cdot v \quad \| ()^2$$
$$Q^2B^2 = \frac{m^2}{r^2} \cdot v^2 \quad \| \cdot \frac{r^2}{m^2}$$
$$v^2 = \frac{Q^2B^2r^2}{m^2}$$

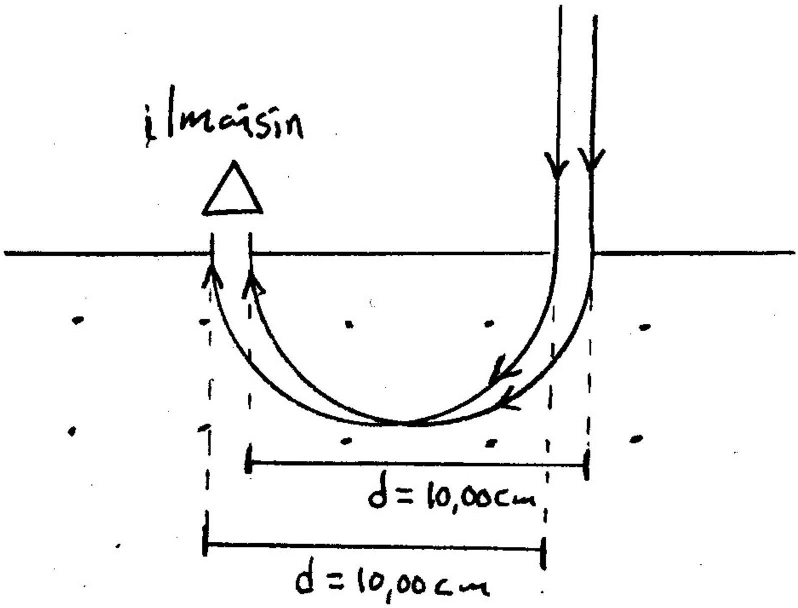
1p(3p)

Sijoitetaan tämä yhtälöön (1).

$$U = \frac{\cancel{m}}{2\cancel{Q}} \cdot \frac{Q^{\cancel{2}}B^2r^2}{m^{\cancel{2}}} \quad \| \text{ Sij. } Q = e$$
$$U = \frac{eB^2r^2}{2m}$$

1p(4p)

Jos jännitteellä U kiihdytettyjen Mg-ionien radan säteeksi tulee 5,00 cm, tällainen ioni havaitaan ilmaisimella, kuten allaolevasta kuvasta ilmenee.



Jos jännite on tätä suurempi, radan säde r on suurempi ja tuloaukon sisäreunaan osuvat ionit osuvat ilmaisinpään aukon ulkoreunaakin ulommas. Vastaava tapahtuu pienemmillä jännitteillä tuloaukon ulkoreunaan osuville ioneille, koska niiden radan säde $r < 5{,}00\,\text{cm}$. Siten jännitteen U tulee olla sellainen, että radan säde on mahdollisimman tarkasti 5,00 cm. Tällöin spektrometrillä havaittaviin pitoisuuksiin ei tule vääristymiä.

Huomautus lukijalle: Täysien pisteiden saamiseksi ei tarvitse perustella näin täsmällisesti, että radan säteen tulee olla $r = 5{,}0\,\text{cm}$. Riittää todeta, että radan säteellä $r = 5{,}0\,\text{cm}$ kaikki sisääntuloaukkoon osuvat $^{24}\text{Mg}^+$-ionit osuvat ilmaisimelle.

Jännitteeksi (3) saadaan siis

$$\begin{aligned} U &= \frac{1{,}602176565 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot (0{,}520\,\text{T})^2 \cdot (0{,}05\,\text{m})^2}{2 \cdot 3{,}982718\ldots \cdot 10^{-26}\,\text{kg}} \\ &= 1359{,}7138\ldots\ \text{V} \\ &\approx 1{,}36\,\text{kV} \end{aligned}$$

Vastaus: Kiihdytysjännitteen tulee olla 1,36 kV. 2p(6p)

+12. a) Esittele, miten energian säilyminen toteutuu termodynaamisissa systeemeissä. (2 p.)
b) Selitä, miksi lämpöopin II pääsäännöstä seuraa, että lämpövoimakoneen hyötysuhde on aina pienempi kuin 1. (2 p.)
c) Kerro, miten lämpövoimakone, jäähdytyskone ja lämpöpumppu toimivat. Esitä kaavioina, miten energian siirto tapahtuu kussakin tapauksessa. (5 p.)

