



YO-MALLIVASTAUKSET
FYSIIKKA
SYKSY 2019

Tiesitkö tämän?



60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös
lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suomenen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Timo Kalinainen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala, Viljami Suominen ja Matti Virolainen.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

KÄYTTÖEHDOT

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion fysiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. **Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.**

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

<https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

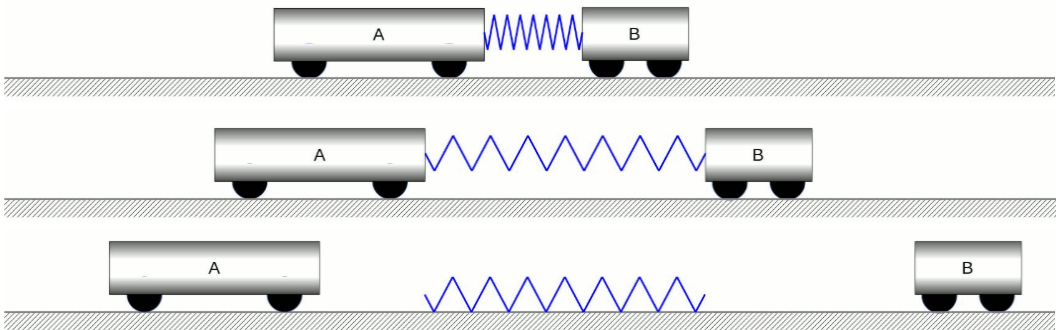
Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	10
Ratkaisu tehtävään 3	14
Ratkaisu tehtävään 4	17
Ratkaisu tehtävään 5	21
Ratkaisu tehtävään 6	24
Ratkaisu tehtävään 7	26
Ratkaisu tehtävään 8	30
Ratkaisu tehtävään 9	34
Ratkaisu tehtävään 10	40
Ratkaisu tehtävään 11	44

1. Monivalintatehtäviä fysiikan eri osa-alueilta (20 p.)

Valitse jokaisessa kohdassa 1.1.–1.10. oikea vaihtoehto. Yhteensä 20 p., oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Animaatio 1.A



Huom! Oikeassa kokeessa on tässä kohtaa animaatio, jonka voit katsoa [tältä linkistä](#).

1.1. Vaakasuuralla, pienikitkaisella radalla on levossa kaksi vaunua. Vaunun B massa on puolet vaunun A massasta. Vaunujen välissä on puristuneena kevyt jousi. Vaunut päästetään yhtä aikaa irti animaatioissa 1.A esitetyllä tavalla. Valitse ti-
lannetta kuvaava oikea vaihtoehto.

- ☐ Vaunut saavat yhtä suuret liike-energiat.
- ☐ Vaunujen yhteenlaskettu liike-energia on nolla.
- ☐ Vaunu A saa suuremman liike-energian kuin vaunu B.
- ☒ Vaunu A saa pienemmän liike-energian kuin vaunu B.

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p

Ulkoiset voimat eivät kohdistu vaunujen ja jousen muodostamaan systeemiin merkittävää kokonaisvoimaa, joten systeemin liikemäärä säilyy. Vaunut ovat aluksi paikallaan, eli systeemin kokonaisliikemäärä on nolla. Näin ollen vaunujen liikemäärien täytyy olla keskenään yhtä suuret (ja vastakkaismerkkiset) niiden irrottua jousesta, eli

$$m_A v_A = m_B v_B = p.$$

Vaunun A massa on suurempi kuin vaunun B, joten vaunun B nopeus on suurempi kuin vaunun A. Vaunujen liike-energiat voidaan kirjoittaa muodossa

$$E_{kA} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_A v_A \cdot v_A = \frac{1}{2}p v_A$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_B v_B \cdot v_B = \frac{1}{2}p v_B,$$

mistä nähdään, että vaunun B liike-energia on suurempi kuin vaunun A, koska vaunun B nopeus on suurempi kuin vaunun A.

1.2. Tarkastellaan edelleen samoja vaunuja ja samaa animaatiossa 1.A esitettyä tilannetta kuin kohdassa 1.1. Valitse tilannetta kuvaava oikea vaihtoehto.

- ☐ Vaunujen liikemäärien suunnat ja suuruudet ovat samat.
- ☒ Vaunujen liikemäärien summa on nolla.
- ☐ Vaunu A saa itseisarvoltaan suuremman liikemäärän kuin vaunu B.
- ☐ Vaunu A saa itseisarvoltaan pienemmän liikemäärän kuin vaunu B.

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

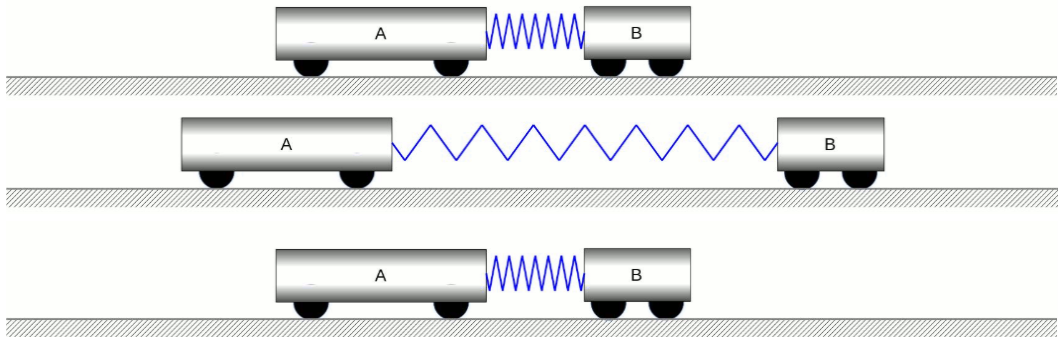
2p(4p)

Vaunujen liikemäärät animaation lopussa ovat yhtä suuret ja vastakkais-suuntaiset. Liikemäärä on vektorisuure, joten vaunujen liikemäärien summa on

$$\overline{p_A} + \overline{p_B} = p_A - p_B$$

$$= 0$$

Animaatio 1.B



Huom! Oikeassa kokeessa on tässä kohtaa animaatio, jonka voit katsoa [tästä linkistä](#).

1.3. Tarkastellaan edelleen samoja vaunuja kuin kohdissa 1.1. ja 1.2. Nyt kokoon puristunut jousi on kiinnitetty molempiin vaunuihin, jolloin systeemi jää värähtelemään animaatioissa 1.B esitetyn tilanteen mukaisesti. Valitse tilannetta kuvaava oikea vaihtoehto.

- ☐ Jousivoiman potentiaalienergia vaihtaa etumerkkiään.
- ☐ Jousivoiman potentiaalienergia on vakio.
- ☒ Jousivoiman potentiaalienergia muuttuu jaksollisesti.
- ☐ Jousivoiman potentiaalienergian ja vaunujen liike-energioiden summa muuttuu jaksollisesti.

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p(6p)

Jousivoiman potentiaalienergia on $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, missä k on jousivakio ja x on jousen venymä sen lepopituudesta. Koska jousen pituus muuttuu jaksollisesti, myös siihen varastoitunut potentiaalienergia muuttuu jaksollisesti.

1.4. Tarkastellaan edelleen samoja vaunuja ja samaa animaatioissa 1.B esitettyä tilannetta kuin kohdassa 1.3. Valitse tilannetta kuvaava oikea vaihtoehto. Vaunun B liikkeen amplitudi on suurempi kuin vaunun A, koska

- ☒ systeemin massakeskipiste pysyy paikallaan.
- ☐ vaunun B liikemäärä on keskimäärin suurempi kuin vaunun A.
- ☐ jousi kohdistaa vaunuun B suuremman voiman kuin vaunuun A.
- ☐ vaunujen liike-energiat ovat joka hetki yhtä suuret.

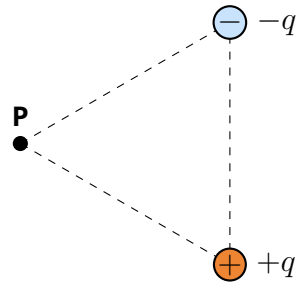
Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p(8p)

Vaunujen ja jousen muodostama systeemi on aluksi paikallaan. Systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien (painovoima ja radan tukivoima) summa on nolla, systeemin massakeskipiste pysyy paikallaan. (Tarkemmin: massakeskipiste säilyttää Newtonin ensimmäisen lain nojalla liiketilansa. Massakeskipiste oli animaation alussa paikoillaan, joten se myös pysyy paikoillaan.)

1.5. Kaksi pistevarausta $+q$ ja $-q$ sekä piste P ovat tasakylkisen kolmion kärjissä kuvan mukaisesti. Pisteessä P ei ole varausta. Sähkökenttä pisteessä P

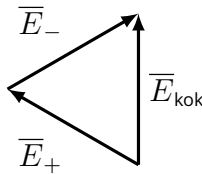
- ☐ suuntautuu kuvassa oikealle.
- ☐ suuntautuu kuvassa vasemmalle.
- ☒ suuntautuu kuvassa ylös.
- ☐ suuntautuu kuvassa alas.
- ☐ on nolla.



Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p
(10p)

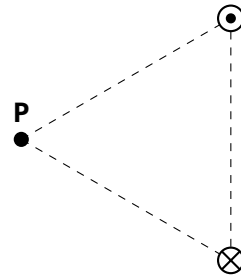
Positiivisen varauksen aiheuttama sähkökenttä on pois päin varauksesta ja negatiivisen varauksen aiheuttama sähkökenttä on kohti varausta. Varaukset ovat yhtä suuret ja yhtä kaukana pisteestä P , joten niiden aiheuttamat sähkökentät ovat pisteessä P keskenään yhtä suuret. Tilanteen geometrian takia sähkökenttä pisteessä P (eli varauksien aiheuttamien sähkökenttien vektorisumma) on ylöspäin.



Tehtävänannon mukaan kolmio on tasakylkinen, mutta kuvasta ei silmämääräisesti erota helposti, onko yksi sivu eri pituinen kuin muut ja jos on, mikä sivu se on. Sivut ovat kuitenkin silmämääräisesti yhtä pitkiä, joten valittu oikea vastaus on ainoa järkevä vaihtoehto. Sama koskee myös seuraavaa kohtaa 1.6.

1.6. Kahdessa yhdensuuntaisessa virtajohtimessa, jotka ovat kuvan tasoa vastaan kohtisuorassa, kulkee yhtä suuri virta. Ylemmässä johtimessa virta kulkee kohti katsojaa ja alemmassa katsojasta poispäin. Kuvan mukaisesti piste P muodostaa johtimien kanssa tasakylkisen kolmion kuvan tasossa. Magneettikenttä (magneettivuon tiheys) pisteessä P

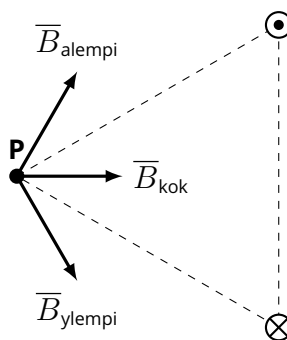
- ☒ suuntautuu kuvassa oikealle.
- ☐ suuntautuu kuvassa vasemmalle.
- ☐ suuntautuu kuvassa ylös.
- ☐ suuntautuu kuvassa alas.
- ☐ on nolla.



Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p
(12p)

Oikean käden säännöllä (peukalo virran suuntaan, muut sormet koukussa osoittavat magneettikentän suunnan) voidaan päätellä, että ylemmän johtimen magneettikentän suunta on vastapäivään ja alemman johtimen magneettikentän suunta on myötäpäivään. Näin ollen pisteen P kohdalla alemman johtimen magneettikentän magneettivuon tiheys osoittaa oikealle yläviistoon ja vastaa- vasti ylemmän johtimen magneettikentän magneettivuon tiheys osoittaa oikealle alaviistoon, joten niiden vektorisumma, eli magneettivuon tiheys pisteessä P , osoittaa kuvassa oikealle.



1.7. Sekoitetaan kaksi kupillista 40-celsiusasteista vettä ja yksi kupillinen 10-celsiusasteista vettä astiaan. Mikä on veden lämpötila astiassa?

