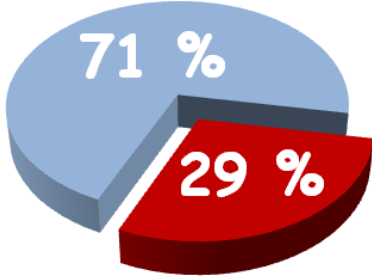


Tiesitkö tätä?

MAFY:n lääkiskurssi 2,5-kertaistaa mahdollisuutesi päästä sisään yhdellä yrityksellä. Poikkeuksellisen kovista tuloksista johtuen lääkikset alkavatkin täytyä MAFY:n kurssilaisista.



29 % vuonna 2016 Helsingin suomenkieliseen yleislääkikseen päässeistä tuli MAFY:n kurssilta.

Lääkiskurssi

- 5-8 täysmittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa.
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 16 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa valintasi mukaan 29.8., 31.10., 9.1., 20.2. tai 28.3. Oppitunnin ajankohdaksi voi yleensä valita aamun, iltapäivän tai illan.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 4 täysmittaista harjoituskoetta kustakin aineesta ja pitkällä kurssilla lisäksi 2 yo-harjoituskoetta kustakin aineesta.
- Pitkäkurssi 28.3.-26.5. ja kevätkurssi 20.2.-26.5.

Lyhyt matematiikka, kevät 2016

Mallivastaukset, 23.3.2016

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n Jyväskylän kursseista ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen ja Olli Hirviniemi. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion fysiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot
info@mafyvalmennus.fi

Lääkis-, DI- ja yo-valmennuskurssit - oppimateriaalit - etäkurssit

1. Määritellään funktiot $f(x) = 2x^2 + x$ ja $g(x) = 5x - 2$.

a) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$

b) Laske $f'(x)$.

Ratkaisu.

a)

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^2 + x = 5x - 2 \quad \text{1p}$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \parallel : 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{1p(2p)}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{((-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x = 1. \quad \text{1p(3p)}$$

Vastaus: $x = 1$.

b)

$$f'(x) = D(2x^2 + x) \quad \text{1p(4p)}$$

$$= 4x + 1.$$

Vastaus: $f'(x) = 4x + 1$. 2p(6p)

2. a) Onko epäyhtälö $\sqrt{7} < 3$ tosi? Perustelee.
 b) Ratkaise epäyhtälö $-x^2 + 3(x - 2) + 9 > 3(x - 2) + 2x^2$.
 c) Jussi laskee päässä kertolaskun seuraavasti: $27 \cdot 31 = 20 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 600 + 210 + 20 + 7 = 837$. Onko Jussin päättely oikein? Perustelee.

Ratkaisu.

a)

$$3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \text{1p}$$

$$= \sqrt{7+2} > \sqrt{7}.$$

Näin ollen $\sqrt{7} < 3$, eli epäyhtälö on tosi. 1p(2p)

b)

$$-x^2 + \cancel{3(x-2)} + 9 > \cancel{3(x-2)} + 2x^2$$

$$-x^2 + 9 > 2x^2 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \text{1p(3p)}$$

$$-3x^2 + 9 > 0 \quad || : (-3) \quad < 0, \text{ suunta vaihtuu}$$

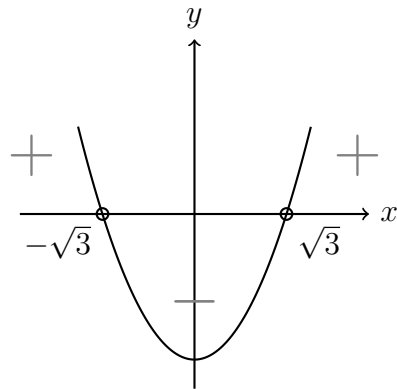
$$x^2 - 3 < 0.$$

Nollakohdat:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$



Vastaus: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 1p(4p)

c) Tarkastetaan Jussin päättely:

$$27 \cdot 31 = (20 + 7) \cdot (30 + 1) \quad \underline{\hspace{10em}} \quad \text{1p(5p)}$$

$$= 20 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 1$$

$$= 20 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 1$$

$$= 600 + 210 + 20 + 7$$

$$= 837.$$

Vastaus: Jussin päättely on oikein. 1p(6p)

3. Täydennä oikeiden vaihtoehtojen numerot alempaan taulukkoon.

		1	2	3
A	Lausekkeen $1,1^3$ arvo on	1,13	3,3	1,331
B	Tilavuus $0,5 \text{ m}^3$ on sama kuin	501	5001	5 0001
C	Luvuista $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ ja $\frac{16}{21}$ suurin on	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Luvun $-a + b$ vastaluku on	$b - a$	$a - b$	$-a - b$
E	Yhtälön $x^2 - 3x + 1 = 0$ juurten summa on	3	4	5
F	Tuotteen hinta nousee ensin 10% ja laskee sitten 10%, joten lopullinen hinta on ... alkuperäisestä hinnasta	99%	100%	101%

Ratkaisu.