Ratkaisu.

a) Termodynaaminen systeemi voi vastaanottaa lämpöä ympäristöltä tai luovuttaa lämpöä ympäristöön. Se voi myös tehdä laajentuessaan mekaanista työtä ympäristöön, tai ympäristö voi tehdä siihen mekaanista työtä ja puristaa sitä kasaan. Termodynaamiseen systeemiin voi varastoitua energiaa sisäenergiaksi, jonka määrä systeemissä voi kasvaa tai vähetä. 1p

Termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön mukaan termodynaamisen systeemin sisäenergian muutos ΔU on yhtä suuri kuin systeemin ja ympäristön välillä siirtyneen lämpömäärän Q ja systeemin ja ympäristön välillä tehdyn mekaanisen työn W summa.

$$\Delta U = Q + W.$$

Ensimmäisen pääsäännön mukaan energia siis säilyy, sillä systeemin ja ympäristön välillä siirtynyt energiamäärä on yhtäsuuri kuin systeemin sisäenergian muutos, joten energiaa ei katoa tai synny tyhjästä. 1p

b) Lämpövoimakoneessa lämpömäärä Q_1 virtaa lämpösäiliöstä, ja kone muuttaa osan virtaavasta lämmöstä työksi W. Lämpövoimakoneen hyötysuhde on

$$\eta = \frac{W}{Q_1}.$$ 1p

Lämpöopin toisen pääsäännön mukaan kaikkea lämpöä ei voida muuttaa kokonaan työksi, joten $W < Q_1$. Näin ollen siis

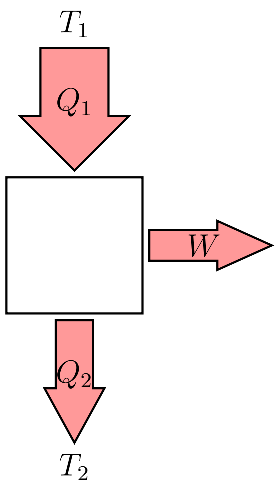
$$\eta = \frac{W}{Q_1} < 1.$$ 1p

Huomautus lukijalle: Lukiokirjoissa lämpöopin toiselle pääsäännölle on annettu useita muotoiluja. Jos tämän haluaisi perustella lämpöopin toisen pääsäännön yleisen muotoilun ”Eristetyssä systeemissä entropia ei voi vähetä.” avulla, laskusta tulisi hieman hankala ja se ylittäisi lukio-oppimäärän.

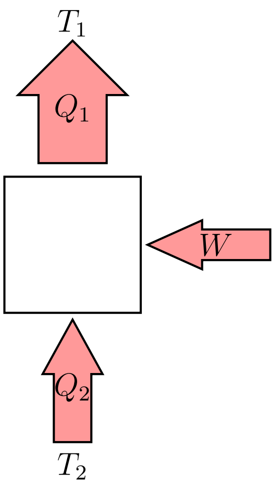
c) Lämpövoimakoneessa lämpösäiliötä lämmitetään esimerkiksi polttoainetta polttamalla. Sieltä lämpö siirtyy luonnostaan kohti kylmäsäiliötä (usein ympäristö). Lämpövoimakone muuttaa osan lämpösäiliöstä siirtyvästä lämmöstä mekaaniseksi työksi. Tämä voi tapahtua esimerkiksi siten, että lämpösäiliöstä siirtyvä lämpö kuumentaa kaasua, joka laajenee ja tekee laajentuessaan mekaanisen työn esimerkiksi siirtämällä mäntää. 1p