- ☐ 20 °C
- ☐ 25 °C
- ☒ 30 °C
- ☐ 70 °C
- ☐ 90 °C

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p
(14p)

Vettä, jonka lämpötila on $T_1 = 40\text{ °C}$, on kaksinkertainen massa verrattuna veteen, jonka lämpötila on $T_2 = 10\text{ °C}$. Merkitään 40-asteisen veden massaa $2m$:llä ja 10-asteisen veden massaa m :llä. Merkitään veden ominaislämpökapasiteettia c :llä. 40-asteinen vesi luovuttaa lämpöä 10-asteiselle vedelle kunnes kaikki vesi on samassa lämpötilassa. Luovutettu lämpömäärä on yhtä suuri kuin vastaanotettu lämpömäärä, joten

$$\begin{aligned}
 Q_L &= Q_V \\
 c \cdot 2m(T_1 - T) &= cm(T - T_2) \\
 2T_1 - 2T &= T - T_2 \\
 3T &= 2T_1 + T_2 \\
 T &= \frac{2T_1 + T_2}{3} \\
 T &= \frac{2 \cdot 40\text{ °C} + 10\text{ °C}}{3} \\
 T &= 30\text{ °C}.
 \end{aligned}$$

1.8. Kaksi samanmassaista, mutta eri materiaaleista valmistettua kappaletta A ja B ovat aluksi 80 °C:een lämpötilassa. Kumpikin kappale upotetaan eri astioihin, joissa on sama määrä huoneenlämpöistä vettä. Havaitaan, että kappaleen A ja veden loppulämpötila on 60 °C, ja kappaleen B ja veden loppulämpötila on 40 °C. Valitse tilannetta kuvaava oikea vaihtoehto.

- ☒ Kappaleesta A on siirtynyt enemmän energiaa kuin kappaleesta B.
- ☐ Kappaleesta A on siirtynyt vähemmän energiaa kuin kappaleesta B.
- ☐ Kappaleeseen A on siirtynyt enemmän energiaa kuin kappaleeseen B.
- ☐ Kappaleeseen A on siirtynyt vähemmän energiaa kuin kappaleeseen B.

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p
(16p)

Molempien kappaleiden lämpötila laskee, joten ne luovuttavat energiaa. Näin ollen kaksi viimeistä vaihtoehtoa ovat väärin. Vesi lämpenee sitä enemmän, mitä enemmän sille luovutetaan lämpöä. Kappaleen A ja veden loppulämpötila on korkeampi kuin kappaleen B ja veden loppulämpötila, joten kappale A luovutti enemmän energiaa vedelle kuin kappale A.

1.9. Kahdessa samanlaisessa kannellisessa astiassa on 3 litraa vettä. Astiat ovat huoneessa, jonka lämpötilaksi mitataan 25°C . Aluksi veden mitataan olevan astiassa A 55°C :n ja astiassa B 40°C :n lämpötilassa. Valitse tilannetta kuvaava oikea vaihtoehto.

- ☒ Astiassa A vesi jäähtyy aluksi nopeammin kuin astiassa B.
- ☐ Astiassa B vesi jäähtyy aluksi nopeammin kuin astiassa A.
- ☐ Vesi jäähtyy aluksi yhtä nopeasti molemmissa astioissa.

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p
(18p)

Ainoa ero astioiden välillä on se, että astian A lämpötila on korkeampi kuin astian B. Lämmönjohtumisteho on suoraan verrannollinen lämpötilaeroon, joten astiasta A siirtyy nopeammin lämpöä ympäristöön kuin astiasta B, eli astiassa A vesi jäähtyy aluksi nopeammin.

1.10. Tarkastellaan edelleen kohdan 1.9. tilannetta. Astioissa oleva vesi jatkaa jäähtymistä, ja vesien lämpötiloja mitataan jäähtymisen aikana. Valitse tilannetta kuvaava oikea vaihtoehto.

- ☐ Lämpötilan mittauksen mukaan astian A vesi saavuttaa 30°C :n lämpötilan ensin eli ennen astian B vettä.
- ☒ Lämpötilan mittauksen mukaan astian B vesi saavuttaa 30°C :n lämpötilan ensin eli ennen astian A vettä.
- ☐ Lämpötilan mittauksen mukaan molempien astioiden vedet saavuttavat 30°C :n lämpötilan samaan aikaan.
- ☐ Lämpötilan mittauksen mukaan astioissa oleva vesi ei koskaan saavuta 30°C :n lämpötilaa.

Oikea vastaus = 2p, väärä vastaus tai vastaamatta jättäminen = 0p.

2p
(20p)

Ympäristön lämpötila on 25°C ja astiat luovuttavat lämpöä kunnes lämpötilaero ympäristön kanssa on tasaantunut, joten ne kyllä saavuttavat 30°C lämpötilan, eli viimeinen vaihtoehto on väärin. Astian A alkulämpötila on korkeampi, joten kuluu jonkin aikaa ennenkuin astian A lämpötila on sama kuin astian B

lämpötila alkutilanteessa. Tästä hetkestä lähtien astian A lämpötila laskee samalla tavalla kuin astian B lämpötila laski alkuhetkestä lähtien, eli vaikka astian A lämpötila laskeekin aluksi nopeammin kuin astian B, astian A lämpötila ei saavuta astian B lämpötilaa, vaan astian B vesi saavuttaa lämpötilan 30 °C ensin.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2. Kaasulämpömittari (15 p.)

Kaasulämpömittari koostuu tiiviistä ilmasäiliöstä, joka on yhdistetty painemittariin kuvan 2.A esittämällä tavalla. Ilmasäiliö upotettiin eri lämpötiloissa oleviin vesihautteisiin, jolloin ilmanpaine säiliössä muuttui. Mittauksista saatiin tiedoston 2.B tulokset.

Aineisto:

2.A [Kuva: Kaasulämpömittari](#)

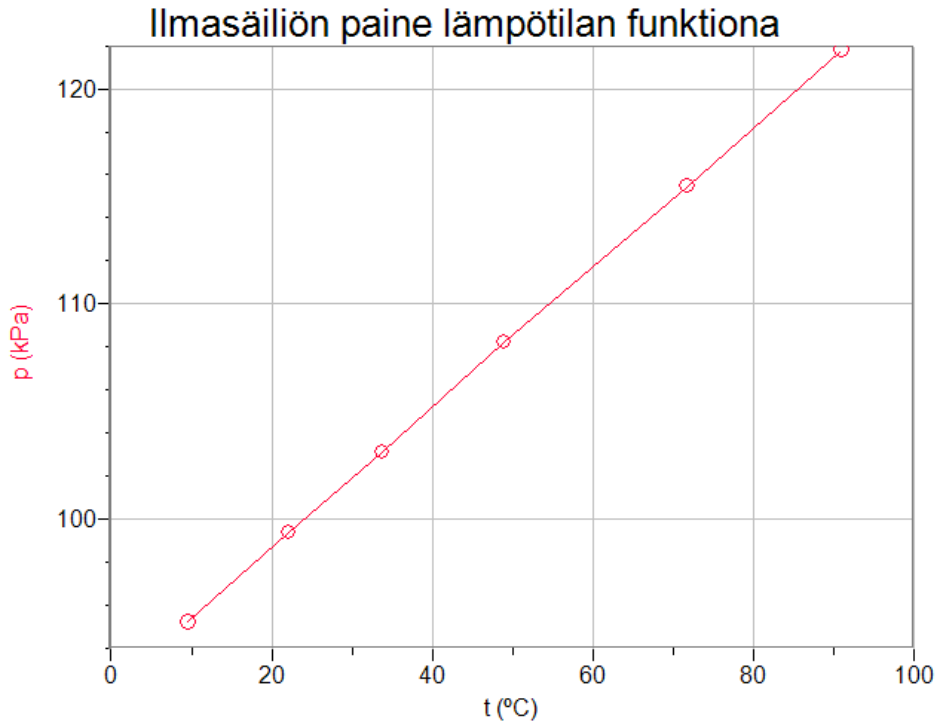
2.B [Tiedosto: Mittaustulokset](#)

- 2.1. Piirrä valitsemallasi ohjelmalla kuvaaja ilmasäiliössä vallitsevasta paineesta lämpötilan funktiona. (5 p.)
- 2.2. Kaasulämpömittarilla voidaan määrittää lämpötila painetta mittaamalla. Kaasulämpömittari vietiin ulos eräänä talvipäivänä, jolloin painemittari asettui näyttämään arvoa 88,2 kPa. Mikä oli ulkona vallitseva lämpötila? (5 p.)
- 2.3. Ideaalikaasun paine lähestyy nollaa, kun kaasun lämpötila lähestyy absoluuttista nollapistettä. Arvioi tällä laitteella tehtyjen mittausten perusteella, kuinka suuri olisi celsiusasteina ilmaistu lämpötila absoluuttisessa nollapisteessä. Lämpötilan vaikutus säiliön tilavuuteen oletetaan vähäiseksi. (5 p.)

Ratkaisu.

Huom! Tässä tehtävässä on käytetty kuvaajan piirtämiseen ja analysointiin Logger Pro:ta, mutta mitä tahansa Abitista löytyvää tarkoitukseen sopivaa ohjelmaa voi käyttää.

2.1.

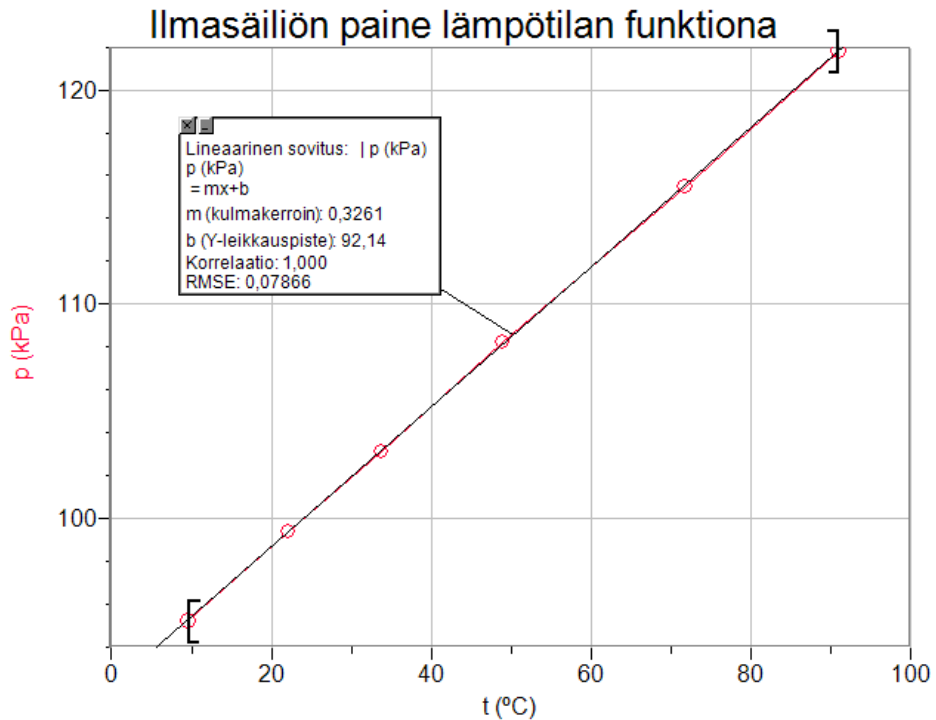


5p

Pisteytyksestä:

- Mittauspisteet eivät ole näkyvissä = -1p,
- Suure tai yksikkö puuttuu akseleilta = -1p,
- Mitta-asteikko puuttuu akseliilta = -1p.

2.2. Oletetaan ilman käyttäytyvän likimain ideaalikaasun tavoin. Tilavuus pysyy likimain vakiona, joten paineen kuvaajan lämpötilan funktiona pitäisi olla suora. Sovitetaan mittaustuloksiin suora ja selvitetään sen yhtälö.



1p

Suoran

$$p = kt + b$$

fysikaaliseksi kulmakertoimeksi ja vakiotermiksi saadaan

$$k = 0,3261 \frac{\text{kPa}}{^{\circ}\text{C}}$$

$$b = 92,14 \text{ kPa.}$$

1p(2p)

Kulmakertoimen ja vakiotermin numeroiden määrä riippuu käytetystä ohjelmasta ja ohjelman asetuksista. Neljä numeroa on tässä riittävä tarkkuus, mutta ei ole virhe esittää niitä tarkemmin. Myös eri ohjelmien antamat arvot voivat poiketa hieman toisistaan, minkä seurauksena laskelmien pyöristämättömien tulosten desimaalit voivat erota hieman riippuen käytetystä ohjelmasta.

Ratkaistaan, missä lämpötilassa $p = 88,2 \text{ kPa}$.

$$p = kt + b$$

$$t = \frac{p - b}{k}$$
 1p(3p)

$$t = -12,082 \dots ^\circ\text{C}$$

$$t \approx -12,1 ^\circ\text{C}.$$

Vastaus: Ulkona vallitseva lämpötila oli $-12,1 ^\circ\text{C}$. 2p(5p)

Mittaustuloksissa oli yksi lämpötila kahdella merkitsevällä numerolla annettuna, joten perustellusti voitaisiin pyöristää myös arvoon $-12 ^\circ\text{C}$.

2.3. Ratkaistaan lämpötila t kohdassa 2.2. johdetusta suoran yhtälöstä, kun $p = 0 \text{ kPa}$.

$$p = kt + b$$

$$0 = kt + b$$

$$t = \frac{-b}{k}$$
 2p

$$t = -282,551 \dots ^\circ\text{C}$$

$$t \approx -283 \dots ^\circ\text{C}.$$

Vastaus: Laitteella tehtyjen mittausten perusteella saadaan arvioksi absoluuttisen nollapisteen lämpötilasta $-283 ^\circ\text{C}$. 3p(5p)

Mittaustuloksissa oli yksi lämpötila kahdella merkitsevällä numerolla annettuna, joten perustellusti voitaisiin pyöristää myös arvoon $-280 ^\circ\text{C}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

3. Ledilamppu autossa (15 p.)

Punaisen ledilampun kynnyisjännite on $1,7\text{ V}$. Lamppu ei pala, jos sen jännite on alle kynnyisjännitteen. Oletetaan, että jännite ledin yli ei muutu, kun sähkövirta on suurempi kuin 15 mA . Lediä käytetään tavallisesti $20,0\text{ mA}$:n päästövirralla. Ledi suojataan liian suurelta sähkövirralta kytkemällä ledin kanssa sarjaan sopiva etuvastus.

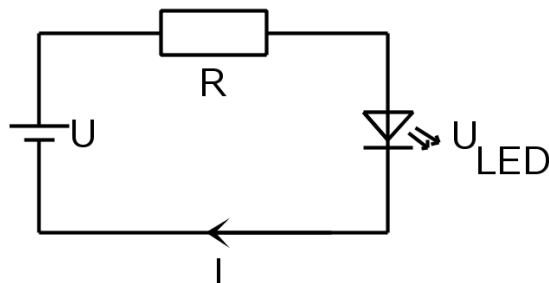
Aineisto:

3.A [Kuva: Ledilamppujen kytkentä kohdassa 3.3.](#)

- 3.1. Ledilamppu on liitetty auton 12 V :n pistokkeeseen (tupakansytyttimeen). Pistokkeesta saatava jännite on $14,4\text{ V}$ auton ollessa käynnissä. Laske, kuinka suuri ledin kanssa sarjaan kytketyn etuvastuksen resistanssin tulee vähintään olla, että ledin sähkövirta on $20,0\text{ mA}$. (6 p.)
- 3.2. Auton pistokkeesta saatavassa jännitteessä voi esiintyä hetkellisiä piikkejä. Kuinka korkean jännitepiikin ledilamppu enintään kestää rikkoutumatta, kun etuvastuksen resistanssi on $830\ \Omega$ ja ledi rikkoutuu yli $30,0\text{ mA}$:n sähkövirralla? (3 p.)
- 3.3. Käynnissä olevan auton pistokkeen jännite on $14,4\text{ V}$. Pistokkeeseen kytketään kahden punaisen ledin muodostama lamppu, jossa ledit on kytketty rinnan. Molemmilla ledeillä on yhteinen etuvastus kuvan 3.A mukaisesti. Ledin kynnyisjännite on edelleen $1,7\text{ V}$, ja ledin sähkövirta on $20,0\text{ mA}$. Mikä on etuvastuksen resistanssin oltava tässä tapauksessa? (6 p.)

Ratkaisu.

3.1



Pistokkeesta saadaan $U = 14,4$ voltin jännite. Koska tehtävän tilanteessa ledin läpi kulkeva virta $I = 20\text{ mA}$ on suurempi kuin 15 mA :n virta, ledin yli oleva

jännite on yhtä suuri kuin ledin kynnysjännite eli $U_{\text{LED}} = 1,7 \text{ V}$. Kirchhoffin II:n lain mukaan

1p

$$U - RI - U_{\text{LED}} = 0$$

2p(3p)

$$R = \frac{U - U_{\text{LED}}}{I}$$

1p(4p)

$$= 635 \Omega$$

$$\approx 640 \Omega$$

Vastaus: Etuvastuksen resistanssin on oltava 640 ohmia.

2p(6p)

3.2 Ledin rikkoutumiseen vaaditaan $I = 30 \text{ mA}$:n virta ja etuvastuksen suuruus on nyt 830Ω . Ledin jännitehäviö on edelleen kynnysjännitteen suuruinen. Piiri on sama kuin kohdassa 3.1, joten piiristä muodostettu Kirchhoffin II:n lain mukainen yhtälökin on sama. Ratkaistaan siitä pistokkeesta saatava jännite rajatapauksessa.

$$U - RI - U_{\text{LED}} = 0$$

$$U = RI + U_{\text{LED}}$$

1p

$$= 26,6 \text{ V}$$

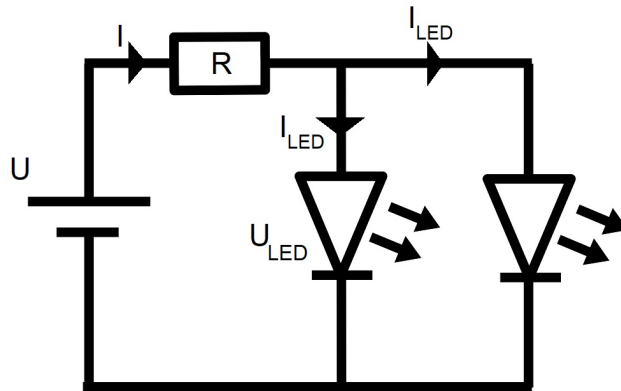
$$\approx 26 \text{ V}$$

Vastaus: Ledi kestää enintään 26 voltin suuruisen jännitepiikin.

2p

Huom! Pyöristys tehtiin alaspäin, koska kysyttiin ledin kestämän jännitepiikin ylärajaa. Myös pyöristys normaalin säännön mukaisesti arvoon 27 V melko varmasti hyväksytään, sillä YTL:n hyvän vastauksen piirteissä pyöristys oli tehty näin.

3.3



Etuvastuksen läpi kulkeva virta jakautuu tasan rinnankytketyille ledeille. Koska molempien ledien läpi kulkee $I_{\text{LED}} = 20,0 \text{ mA}$:n virta, etuvastuksen läpi kulkevan virran suuruus on Kirchhoffin I:n lain mukaan $I = 20,0 \text{ mA} + 20,0 \text{ mA} = 40,0 \text{ mA}$.

2p

Toisaalta pistokkeen jännite on $U = 14,4 \text{ V}$ ja ledien jännitehäviö on edelleen kynnysjännitteen suuruinen $U_{\text{LED}} = 1,7 \text{ V}$. Ratkaistaan etuvastuksen resistanssi. Piirin vasemmanpuoleisesta silmukasta saadaan Kirchhoffin II:n lain nojalla yhtälö

$$U - RI - U_{\text{LED}} = 0$$

1p(3p)

$$R = \frac{U - U_{\text{LED}}}{I}$$

1p(4p)

$$= 317,5 \Omega$$

$$\approx 320 \Omega$$

Vastaus: Etuvastuksen resistanssin on oltava 320 ohmia.

2p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

4. Mäenlaskua (15 p.)

Hiihtäjä lähtee laskemaan 7,5 m korkean mäen harjalta työntämättä itselleen alkuvauhtia. Mäen kulma vaakatasoon suhteen on α (ks. kuva 4.A). Suksen ja lumen välinen liukukitkakerroin on 0,11. Ilmanvastus voidaan jättää huomioimatta.

Aineisto:

4.A [Kuva: Hiihtäjä](#)

4.1. Kuinka suuri hiihtäjän vauhti on mäen lopussa, kun $\alpha = 14^\circ$? (7 p.)

4.2. Hiihtäjä lähtee liukumaan mäkeä alas, mikäli mäen kulma on 9° tai enemmän. Piirrä kuvaaja hiihtäjän tasamaalla liukumasta matkasta mäen kulman α funktiona välillä $9^\circ \dots 45^\circ$. (8 p.)

Ratkaisu.

$$h = 7,5 \text{ m}$$

mäen korkeus

$$\mu = 0,11$$

kitkakerroin

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

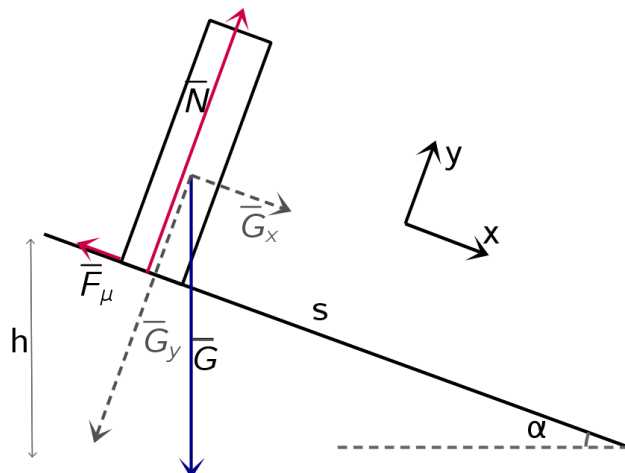
$$s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

rinteen pituus

m

hiihtäjän massa

4.1. Mäen kaltevuus on $\alpha = 14^\circ$



Hiihtäjään vaikuttaa maan painovoima G , mäen tukivoima N ja lumen ja sukien välinen liukukitka F_μ . Rinnettä vastaan kohtisuorassa suunnassa hiihtäjän kiihtyvyys on nolla, joten Newtonin toisen lain perusteella 2p

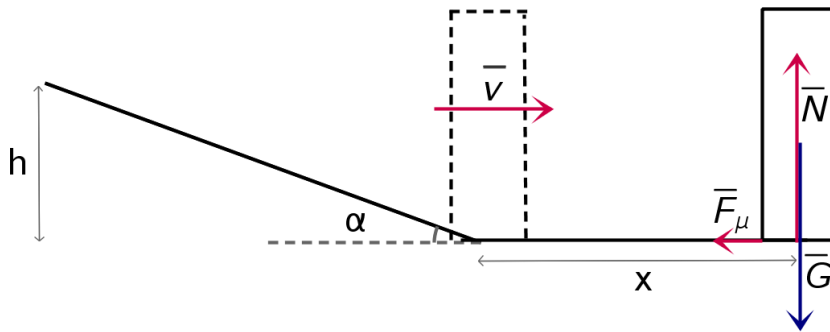
$$\begin{aligned}\Sigma \overline{F}_y &= m\overline{a}_y \\ \overline{G}_y + \overline{N} &= \overline{0} \\ -G_y + N &= 0 \\ N &= G_y \\ N &= mg \cos \alpha\end{aligned}\quad (1)$$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan kitkavoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin hiihtäjän mekaanisen energian muutos. Hiihtäjä lähtee levosta, joten alussa hiihtäjällä on vain potentiaalienergiaa. Asetetaan potentiaalienergian nolataso mäen alareunan tasolle, jolloin hiihtäjällä on mäen lopussa vain liikeenergiaa. Kitkavoiman tekemä työ on negatiivinen.

$$\begin{aligned}W &= \Delta E \\ W &= E_l - E_a \\ -F_\mu \cdot s &= \frac{1}{2}mv^2 - mgh \quad \text{1p(3p)} \\ -\mu N s &= \frac{1}{2}mv^2 - mgh \quad \parallel \text{ sij. (1) ja } s = \frac{h}{\sin \alpha} \\ -\mu mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} &= \frac{1}{2}mv^2 - mgh \quad \parallel : m \quad \text{2p(5p)} \\ v &= (\pm) \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)} \quad (2) \quad \text{1p(6p)} \\ v &= 9,06804 \dots \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v &\approx 9,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{1p(7p)}\end{aligned}$$

Vastaus: Hiihtäjän vauhti mäen lopussa on $9,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.2.



Kuvaa ei vaadita ratkaisuun. Se on piirretty vain selkeyden vuoksi.