Kylmäkoneen tarkoitus on jäähdyttää kylmäsäiliötä ja lämpöpumpun tarkoitus on lämmittää lämpösäiliötä. Jäähdytyskoneessa ja lämpöpumpussa kylmäsäiliöstä siirretään lämpöä lämpösäiliöön, ja tämän aikaansaamiseksi kone tekee työtä. Laitteissa kiertää ainetta, joka puristetaan nestemäiseksi sen kulkiessa lämpösäiliön puolelle, jolloin se kuumenee ja luovuttaa lämpöä lämpösäiliöön. Tämän jälkeen aine kulkee kuristusventtiilin läpi kylmäsäiliön puolelle, jolloin se jäähtyy huomattavasti, vastaanottaa lämpöä kylmäsäiliöltä ja höyrystyy. Tämän seurauksena kylmäsäiliö jäähtyy. Tämän jälkeen kierto alkaa alusta. 2p

Lämpövoimakoneen energiavirtakaavio:



Jäähdytyskoneen ja lämpöpumpun energiavirtakaavio:



Kuvissa T_1 on lämpösäiliön lämpötila, T_2 on kylmäsäiliön lämpötila, Q_1 on lämpösäiliön ja koneen välillä siirtyvä lämpö, Q_2 on kylmäsäiliön ja koneen välillä siirtyvä lämpö ja W on koneen tekemä työ. 2p

+13. Veden pinta-aaltojen nopeuden riippuvuutta veden syvyydestä tutkittiin aaltoammekokeessa, jossa veden syvyyttä voitiin muuttaa. Vesiaallot synnytettiin värähtelijällä, jonka taajuus oli 10,0 Hz. Aallonpituuden λ mittaustulokset eri veden syvyyksillä h on annettu taulukossa.

h (mm)	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,3	6,3
λ (mm)	13,9	14,5	16,0	16,8	17,7	18,3	19,6

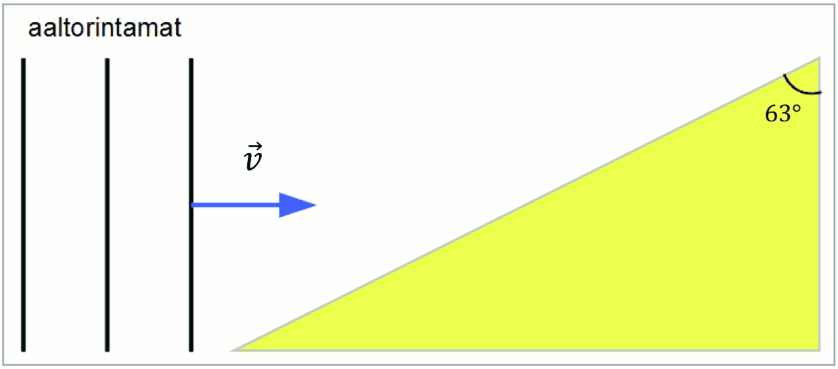
a) Selvitä, mikä seuraavista malleista i–iii kuvaa aaltojen nopeuden riippuvuutta veden syvyydestä kaikkein parhaiten:

i) $v = kh$ ii) $v = kh^2$ iii) $v = k\sqrt{h}$

Perustele vastauksesi graafisesti mittaustulosten avulla. (4 p.)

b) Määritä valitsemassasi mallissa esiintyvä verrannollisuuskerroin k yksikköineen. (2 p.)

c) Aaltoammeen pohjalle asetetaan koroke, joka on esitetty keltaisella kuvassa ylhäältä päin. Ennen koroketta veden syvyys on 6,0 mm, ja korokkeen kohdalla 3,2 mm. Aaltorintamat saapuvat jyrkkäreunaisen korokkeen muodostamaan rajapintaan vinosti kuvan mukaisesti 63°:n tulokulmassa. Määritä aaltorintamien etenemissuunta korokkeen päällä. Kopioi kuva vastauspaperiisi, ja täydennä siihen tilanne, jossa aaltorintamat osuvat rajapintaan ja ylittävät sen. Kuvassa pitää näkyä aaltorintamat ja niiden etenemissuunta ennen koroketta ja korokkeen päällä. (3 p.)