Kun hiihtäjä liukuu tasamaalla mäen jälkeen, häneen vaikuttaa maan painovoima G , maan tukivoima N_2 ja suksien ja lumen välinen kitkavoima $F_\mu = \mu N_2$. Pystysuunnassa hiihtäjän kiihtyvyys on nolla, joten Newtonin toisen lain mukaan

1p

$$N_2 - G = 0$$

$$N_2 = mg$$

Merkitään x :llä hiihtäjän tasamaalla liukumaa matkaa. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan kitkavoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin hiihtäjän mekaanisen energian muutos

$$-W = E_l - E_a$$

$$-\mu N_2 x = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$\mu mgx = \frac{1}{2}mv^2 \quad \parallel : m$$

2p(3p)

$$\mu gx = \frac{1}{2}v^2 \quad \parallel \text{ sij. (2)}$$

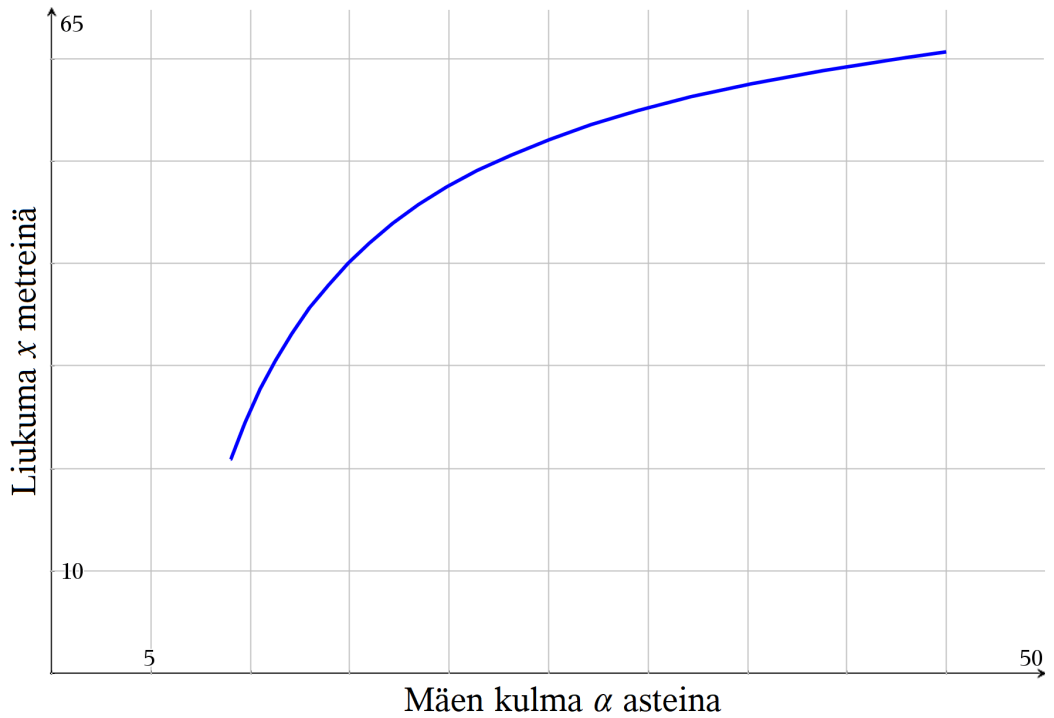
$$\mu gx = \frac{1}{2} \cdot 2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right) \quad \parallel : \mu g$$

2p(5p)

$$x = \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)$$

1p(6p)

Piirretään funktion $x(\alpha)$ kuvaaja, kun $9^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$



2p(8p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

5. Kitaran kieli (15 p.)

Kuvaaja 5.A esittää äänen taajuuksia, joilla kitaran A-sävelen kieli soi. Alin taajuus vastaa värähtelyä, jossa kielen keskellä on yksi kupu ja kielen päissä on solmut. Kielen soivan osan pituus on 65,5 cm.

Aineisto:

5.A Kuvaaja: Kitaran A-kielen äänen taajuudet

- 5.1. Kuinka suurella nopeudella aalto etenee A-kielessä? (5 p.)
- 5.2. Kitaraa viritettäessä kielen jännitysvoimaa muutetaan, kunnes kieli soi halutulta korkeudelta. Kun kieltä kiristetään, äänen kuultu korkeus nousee ja myös kielen värähtelyn taajuus nousee. Mitä kielessä etenevän aallon nopeudelle tapahtuu, kun kielen jännitysvoima kasvaa? Kasvaako aallon nopeus, pieneneekö se, vai pysyykö se vakiona? Perustele vastauksesi. (4 p.)
- 5.3. Kuvaajasta 5.A nähdään, että A-kieli soi alimman taajuuden lisäksi usealla korkeammalla taajuudella. Millaista aaltoliikettä nämä ylätaajuudet vastaavat? Esiitä suureyhtälö, josta ylätaajuuksien arvot määräytyvät. (6 p.)

Ratkaisu.

- 5.1. Kielen pituus on $L = 65,5 \text{ cm}$. Kuvaajasta saadaan luettua, että A-kielen alin taajuus on

$$f_1 = 110 \text{ Hz.} \quad \text{1p}$$

Alin taajuus vastaa värähtelyä, jossa kielessä on yksi kupu ja kielen päissä on solmut. Tällöin siis aallonpituus on kaksi kertaa kielen pituus, eli

$$\lambda_1 = 2L \quad (1) \quad \text{2p(3p)}$$

Lasketaan aallon nopeus A-kielessä aaltoliikkeen perusyhtälöllä:

$$v = f_1 \lambda_1$$

Sijoitetaan (1).

$$v = f_1 \cdot 2L$$

$$v = 144,1 \text{ m/s}$$

$$v \approx 144 \text{ m/s.}$$

Vastaus: Aallon nopeus A-kielessä on 144 m/s. 2p(5p)

- 5.2. Kun kieltä kiristetään, kielen pituus pysyy silti samana, eli kielen tiettyä taajuutta (esimerkiksi alin taajuus) vastaava aallonpituus pysyy siis samana. Tämä taajuus kuitenkin kasvaa kieltä kiristettäessä, joten aaltoliikkeen perusyhtälön

2p

$$v = f\lambda$$

perusteella kielessä etenevän aallon nopeus kasvaa.

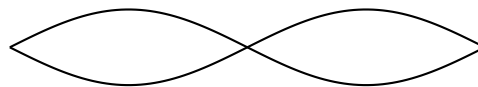
2p(4p)

Lisäselitys: Mekaanisen aallon nopeus riippuu väliaineesta kahdella tavalla. Mitä tiheämpää aine on, sitä hitaammin aine värähtelee, ja sitä hitaammin mekaaninen aalto etenee. Toisaalta mitä jäykempää aine on, sitä nopeammin aine värähtelee, ja sitä nopeammin mekaaninen aalto etenee. Kitaran kieltä kiristettäessä kielen tiheys pysyy likimain samana (ei täsmälleen, koska kieli venyy hieman), ja kieli kiristyy, eli tulee jäykemmäksi. Tästä johtuen aallon nopeus kielessä kasvaa kieltä kiristettäessä.

- 5.3. Kieleen voi muodostua erilaisia seisovia aaltoja, joilla on solmukohdat kielen päissä. Kielen keskellä voi olla yksi, kaksi tai useampia kupuja. Kuvaajassa näkyvät ylätaajuuudet $f_2 = 220$ Hz, $f_3 = 330$ Hz ja $f_4 = 440$ Hz vastaavat tilanteita, joissa kielessä on kaksi, kolme ja neljä kupua vastaavasti.

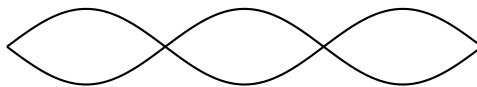
4p

$f_2 = 220$ Hz:



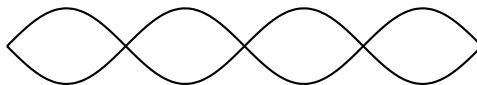
$$\lambda = L$$

$f_3 = 330$ Hz:



$$\lambda = \frac{2}{3}L$$

$f_4 = 440$ Hz:



$$\lambda = \frac{2}{4}L$$

Yllä olevat kuvat eivät ole välttämättömät ratkaisussa.

Ylätaajuuksien aallonpituudet saa siis kaavasta

$$\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L.$$

Aallon nopeus on sama ylätaajuuksille ja perustaajuudelle f_1 , joten aaltoliikkeen perusyhtälön avulla saadaan

$$f_1 \lambda_1 = f_n \lambda_n$$

$$f_1 \cdot 2L = f_n \cdot \frac{2}{n} \cdot L$$

$$f_n = n f_1.$$

2p(6p)

- Yllä oleva kaava on kerrottu oppikirjoissa, joten voit myös kirjoittaa sen ulkomuistista johtamisen sijaan.
- Tehtävänannossa ei täsmennetty, minkä suureiden avulla ilmaistuna suuryhtälö täytyy kirjoittaa. Vastaukseksi pitäisi käydä myös esimerkiksi $f_n = nv/2L$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

6. Heiluri magneettikentässä (15 p.)

Videolla 6.A näytetään kaksi toisiinsa liittyvää koetta. Vastaa videon pohjalta tehtäviin 6.1.–6.3.

Aineisto:

6.A [Video: Kokeet alumiinilevyllä ja magneetilla](#)

- 6.1. Kuvaile videolla 6.A esitetyt kokeet ja kerro, mitkä ovat koeasetelman osat, mitä kokeissa tehdään ja mitä havaitset kokeissa tapahtuvan. Tässä osatehtävässä ei tarvitse vielä selittää ilmiötä. (5 p.)
- 6.2. Mistä ilmiöstä tai ilmiöistä kokeissa on kyse? Mitä tapahtuisi, jos metallisen levyn sijasta käytettäisiin muovilevyä? (5 p.)
- 6.3. Selitä, mistä kokeissa havaitut erot johtuvat tarkastelemalla vastauksessasi voimia tai energiaa. (5 p.)

Ratkaisu.

- 6.1. Kokeessa 1 on T-kirjaimen muotoinen alumiinilevy, joka on ripustettu roikkumaan vaakasuoraan akseliin. Kokeessa 2 on näiden lisäksi C-kirjaimen muotoinen magneetti. _____

1p

Alumiinilevyä poikkeutetaan tasapainoasemasta nostamalla sen alapäätä. Se päästetään irti siten, että alumiinilevy alkaa heilahdella levyn pinnan suuntaisesti akselin varassa. Kokeessa havaitaan alumiinilevyn heilahtelun vaimenevan hyvin pieneksi **noin 30 sekunnissa**. _____

2p(3p)

Kokeessa 2 on muuten sama asetelma kuin kokeessa 1, mutta c-kirjaimen muotoinen magneetti asetetaan siten, että alumiinilevy heilahtelee magneetin napojen välistä. Kokeessa havaitaan alumiinilevyn heilahtelun vaimenevan lähes täysin **noin kolmessa sekunnissa**. Koe 2 toistetaan yhteensä kolmesti silmin nähtäen samoin lopputuloksin. _____

2p(5p)

- 6.2. Kokeessa 1 alumiinilevy joutuu heiluriliikkeeseen painovoiman ja akselin tukivoiman vaikutuksesta, ja heilahtelu hidastuu akselin ja levyn välisen kitkan vaikutuksesta. _____

1p

Kokeessa 2 yllä mainitun lisäksi sähköä johtavaan alumiinilevyyn indusoituu pyörrivirtoja sen kulkiessa magneetin napojen välissä olevan magneettikentän läpi ja tämän seurauksena heilahtelu hidastuu nopeammin. _____

2p(3p)

Jos alumiinilevyn sijaan käytettäisiin muovilevyä, magneetti ei vaikuttaisi levyn heilahteluun käytännössä lainkaan, sillä muovi on eristemateriaalia, joten siihen ei muodostu pyörrevirtoja. _____

2p(5p)

6.3.

VAIHTOEHTO 1: VOIMIEN AVULLA

Kokeessa 1 alumiinilevyn heilahtelua jarruttaa vain levyn ja akselin välinen pieni kitkavoima, minkä seurauksena heilahtelu jarruuntuu, mutta jatkuu varsin pitkään. Tätä ei vaadittu pisteiden saamiseksi.

Kokeessa 2 alumiinilevyyn heilahtaessa magneetin levyjen välistä magneettikentän läpi levyyn syntyy sähkömagneettisen induktion seurauksena pyörrevirtoja. Pyörrevirrat ovat alumiinin vapaiden elektronien liikettä. _____

2p

Tämän seurauksena levyn elektroneihin kohdistuu magneettinen voima, jonka suunta on levyn nopeuden kanssa vastakkainen. _____

2p(4p)

Magneettinen voima siis jarruttaa levyä aina sen kulkiessa magneetin napojen välistä. _____

1p(5p)

Magneettinen voima jarruttaa levyn heilahtelua merkittävästi voimakkaammin kuin kitka, mistä johtuen kokeessa 2 heilahtelu pysähtyy paljon nopeammin kuin kokeessa 1. Tätä ei vaadittu pisteiden saamiseksi.

VAIHTOEHTO 1: ENERGIAN AVULLA

Kokeessa 1 alumiinilevyn ja akselin välinen pieni kitka muuttaa alumiinilevyn mekaanista energiaa lämmöksi, minkä seurauksena alumiinilevyn heilahtelu pienenee, mutta jatkuu varsin pitkään. Tätä ei vaadittu pisteiden saamiseksi.