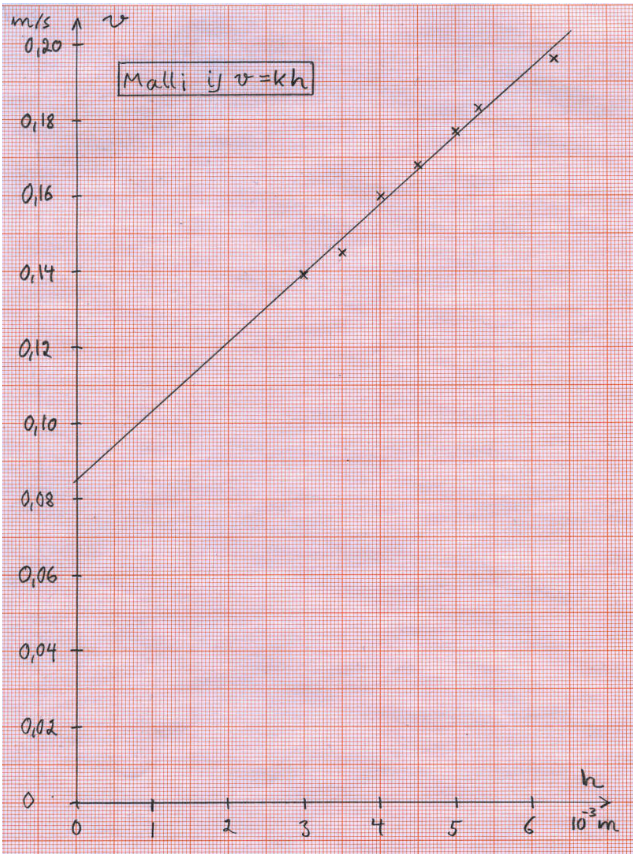
Ratkaisu.

a) Tutkitaan, millainen kuvaaja mittaustuloksista tulee (h, v)-, (h^2, v)- ja $(\sqrt{h}, v)$-koordinaatistoissa vastaten malleja i, ii ja iii. Jos malli on kuvaava, pitäisi mittaustulosten asettua likimain origon kautta kulkevalle suoralle. Se malli, jota vastaavaan kuvaan saadaan parhaiten sovitettua tällainen suora, kuvaa parhaiten aaltojen nopeuden riippuvuutta veden syvyydestä.

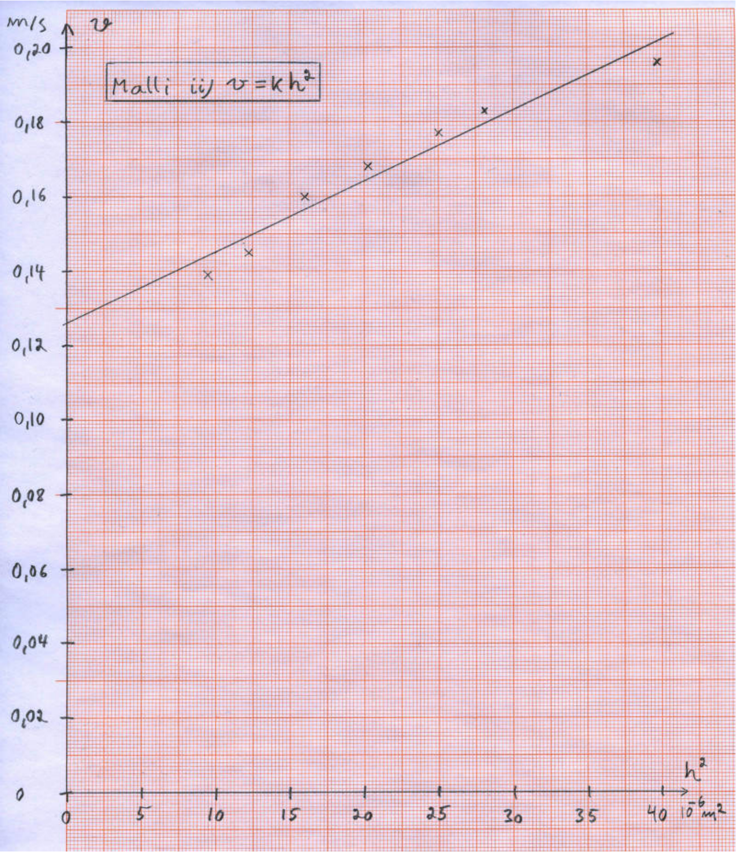
Vesiaaltojen taajuus $f = 10,0\,\text{Hz}$. Lasketaan taulukkoon tarvittavien apusuureiden arvot.