Kokeessa 2 alumiinilevyyn heilahtaessa magneetin levyjen välistä magneettikentän läpi levyyn syntyy sähkömagneettisen induktion seurauksena pyörrevirtoja. _____

1p

Sähkövirran lämpövaikutuksen seurauksena alumiinilevy lämpenee. _____

1p(2p)

Vuorovaikutus magneetin kanssa siis aiheuttaa pyörrevirrat, ja sen seurauksena alumiinilevyn mekaanista energiaa muuttuu levyssä lämmöksi ja levyn heilahtelu jarruuntuu. _____

3p(5p)

Pyörrevirtojen jarruttava vaikutus on merkittävästi suurempi kuin kitkan, mistä johtuen kokeessa 2 heilahtelu pysähtyy paljon nopeammin kuin kokeessa 1. Tätä ei vaadittu pisteiden saamiseksi.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

7. Beetahajoaminen (15 p.)

Kuva 7.A esittää kolmen β^+ -aktiivisen isotoopin lähettämää säteilyspektriä. Taulukossa 7.B on tietoa näistä isotoopeista.

Aineisto:

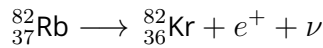
7.A [Kuva: \$\beta^+\$ -aktiivisten isotooppien säteilyspektrit](#)

7.B [Taulukko: Tietoa isotoopeista](#)

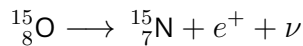
- 7.1. Kuvassa 7.A on esitetty ^{82}Rb -, ^{15}O - ja ^{18}F -isotooppien säteilyspektrit. Valitse yksi isotoopeista ja kirjoita sen hajoamisyhtälö. (4 p.)
- 7.2. Laske valitsemasi ytimen beetahajoamisessa vapautuva energia. Vertaa sitä kuvan 7.A säteilyspektriin. (7 p.)
- 7.3. Miksi β^+ -aktiivisten aineiden säteilyspektrit ovat jatkuvia? (4 p.)

Ratkaisu.

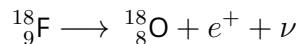
7.1



TAI



TAI



4p

Huom! Tehtävässä pyydettiin vain yhden isotoopin hajoamisyhtälö!

Kun ydin β^+ -hajoaa, ytimessä oleva protoni muuttuu neutroniksi ja samalla emittoituu β^+ -hiukkanen eli positroni e^+ ja neutriino ν . Ytimen järjestysluku pienenee yhdellä ja sen massaluku säilyy. Järjestysluku pienenee, koska protoni muuttuu neutroniksi.

- 7.2 Beeta-hajoamisessa vapautuva energia on yhtä suuri kuin reaktion massaeroa Δm vastaava energia $E = \Delta mc^2$. Reaktion massaero on emoytimen ja reaktiotuotteiden massojen erotus. Neutriinon massa on niin pieni, että sitä ei tarvitse huomioida.

TAPAUS 1: ^{82}Rb

$$m_{\text{atomi}}(^{82}\text{Rb}) = 81,918\,209\,\text{u}$$

$$m_{\text{atomi}}(^{82}\text{Kr}) = 81,913\,482\,\text{u}$$

$$m_e = 5,458\,7991 \cdot 10^{-4}\,\text{u}$$

Lasketaan reaktion massaero. Positronin massa on yhtä suuri kuin elektronin massa, eli $m_{e^+} = m_e$. Taulukossa olevat massat ovat atomien massoja. Niistä saadaan laskettua ytimen massalle hyvä arvio vähentämällä atomin massasta sen elektronien massat.

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_{\text{ydin}}(^{82}\text{Rb}) - (m_{\text{ydin}}(^{82}\text{Kr}) + m_{e^+}) \\ &= [m_{\text{atomi}}(^{82}\text{Rb}) - 37 \cdot m_e] - [m_{\text{atomi}}(^{82}\text{Kr}) - 36 \cdot m_e + m_e] \\ &= m_{\text{atomi}}(^{82}\text{Rb}) - m_{\text{atomi}}(^{82}\text{Kr}) - 2m_e \\ &= 0,00362984018\,\text{u}.\end{aligned}$$

3p

Massaeroa vastaava energia on

$$\begin{aligned}Q &= \Delta m \cdot 931,494\,32 \frac{\text{MeV}}{c^2} \\ &= 3,38117469408\,\text{MeV} \\ &\approx 3,381\,\text{MeV}.\end{aligned}$$

2p(5p)

Vastaus: ^{82}Rb -ytimen beetahajoamisessa vapautuu 3,381 MeV energiaa. Tämä on lähellä kuvasta 7.A luettavaa positronin maksimienergiaa.

2p(7p)

TAPAUS 2: ^{15}O

$$m_{\text{atomi}}(^{15}\text{O}) = 15,003\,065\,\text{u}$$

$$m_{\text{atomi}}(^{15}\text{N}) = 15,000\,108\,\text{u}$$

$$m_e = 5,458\,7991 \cdot 10^{-4}\,\text{u}$$

Lasketaan reaktion massaero:

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_{\text{ydin}}(^{15}\text{O}) - (m_{\text{ydin}}(^{15}\text{N}) + m_{e^+}) \\ &= [m_{\text{atomi}}(^{15}\text{O}) - 8 \cdot m_e] - [m_{\text{atomi}}(^{15}\text{N}) - 7 \cdot m_e + m_e] \\ &= m_{\text{atomi}}(^{15}\text{O}) - m_{\text{atomi}}(^{15}\text{N}) - 2m_e \\ &= 0,00185984018\,\text{u}.\end{aligned}$$

3p

Massaeroa vastaava energia on

$$Q = \Delta m \cdot 931,494\,32 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$= 1,73243014563 \text{ MeV}$$

$$\approx 1,732 \text{ MeV.}$$

2p(5p)

Vastaus: ^{15}O -ytimen beetahajoamisessa vapautuu 1,732 MeV energiaa. Tämä on lähellä kuvasta 7.A luettavaa positronin maksimienergiaa.

2p(7p)

TAPAUS 3: ^{18}F

$$m_{\text{atomi}}(^{18}\text{F}) = 18,000\,937 \text{ u}$$

$$m_{\text{atomi}}(^{18}\text{O}) = 17,999\,1594 \text{ u}$$

$$m_e = 5,458\,7991 \cdot 10^{-4} \text{ u}$$

Lasketaan reaktion massaero:

$$\Delta m = m_{\text{ydin}}(^{18}\text{F}) - (m_{\text{ydin}}(^{18}\text{O}) + m_{e+})$$

$$= [m_{\text{atomi}}(^{18}\text{F}) - 9 \cdot m_e] - [m_{\text{atomi}}(^{18}\text{O}) - 8 \cdot m_e + m_e]$$

$$= m_{\text{atomi}}(^{18}\text{F}) - m_{\text{atomi}}(^{18}\text{O}) - 2m_e$$

$$= 0,00068044018 \text{ u.}$$

3p

Massaeroa vastaava energia on

$$Q = \Delta m \cdot 931,494\,32 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$= 0,633826009786 \text{ MeV}$$

$$\approx 0,6338 \text{ MeV.}$$

2p(5p)

Vastaus: ^{18}F -ytimen beetahajoamisessa vapautuu 0,6338 MeV energiaa. Tämä on lähellä kuvasta 7.A luettavaa positronin maksimienergiaa.

2p(7p)

Huom! Tehtävässä pyydettiin vain yhden isotoopin hajoamisessa vapautuva energia!

Hyvän vastauksen piirteissä tehtävän vastaukset on pyöristetty neljän merkitsevän numeron tarkkuuteen. Välivaiheessa laskettu massaero tiedetään vain miljoonasosan tarkkuudella, joten rubidiumin ja hapen hajoamisreaktioiden tapauksessa tämä tarkoittaisi neljää merkitsevää numeroa ja fluorin tapauksessa kolmea. Kaikki pyöristykset kolmen ja kahdeksan merkitsevän numeron tarkkuuden väliltä luultavasti hyväksytään.

7.3 β^+ -hajoamisessa vapautuu yhteensä kolme hiukkasta, tytärydin, β^+ -hiukkanen eli positroni sekä elektronin neutriino. Hajoamisessa vapautuva energia muuttuu näiden kolmen hiukkasen liike-energiaksi. _____

2p

Hiukkasten saaman liike-energian jakautuminen vaihtelee, minkä takia β^+ -hiukkasen saaman liike-energian määrä ei ole vakio vaan voi vaihdella nollan ja hajoamisessa vapautuvan energian välillä. _____

2p(4p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

8. Rehun radioaktiivisuus (15 p.)

Erästä tutkimuslaitoksesta pääsee ympäristöön laboratorio-onnettomuuden yhteydessä ^{60}Co -isotooppia, joka leviää tasaisesti läheiselle pellolle. Laskeuma jää maaperän pintakerrokseen, ja välittömästi onnettomuuden jälkeen pellolla mitataan aktiivisuudeksi 50 kBq/m^2 .

- 8.1. Pellon pinta-ala on 2 ha. Laske, kuinka monta grammaa ^{60}Co -isotooppia pellolle laskeutui. (6 p.)
- 8.2. Pellolla kasvatetaan heinää, josta tehdään rehua vuoden kuluttua onnettomuudesta. Oletetaan, että rehuun on siirtynyt 30 % maaperän ^{60}Co -isotoopin aine määrästä. Rehua tulee 10 m^3 . Laske kuinka suuri on 3 litran rehuannoksen aktiivisuus silloin, kun rehu valmistetaan. (4 p.)
- 8.3. Lamma syö 3 litran annoksen ^{60}Co -pitoista rehua. Lampaaseen joutunut radioaktiivinen aine jakautuu aineenvaihdunnan seurauksena lampaan elimistöön. ^{60}Co -isotoopin kokonaispoistumaa lampaan elimistöstä voidaan mallintaa kuten radioaktiivista hajoamista käyttämällä efektiivistä puoliintumisaikaa T_e , joka saadaan yhtälöstä

$$\frac{1}{T_e} = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_b}.$$

Efektiivinen puoliintumisaika sisältää kaikki ne tekijät, jotka vaikuttavat aineen vähenemiseen elimistöstä: T_f on ^{60}Co -isotoopin fysikaalinen radioaktiivisen hajoamisen puoliintumisaika ja T_b sen biologinen puoliintumisaika = 10 d. Laske, kauanko kestää, että lampaan saaman ^{60}Co -isotoopin aktiivisuus on vähentynyt sadasosaan rehusta saatuun aktiivisuuteen verrattuna. (5 p.)

Ratkaisu.

- 8.1 Koboltti-60:n aktiivisuus on neliömetrillä on $A = 50 \text{ kBq}$. Ratkaistaan yhdelle neliömetrille laskeutuneiden koboltti-60-atomien lukumäärä kun koboltti-60:n puoliintumisaika on $T_{1/2} = 5,272 \text{ a}$:

$$\begin{aligned} N &= \frac{A}{\lambda} \\ &= \frac{A}{\frac{\ln(2)}{T_{1/2}}} \\ &= 1,200 \dots \cdot 10^{13} \frac{\text{kpl}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

1p

Pellon pinta-ala on $A_{\text{kok}} = 2 \text{ ha}$. Koko pellolla on koboltti-60-atomeita yhteensä

$$N_{\text{tot}} = N \cdot A_{\text{kok}} \quad \text{1p(2p)}$$

$$= 2,400 \dots \cdot 10^{17} \text{ kpl}$$

Koboltti-60:n moolimassa on $M = 59,933\,819 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ ja Avogadron luku on $N_A = 6,022\,1415 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$. Pellolle laskeutuneen koboltti-60:n massa saadaan yhtälöstä

$$m = n \cdot M$$

$$= \frac{N_{\text{tot}}}{N_A} \cdot M \quad \text{2p(4p)}$$

$$= 2,388 \dots \cdot 10^{-5} \text{ g}$$

$$\approx 20 \mu\text{g}$$

Vastaus: Pellolle laskeutui 20 μg koboltti-60-isotooppia. 2p(6p)

Myös vastaus 24 μg hyväksytään.

8.2 Koko pellolle levinneen koboltti-60:n aktiivisuus heti onnettomuuden jälkeen on

$$A_{\text{pelto}} = 50 \frac{\text{kBq}}{\text{m}^2} \cdot A_{\text{kok}}$$

$$= 1,0 \text{ GBq}$$

Vuoden kuluttua ($t = 1 \text{ a}$) pellolle levinneen koboltti-60:n aktiivisuus on

$$A = A_{\text{pelto}} e^{-\lambda t}$$

$$= A_{\text{pelto}} e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} t}$$

$$= 0,87679 \dots \text{ GBq} \quad \text{2p}$$

Aktiivisuus on suoraan verrannollinen ainemäärään. Rehun aktiivisuus on siis 30 % koko pellon aktiivisuudesta. Koko rehun aktiivisuus on siis

$$A_{\text{rehu}} = 0,30 \cdot A$$

$$= 0,26303 \dots \text{ GBq}$$

Rehua tulee yhteensä 10 m^3 . Kolmen litran rehuannoksen aktiivisuus on silloin

$$\begin{aligned} A_{\text{annos}} &= \frac{3 \ell}{10 \text{ m}^3} \cdot A_{\text{rehu}} \\ &= 78,9119 \dots \text{ kBq} \\ &\approx 80 \text{ kBq} \end{aligned}$$

Vastaus: Rehuannoksen aktiivisuus on 80 kBq. 2p(4p)

Myös vastaus 79 kBq hyväksytään.

- 8.3 Efektiivinen puoliintumisaika T_e riippuu biologisesta puoliintumisajasta $T_b = 10 \text{ d}$ ja fysikaalisesta puoliintumisajasta $T_f = T_{1/2} = 5,272 \text{ a}$. Ratkaistaan efektiivisen puoliintumisajan pituus laskinohjelmalla:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_e} &= \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_b} \\ T_e &= \frac{T_f T_b}{T_f + T_b} \\ &= 9,94833 \dots \text{ d} \end{aligned}$$
1p

Pisteytyksestä: T_e :n arvon laskeminen ei ole välttämätöntä. Tämän pisteen voi saada myös, kun sijoittaa ratkaistun T_e :n lausekkeen hajoamislakiin.

Lampaan saaman koboltti-60-isotoopin aktiivisuus vähenee hajoamislain

$$A = A_0 e^{-\lambda_e t}$$

mukaisesti, missä $\lambda_e = \frac{\ln(2)}{T_e}$. Ratkaistaan tästä, kuinka kauan kestää, että aktiivisuus on vähentynyt yhteen sadasosaan eli $A = 1/100 A_0$:

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{-\lambda_e t} \\ A &= A_0 e^{-\frac{\ln(2)}{T_e} t} \\ \frac{1}{100} A_0 &= A_0 e^{-\frac{\ln(2)}{T_e} t} \\ t &= \frac{2 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} T_e \\ t &= 66,0953 \dots \text{ d} \\ &\approx 70 \text{ d} \end{aligned}$$
2p(3p)

Vastaus: Lampaan saaman koboltti-60-isotoopin aktiivisuus on vähentynyt sadasosaan rehusta saatuun aktiivisuuteen verrattuna 70 päivän kuluttua. _____

2p(5p)

Myös vastaus 66 päivän kuluttua hyväksytään.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

9. Tuulivoimala (20 p.)

Aineisto:

9.A [Kuva: Enercon E70 -tuulivoimala](#)

9.B [Tiedosto: Enercon E70 -tuulivoimalan todellinen sähköteho tuulen nopeuden funktiona](#)

9.1. Mitä energian muuntumisia muodosta toiseen tuulivoimalassa tapahtuu? (5 p.)

9.2. Ilmavirran teholla tarkoitetaan pinnan läpi kulkevan ilman liike-energiaa aikayksikössä. Tuulen suuntaa vastaan kohtisuoran pinnan (pinta-ala A) läpi virtaavan ilmavirran teho noudattaa lakia

$$P_K = \frac{1}{2} \rho A v^3, \quad (1)$$

jossa ρ on ilman tiheys ja v on ilman nopeus. Johda laki (1) lähtien ilman liike-energian lausekkeesta. (4 p.)

9.3. Kun ilma virtaa tuulivoimalan turbiinin läpi, ilman nopeus pienenee. Voidaan osoittaa, että häviöttömällä turbiinilla ilmavirrasta saatava teho on

$$P_T = \frac{1}{4} \rho A (v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2), \quad (2)$$

jossa A on turbiinin pyyhkäisemä pinta-ala ja v_1 ja v_2 ovat ilman nopeudet ennen turbiinia ja sen jälkeen.

Edelleen Betzin lain mukaan turbiinin suurin teoreettisesti mahdollinen teho P_B saavutetaan, kun ilman nopeus pienenee turbiinissa yhteen kolmasosaan alkuperäisestä. Laske tuulivoimalan suurin teoreettinen hyötysuhde $\frac{P_B}{P_K}$. (3 p.)

9.4. Tiedostossa 9.B on esitetty Enercon E70 -tuulivoimalan (kuva 9.A) todellinen sähköteho P tuulen nopeuden funktiona. Voimalan turbiinin halkaisija on 71 m. Piirrä kuvaaja tuulivoimalan todellisesta hyötysuhteesta $\frac{P}{P_K}$ tuulen nopeuden funktiona nopeusalueella 1–25 m/s. Millä tuulen nopeuksilla todellinen hyötysuhde on yhtä suuri tai suurempi kuin 30 %? (8 p.)

Ratkaisu.

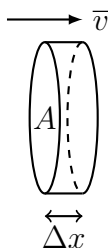
- 9.1. Tuulivoimalassa ilmapirta pyörittää turbiinia, joka edelleen pyörittää generaattorin roottoria. Ilmapirtauksen osuessa turbiinin siipiin osa ilman liike-energiasta muuttuu turbiinin (pyörimiseen liittyväksi) liike-energiaksi. Turbiinin pyörimisen seurauksena turbiinin (pyörimiseen liittyvää) liike-energiaa muuttuu generaattorissa sähkövirran kuljettamaksi energiaksi. _____

5p

Tuulivoimalassa tapahtuu myös energiahäviöitä. Ilman osuessa tuulivoimalan turbiiniin osa ilmapirtauksen liike-energiasta muuttuu lähinnä lämmöksi, ja myös voimalan sisällä koneiston osien liikkeessä liike-energiaa muuttuu kitkan vaikutuksesta lämmöksi ja ääneksi.

Tässä kokeessa energiahäviöiden mainitsemista ei vaadittu pisteiden saamiseksi. Nämäkin energian muuntumiset muodosta toiseen kuitenkin tapahtuvat ja ovat suuruudeltaan olennaisia. Ne on siis hyvä mainita, koska pisteytystä ei voi tietää etukäteen.

- 9.2. Tarkastellaan pienen Δx :n pituista ilmamassaa, jonka poikkipinta-ala on A ja joka kulkee poikkipinta-alaa vastaan kohtisuoraan suuntaan nopeudella v .



Tarkasteltavan ilmamassan tiheys on ρ , massa on m ja tilavuus on $V = A\Delta x$. Ilmamassan liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Sijoitetaan $m = \rho V = \rho A\Delta x$.

$$E_k = \frac{1}{2}\rho A\Delta x \cdot v^2 \quad (1)$$

1p

Ilmamassa kulkee pinta-alan A läpi ajassa Δt , joka on sama aika, mikä siltä kestää kulkea Δx :n pituinen matka. Tästä saadaan

$$\Delta x = v\Delta t. \quad (2)$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$E_k = \frac{1}{2} \rho A v \Delta t \cdot v^2 \quad \text{1p(2p)}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \rho A v^3 \cdot \Delta t \quad || : \Delta t$$

$$\frac{E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho A v^3.$$

Tehtävänannon mukaan ilmavirran teholla tarkoitetaan pinnan läpi kulkevan ilman liike-energiaa aikayksikössä, eli saadaan

$$P_K = \frac{1}{2} \rho A v^3. \quad \text{2p(4p)}$$

9.3. Tehtävänannon mukaan häviöttömällä turbiinilla ilmavirrasta saatava teho on

$$P_T = \frac{1}{4} \rho A (v_1 + v_2) (v_1^2 - v_2^2), \quad (3)$$

missä v_1 on ilman nopeus ennen turbiiniin osumista ja v_2 on ilmavirran nopeus turbiinin jälkeen. Tehtävänannon mukaan suurin teho P_B saavutetaan, kun

$$v_2 = \frac{1}{3} v_1. \quad (4)$$

Lasketaan P_B sijoittamalla (4) yhtälöön (3).

$$P_B = \frac{1}{4} \rho A \left(v_1 + \frac{1}{3} v_1 \right) \cdot \left(v_1^2 - \left(\frac{1}{3} v_1 \right)^2 \right) \quad \text{1p}$$

$$= \frac{8}{27} \rho A v_1^3. \quad (\text{laskinohjelmalla})$$

Kohdan 9.2. nojalla turbiiniin osuvan ilmavirran teho on

$$P_K = \frac{1}{2} \rho A v_1^3.$$

Lasketaan kysytty suurin teoreettinen hyötysuhde.

$$\begin{aligned}\frac{P_B}{P_K} &= \frac{\frac{8}{27}\rho A v_1^3}{\frac{1}{2}\rho A v_1^3} && \text{1p(2p)} \\ &= \frac{16}{27} \\ &= 0,59259 \dots \\ &\approx 59\%. && \text{1p(3p)}\end{aligned}$$

Vastaus: Tuulivoimalan suurin teoreettinen hyötysuhde on $16/27 \approx 59\%$.

9.4. Ilman tiheys on $\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$. Tämä arvo on lämpötilassa 15°C ja löytyy taulukkokirjasta. Myös esimerkiksi NTP-olosuhteiden arvo $1,293 \text{ kg/m}^3$ on hyväksyttävä samoin kuin mahdolliset muut taulukosta löytyvät arvot järkevillä ulkolämpötiloilla.

Turbiinin halkaisija on $d = 71 \text{ m}$. Lasketaan turbiinin poikkipinta-ala.

$$\begin{aligned}A &= \pi r^2 \\ &= \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= 3959,19 \dots \text{ m}^2.\end{aligned}$$

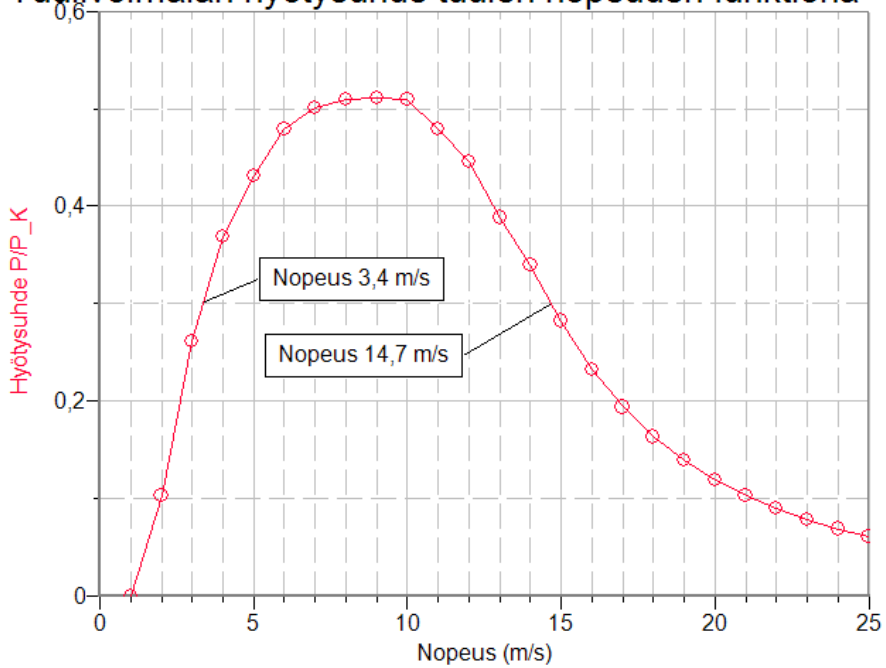
Lasketaan taulukkolaskentaohjelman avulla ilmavirtauksen teho nopeuksilla $1 \text{ m/s} - 25 \text{ m/s}$. Lasketaan tämän jälkeen vielä taulukkolaskennan avulla kutakin nopeutta vastaava suhde P/P_K .

v (m/s)	P (kW)	P_K (kW)	P/P_K
0	0		
1	0	2.415107205	0
2	2	19.32085764	0.103515074
3	17	65.20789455	0.26070463
4	57	154.5668611	0.36877245
5	130	301.8884007	0.430622706
6	250	521.6631564	0.479236452
7	415	828.3817715	0.500976741
8	630	1236.534889	0.509488253
9	900	1760.613153	0.511185548
10	1230	2415.107205	0.509294162
11	1540	3214.50769	0.479078026
12	1860	4173.305251	0.4456899
13	2060	5305.99053	0.388240422
14	2250	6627.054172	0.33951737
15	2300	8150.986818	0.282174423
16	2300	9892.279113	0.23250456
17	2300	11865.4217	0.193840561
18	2300	14084.90522	0.163295384
19	2300	16565.22032	0.13884512
20	2300	19320.85764	0.119042335
21	2300	22366.30783	0.102833244
22	2300	25716.06152	0.089438268
23	2300	29384.60937	0.078272267
24	2300	33386.44201	0.06889024
25	2300	37736.05008	0.060949675

4p

Piirretään hyötysuhde P/P_K nopeuden v funktiona. Huom! Piirtämiseen voi käyttää mitä tahansa tarkoitukseen sopivaa Abitista löytyvää ohjelmaa. Tässä on käytetty Logger Pro:ta.