λ	(m)	0,0139	0,0145	0,016	0,0168	0,0177	0,0183	0,0196
$v = f\lambda$	(m/s)	0,139	0,145	0,16	0,168	0,177	0,183	0,196
h	$(10^{-3} \cdot \text{m})$	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,3	6,3
h^2	$(10^{-6} \cdot \text{m}^2)$	9,0	12,3	16,0	20,3	25,0	28,1	39,7
$\sqrt{h}$	$(10^{-3} \cdot \sqrt{\text{m}})$	55	59	63	67	71	73	79

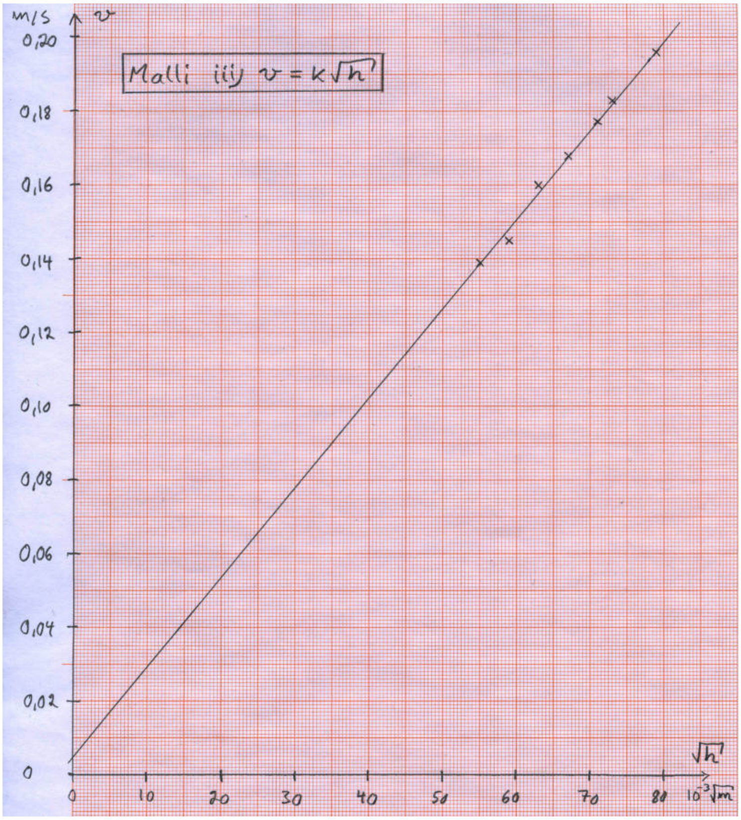
Alla on kutakin mallia vastaava kuvaaja.



1p


m/s
v
Malli ii) $v = kh^2$
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
h^2
10^{-6} m^2

1p(2p)

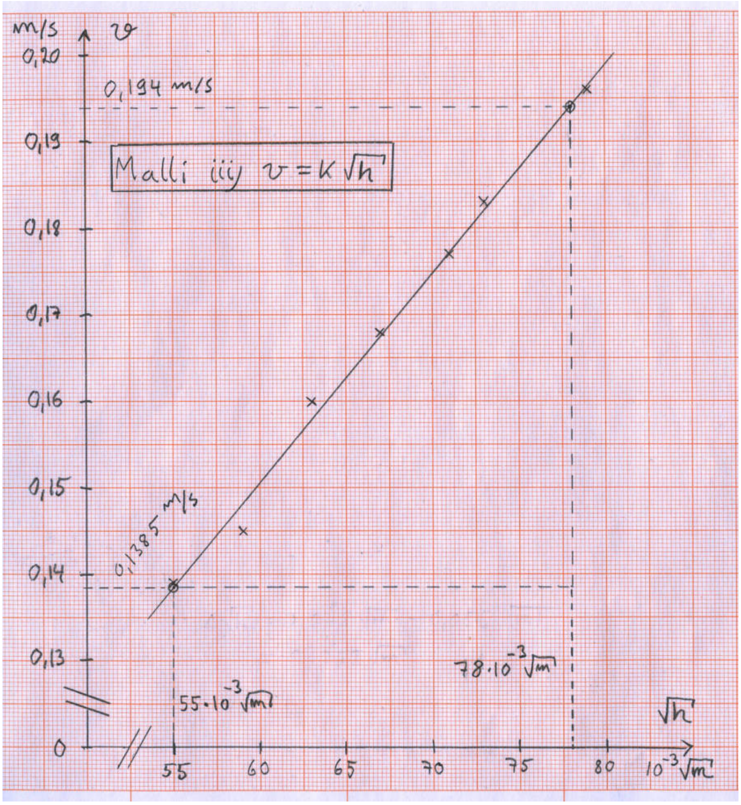


1p(3p)