Tuulivoimalan hyötysuhde tuulen nopeuden funktiona



2p(6p)

Vastaus: Hyötysuhde on yhtä suuri tai suurempi kuin 30%, kun nopeus on välillä 3,4 m/s – 14,7 m/s.

2p(8p)

Huom! Käytetty ilman tiheyden arvo vaikuttaa kuvaajaan ja siksi vastaus saattaa hieman poiketa tästä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

10. Grafeeni (20 p.)

Grafeeni on yhdestä hiiliatomikerroksesta muodostuva materiaali, jolla on hunajakennomainen rakenne. Vuonna 2010 Andre Geim ja Konstantin Novoselov saivat grafeenin löytämisestä fysiikan Nobel-palkinnon. Grafeenin ominaisuuksista on kerrottu tekstissä 10.A.

Aineisto:

10.A [Teksti: Grafeeni – ihmeaine, joka muuttaa maailmaa](#)

10.B [Kuva: Tanko grafeenimatolla](#)

- 10.1. Määritä pinta-ala, jonka 1,0 g grafeenia voisi peittää yhden atomikerroksen paksuisena. (4 p.)
- 10.2. Yhden atomikerroksen paksuinen grafeenimatto, jonka leveys on 1,0 m ja pituus 4,0 m, on ripustettu lyhyemmistä reunoistaan kuvan 10.B mukaisesti. Maton keskelle asetetaan poikittain maton levyinen tanko. Mikä on suurin tangon massa, jonka grafeenimatto kannattelee? Oletetaan, että matto venyy suoraanviivaisesti (katso sivukuva 10.B) teoreettiseen maksimipituuteensa. (8 p.)
- 10.3. Pohdi lyhyesti aineiston ja tietämyksesi perusteella, millaisia erilaisia sovelluksia grafeenilla on ja voisi olla. (8 p.)

Ratkaisu.

- 10.1. Hiilen atomimassa on $M_C = 12,01 \text{ g/mol}$.
Grafeenimaton massa $m = 1,0 \text{ g}$.
Avogadron vakio $N_A = 6,0221415 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$.

Liitteen 10.A kuvasta ilmenee, että pinta-alaltaan

$$A_h = \sqrt{3}a_0 \cdot 3a_0 = 3\sqrt{3}a_0^2 \quad (1) \quad 1\text{p}$$

suuruudessa ruudussa on aina neljä hiiliatomia. Pinta-alassa esiintyvä mitta $a_0 = 0,142 \text{ nm}$.

Hiiliatomeita on yhteensä

$$N = N_A n = N_A \frac{m}{M_C} \quad (2) \quad 1\text{p}(2\text{p})$$

Neljä hiiliatomia muodostaa aina A_h -kokoisen ruudun, joten koko maton pinta-alaksi tulee

$$A = \frac{N}{4} A_h \quad 1\text{p}(3\text{p})$$

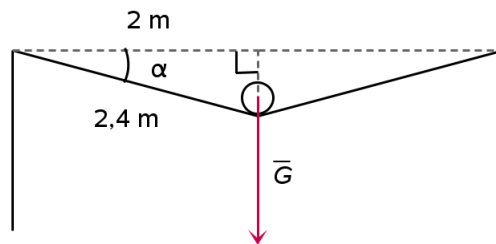
Sijoitetaan edelliseen yhtälöt (1) ja (2), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} A &= \frac{N_A \cdot \frac{m}{M_C}}{4} \cdot 3\sqrt{3}a_0^2 \\ &= 1313,428 \dots \text{ m}^2 \\ &\approx 1300 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

1p(4p)

Vastaus: Kysytty ala on 1300 m^2 .

- 10.2. Juuri ennen hajoamista grafeeni on venynyt 20 % alkuperäisestä pituudestaan. Maton pituus on tällöin $1,2 \cdot 4 \text{ m} = 4,8 \text{ m}$. Piirretään tilannekuva tässä rajatilanteessa.

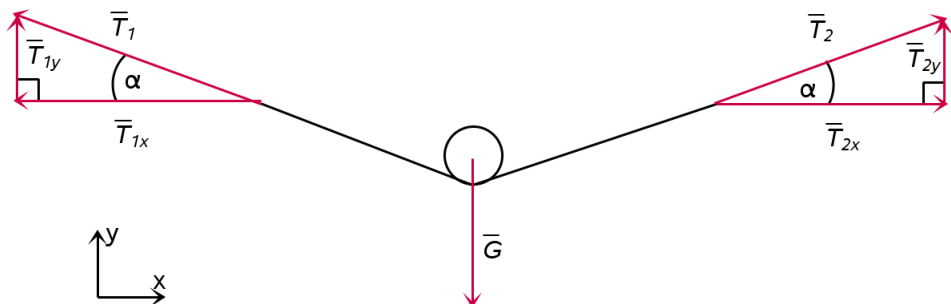


Kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{2 \text{ m}}{2,4 \text{ m}} \\ \alpha &= 33,55 \dots^\circ \end{aligned}$$

1p

Piirretään vapaakappalekuva systeemistä, joka sisältää tangon ja maton. $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$.



Systeemiin vaikuttavat tangon painovoima $\overline{G}$ ja maton jännitysvoimat $\overline{T}_1$ ja $\overline{T}_2$. Symmetrian perusteella $T_1 = T_2 = T$. Newtonin II lain nojalla saadaan pystysuuntaisille voimille

$$\overline{G} + \overline{T}_{1y} + \overline{T}_{2y} = \vec{0}$$

$$G - T_{1y} - T_{2y} = 0 \quad \text{1p(2p)}$$

Sijoitetaan $T_{1y} = T_{2y} = T \sin \alpha$ sekä $G = m_t g$.

$$m_t g - 2T \sin \alpha = 0$$

$$m_t = \frac{2T \sin \alpha}{g} \quad \text{(3)} \quad \text{1p(3p)}$$

Grafeenimaton paksuus on 0,33 nm ja leveys 1,0 m, josta saadaan poikkileikkauksen ala $A_p = 0,33 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$.

Maton jännitysvoima T on jakautunut koko poikkileikkausalueelle A_p . Tarkasteltavassa rajatilanteessa tämä jakaantunut voima on vetolujuuden suuruinen, sillä vetolujuuden ylittyessä matto hajoaa. Grafeenin vetolujuus $p = 130 \text{ GN/m}^2$. Siten

$$\frac{T}{A_p} = p \quad \text{2p(5p)}$$

$$T = p A_p \quad \text{(4)}$$

Sijoitetaan (4) yhtälöön (3).

$$m_t = \frac{2p A_p \sin \alpha}{g} \quad \text{2p(7p)}$$

$$= 4,836 \dots \text{ kg}$$

$$\approx 4,8 \text{ kg} \quad \text{1p(8p)}$$

Vastaus: Tangon massa voi olla enintään 4,8 kg.

- 10.3. Koska grafeeni johtaa sähköä ja se on läpinäkyvää, sitä voidaan käyttää ainakin sähkönjohtimena aurinkopaneeleissa ja kosketusnäytöissä. Taipuvissa näytöissä suuri lujuus on etu.

Grafeeni sopii myös lääketieteellisiin tarkoituksiin ja sitä voidaan käyttää johtimena esimerkiksi erilaisissa implanteissa. Erilaisissa sensoreissa voi olla hyötyä sekä hyvästä sähkönjohtavuudesta että lämmönjohtavuudesta. **Huom.! Tehtävänannon kuvatekstissä oli sanat "electrodes-flex-for-artificial-muscles-and-more", mikä toimi hyvänä vihjeenä tähän.**

Esimerkiksi urheiluvälineissä pyritään usein äärimmäisiin ominaisuuksiin, joten grafeenista voidaan luultavasti rakentaa monia urheiluvälineitä, joissa pyritään hyvään kestävyysmahdollisimman pienellä massalla. Grafeenia onkin sovellettu esimerkiksi tennismailloissa.

Koska grafeeni on vahvaa suhteessa ohuuteensa, sitä voidaan käyttää pinnoitteena tai kalvomaisten tarvikkeiden vahvistamiseen. Esimerkiksi vesieristemuoveja voitaisiin vahvistaa sellaisia olosuhteita varten, joissa eristeet altistuvat mekaaniselle rasitukselle.

8p

Ohje pisteytykseen: Näkemyksemme mukaan tehtävästä saa täydet pisteet, jos on käsitellyt vähintään neljää eri sovellusta, jotka ovat joko todellisia sovelluksia tai fysikaalisesti hyvin perusteltuja mahdollisia sovelluksia. Sovelluksia on valtava määrä ja voit verrata mainitsemiasi sovelluksia esimerkiksi siihen, mitä on lueteltu Wikipedian artikkelissa "grafeeni" tai englanninkielisen Wikipedian artikkelissa "Potential applications of graphene".

Sovellusten kuvauksissa tulee perustella grafeenin käyttö viitaten sen erityisominaisuuksiin. Sovellukset voivat hyödyntää yhtä tai useampaa grafeenin hyvää ominaisuutta.

Sovelluskokoelman tulee olla sillä tavalla monipuolinen, että niissä hyödynnetään ainakin grafeenin lämmönjohtavuutta, sähkönjohtavuutta, läpinäkyvyyttä sekä vetolujuutta suhteessa ohuuteen tai massaan.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

11. Vaimeneva värähtely (20 p.)

Maanjäristykset aiheuttavat korkeissa rakennuksissa värähtelyjä, jotka saattavat olla tuhoisia. Värähtelyä voidaan tutkia pienoismallien ja kiihtyvyyssantureiden avulla. Videossa 11.A on esitetty korkean rakennuksen puinen pienoismalli, joka saatetaan värähtelemään. Havaitaan, että värähtely vaimenee. Pienoismallin yläpinnan kiihtyvyys on mitattu ajan funktiona, ja mittaustulokset ovat tiedostossa 11.B.

Yksinkertaisin matemaattinen malli värähtelijän kiihtyvyydelle vaimenevassa värähtelyssä on $a(t) = Ae^{-Bt} \cos(Ct)$, jossa A , B ja C ovat parametreja. Parametri A on värähtelyn amplitudi hetkellä $t = 0$. Parametri $B = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$, jossa $T_{1/2}$ on aika, jossa värähtelyn amplitudi pienenee puoleen. Parametri $C = 2\pi f$, jossa f on värähtelyn taajuus. Mallissa funktio Ae^{-Bt} on värähtelyn eksponentiaalisesti vaimeneva amplitudi ja funktio $\cos(Ct)$ kuvaa puolestaan värähtelyn periodista vaihtelua.

Aineisto:

11.A [Video: Rakennuksen pienoismalli](#)

11.B [Tiedosto: Mittaustulokset](#)

11.1. Kuinka suuri on pienoismallin värähtelyn taajuus? (5 p.)

11.2. Yksi maanjäristyksen riskeistä on, että esineet rakennusten sisällä eivät pysy paikoillaan, vaan alkavat liukua ja aiheuttavat tuhoa. Tämän tutkimiseksi pienoismallin päälle asetetaan pieni laakea kivi, jonka massa on 21 g. Pysyykö kivi liukumatta paikallaan värähtelyn ajan? Oletetaan, että pienoismalli värähtelee samalla tavalla kuin ilman kiveä. (10 p.)

11.3. Missä ajassa värähtelijän kiihtyvyyden kunkin värähdyksen aikana saavuttama suurin arvo pienenee kahdeksasosaan? (5 p.)

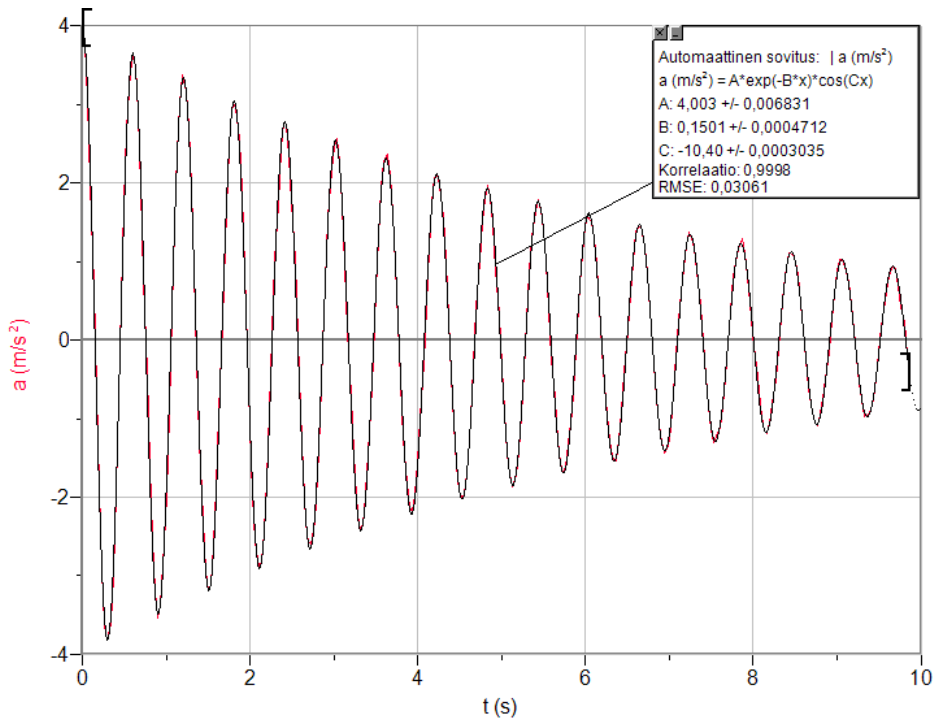
Ratkaisu.

11.1.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tehdään automaattinen käyränsovitus ja käytetään sovitefunktiona tehtävänannossa annettua funktiota

$$a(t) = Ae^{-Bt} \cos(Ct).$$



Logger Pro antaa jostain syystä virheellisesti negatiivisen C :n arvon. Oikea C :n arvo on positiivinen, eli 10,40.

Automaattisen sovituksen avulla saadaan siis $C = 10,40 \text{ 1/s}$. Ratkaistaan värähtelijän taajuus. 2p

$$C = 2\pi f$$

$$f = \frac{C}{2\pi}$$

$$f = 1,6552 \dots \text{ Hz}$$

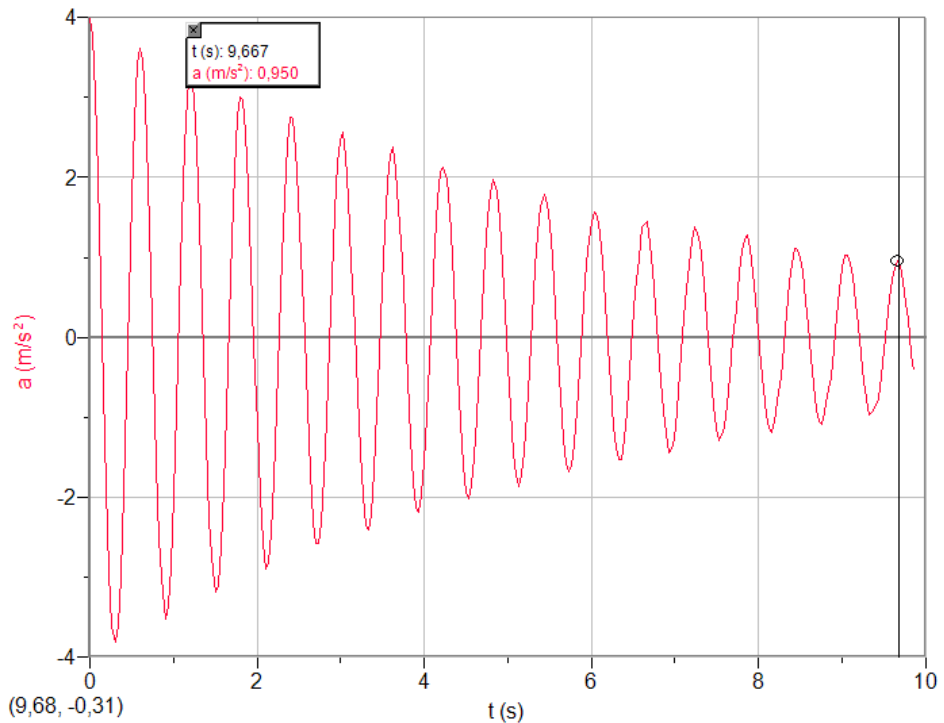
$$f \approx 1,7 \text{ Hz.}$$

3p(5p)

Vastaus: Värähtelijän taajuus on 1,7 Hz.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Alkuhetkestä lähtien viimeiseen (positiiviseen) huippuun asti on yhteensä 16 kokonaista värähdystä. Luetaan kuvaajasta, kuinka pitkä aika näihin 16 värähdykseen kuluu.



Kuvaajasta saadaan luettua, että 16 värähdykseen kuluu aika $\Delta t = 9,667 \text{ s}$, joten taajuus on siis 3p

$$f = \frac{16}{\Delta t} \quad *$$

$$= 1,6551 \dots \text{ Hz}$$

$$\approx 1,7 \text{ Hz.}$$

2p(5p)

* Taajuus kertoo, kuinka monta värähdystä tapahtuu aikayksikköä kohden. Toinen tapa ymmärtää, miksi taajuus laskettiin näin, on seuraava: Jaksonaika T on yhteen värähdykseen kuluva aika, eli sen voisi laskea kaavalla $T = \Delta t / 16$. Taajuus on jaksonajan käänteisluku, ja siksi taajuus on siis $f = 16 / \Delta t$.

Vastaus: Värähtelijän taajuus on 1,7 Hz.

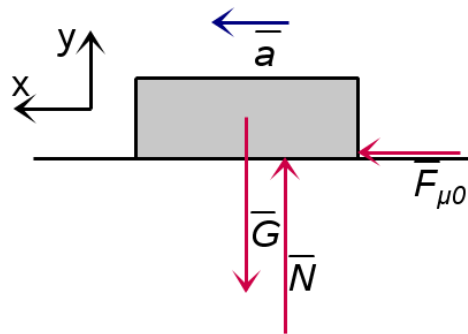
11.2.

$$m = 21 \text{ g}$$

$$g = 9,80665 \text{ m/s}^2.$$

Oletetaan, että kivi ei vieri, vaan voi liikkua rakennuksen suhteen ainoastaan liukumalla. Lasketaan tarvittava lepokitkakerroin μ_0 kiven pysymiseen paikallaan rakennuksen suhteen. Rajatapauksessa kivi pysyy juuri ja juuri paikallaan ja lepokitka on täysin kehittynyt.

Kiven voimakuvio:



Kivi pysyy y -suunnassa paikallaan, joten Newtonin II lain nojalla

$$\sum \bar{F}_y = \bar{0}$$

$$\bar{N} + \bar{G} = \bar{0}$$

$$N - G = 0$$

$$N = G$$

$$N = mg \quad (1)$$

Newtonin II lain nojalla saadaan x -suunnassa:

$$\sum \bar{F}_x = m\bar{a}$$

$$\bar{F}_{\mu 0} = m\bar{a}$$

$$F_{\mu 0} = ma$$

2p

Sijoitetaan $F_{\mu 0} = \mu_0 N$.

$$\mu_0 N = ma$$

Sijoitetaan (1).

$$\mu_0 mg = ma$$

$$\mu_0 = \frac{a}{g} \quad (2) \quad \boxed{3p(5p)}$$

Suurin tarvittava lepokitkakerroin vastaa siis kiven suurinta kiihtyvyyttä a . Kiven kiihtyvyys on sama kuin mittausaineistossa esitetty pienoismallin yläpinnan kiihtyvyys, joka on sama kuin mallin parametrin A arvo, eli kohdan 11.1. ratkaisun perusteella $a_{\max} = 4,003 \text{ m/s}^2$.

Jos kohdan 11.1. teki ratkaisuvaihtoehdon 2 mukaisesti, kiihtyvyyden suurimman arvon voi katsoa kuvaajasta, jolloin saa arvon $3,984 \text{ m/s}^2$.

Lasketaan kiven paikallaan pysymiseen tarvittava lepokitkakerroin yhtälöstä (2).

$$\mu_0 = \frac{a_{\max}}{g}$$

$$= 0,4081 \dots \quad \boxed{3p(8p)}$$

Pienoismalli on tehty puusta. Taulukkokirjasta saadaan, että kiven ja puun välinen ohjeellinen lepokitkakerroin on noin 0,7, eli merkittävästi suurempi kuin yllä laskettu tarvittava lepokitkakerroin. Kivi siis pysyy paikallaan. $\boxed{2p(10p)}$

Vastaus: Kivi pysyy liukumatta paikallaan.

11.3.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tässä ratkaisuvaihtoehdossa oletetaan, että kohta 11.1. ratkaistiin ratkaisuvaihtoehdon 1 mukaisesti.

Kohdassa 11.1 saatiin, käyrän sovituksen avulla parametrin B arvoksi

$$B = 0,1501 \text{ 1/s.}$$

Tehtävänannon mukaan

$$B = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}},$$

missä $T_{1/2}$ on aika, jossa värähtelyn amplitudi pienenee puoleen. Ratkaistaan $T_{1/2}$.

$$B = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \quad \text{2p}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{B}$$

$$T_{1/2} = 4,6179 \dots \text{ s.} \quad \text{2p(4p)}$$

Aika, jossa amplitudi pienenee kahdeksasosaan on siis

$$T_{1/8} = 3T_{1/2} = 13,853 \dots \text{ s} \approx 14 \text{ s.} \quad \text{1p(5p)}$$

Vastaus: Kiihtyvyyden kunkin värähdyksen aikana saavuttama suurin arvo pienenee kahdeksasosaan ajassa 14 s.

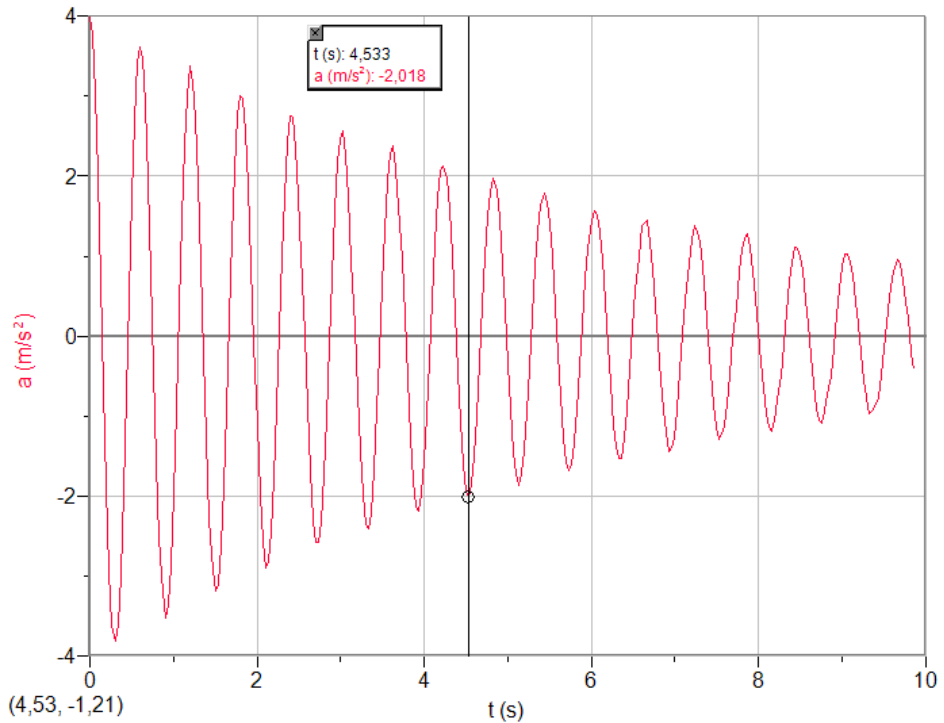
RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tehtävänannon mukaan värähtelyllä on aika $T_{1/2}$, missä amplitudi pienenee aina puoleen. Aika, jossa amplitudi pienenee kahdeksasosaan on siis

$$T_{1/8} = 3T_{1/2}. \quad (3)$$

Kohdassa 11.2. saatiin ensimmäisen värähdyksen suurimmaksi kiihtyvyydeksi $a_{\max} = 4,003 \text{ m/s}^2$. Selvitetään kuvaajasta, missä ajassa värähtelyn suurin (positiivinen tai negatiivinen) arvo on puolet tästä, eli

$$\frac{a_{\max}}{2} = 2,0015 \text{ m/s}^2.$$



Hetkellä $t_1 = 4,533 \text{ s}$ kiihtyvyyden suuruus $2,018 \text{ m/s}^2$ on selkeästi lähimpänä arvoa $2,0015 \text{ m/s}^2$, joten voidaan siis arvioida, että amplitudi pienenee puoleen likimain ajassa $T_{1/2} = 4,533 \text{ s}$.

4p

Tämän kohdan voi myös tehdä lukemalla kuvaajasta ajan, joka kuluu amplitudin pienenemiseen neljäsosaan, ja laskemalla kysytyn ajan sen perusteella.

Yhtälöstä (3) saadaan siis aika, jossa amplitudi pienenee kahdeksasosaan:

$$T_{1/8} = 3T_{1/2} = 13,599 \text{ s} \approx 14 \text{ s}.$$

1p(5p)

Vastaus: Kiihtyvyyden kunkin värähdyksen aikana saavuttama suurin arvo pienenee kahdeksasosaan ajassa 14 s.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.