1p / oikein piirretty kuvaaja, josta näkee, kulkeeko suora likimain origon kautta.

Kunkin mallin mukaan nopeuden kuvaajan tulisi olla origon kautta kulkeva suora valitussa koordinaatistossa. Kuva iii on ainoa, jossa pisteisiin sovitettu suora kulkee läheltä origoa, eli ainoa, jossa malli pätee hyvin. Kuvassa iii myös pisteet osuvat hyvin suoralle. Malli iii kuvaa siis parhaiten aaltojen nopeuden riippuvuutta veden syvyydestä. 1p(4p)

b) Piirretään a-kohdan viimeisestä kuvasta uusi versio siten, että kulmakerroin on tarkempi määrittää. Verrannollisuuskerroin on sama kuin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin. 1p(5p)



$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\Delta v}{\Delta\sqrt{h}} \\
k &= \frac{0{,}194\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0{,}1385\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{78\cdot 10^{-3}\,\sqrt{\mathrm{m}} - 55\cdot 10^{-3}\,\sqrt{\mathrm{m}}} \\
&= 2{,}4130\ldots\,\frac{\sqrt{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}} \\
&\approx \underline{\underline{2{,}41\,\frac{\sqrt{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}}}
\end{aligned}
$$

1p(6p)

Jos käyttää pituusyksikkönä millimetriä, vastaus on $k \approx 76\,\frac{\sqrt{\mathrm{mm}}}{\mathrm{s}}$.

Yllä olevassa laskelmassa yksikkö on supistettu näin:

$$\frac{\frac{m}{s}}{\sqrt{m}} = \frac{m/\sqrt{m}}{s} = \frac{\sqrt{m}}{s}.$$

Jos mietit, miksi $m/\sqrt{m} = \sqrt{m}$, niin

$$\frac{m}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}^2}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}\cdot\cancel{\sqrt{m}}}{\cancel{\sqrt{m}}} = \sqrt{m}.$$

c) Taitekulma saadaan taittumislaista.

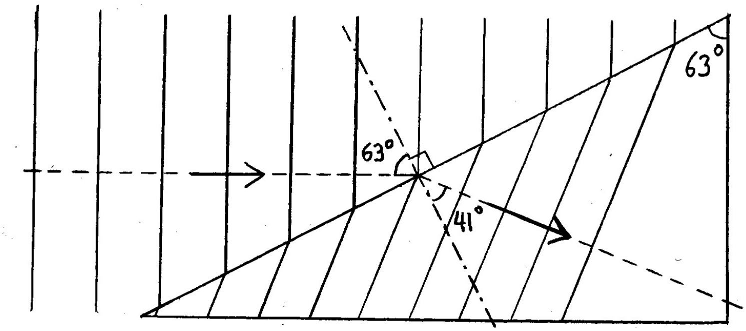
$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad \| \cdot \sin\alpha_1$$
$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1$$

Sijoitetaan mallin $v = k\sqrt{h}$ mukaan lasketut nopeudet.

$$\sin\alpha_2 = \frac{\cancel{k}\sqrt{h_2}}{\cancel{k}\sqrt{h_1}}\sin\alpha_1$$ 1p(7p)

$$\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{3{,}2\,\mathrm{mm}}}{\sqrt{6{,}0\,\mathrm{mm}}}\cdot\sin(63°)$$
$$\sin\alpha_2 = 0{,}6506\ldots$$
$$\alpha_2 = 40{,}59\ldots° \approx 41°$$

Vastaus: Aaltorintama etenee korokkeen jälkeen ao. kuvan mukaisesti siten, että etenemissuunta on 41° reunan normaaliin nähden 1p(8p)



1p(9p)