Kohta	A	B	C	D	E	F
Vaihtoehdon numero	3	2	2	2	1	1

1p / oikea kohta

6p

Perustelut ja selitykset: (ei vaadita koevastauksessa)

A)

$$\begin{aligned}
 1,1^2 &= 1,1 \cdot 1,1 \\
 &= 1 \cdot 1,1 + 0,1 \cdot 1,1 \\
 &= 1,1 + 0,11 \\
 &= 1,21 \\
 1,1^3 &= 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \\
 &= 1,1 \cdot 1,21 \\
 &= 1 \cdot 1,21 + 0,1 \cdot 1,21 \\
 &= 1,21 + 0,121 = 1,331.
 \end{aligned}$$

B)

$$0,5 \text{ m}^3 = 0,5 \cdot 1000 \text{ dm}^3 = 500 \text{ dm}^3 = 500 \text{ l}.$$

C) Lavennetaan luvut samannimisiksi:

$$\begin{aligned}
 {}^7) \frac{2}{3} &= \frac{14}{21} \\
 {}^3) \frac{6}{7} &= \frac{18}{21}
 \end{aligned}$$

Nyt nähdään, että

$$\frac{14}{21} < \frac{16}{21} < \frac{18}{21},$$

joten suurin luvuista on $\frac{6}{7}$.

D)

$$-(-a + b) = a - b.$$

E) Ratkaistaan yhtälön juuret.

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Juurien summa on siis

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \cancel{\sqrt{5}} + 3 - \cancel{\sqrt{5}}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

F) Merkitään alkuperäistä hintaa a :lla.

$$10\% \text{ korotus: } 1,1a$$

$$10\% \text{ lasku: } 0,9 \cdot 1,1a$$

$$= (0,9 \cdot 1 + 0,9 \cdot 0,1)a$$

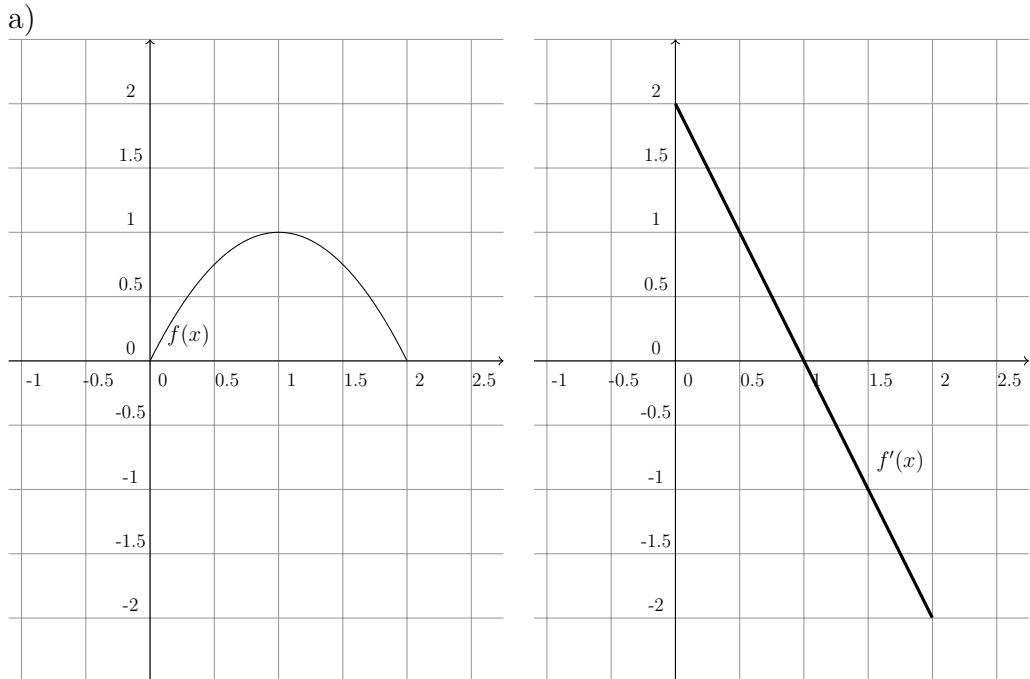
$$= (0,9 + 0,09)a$$

$$= 0,99a,$$

joten uusi hinta on 99% alkuperäisestä.

4. Kuviossa a) on piirretty funktion $f(x)$ kuvaaja ja kuviossa b) funktion $g'(x)$ kuvaaja välillä $[0, 2]$. Hahmottele tyhjiin koordinaatistoihin a-kohdassa funktion $f'(x)$ ja b-kohdassa funktion $g(x)$ kuvaaja, kun lisäksi tiedetään, että $g(0) = 0$.

Ratkaisu. Huom! Paksummalla viivalla piirretyt käyrät ovat tehtävän ratkaisu ja ohuemalla viivalla piirretyt kuvaajat oli annettu tehtävässä.

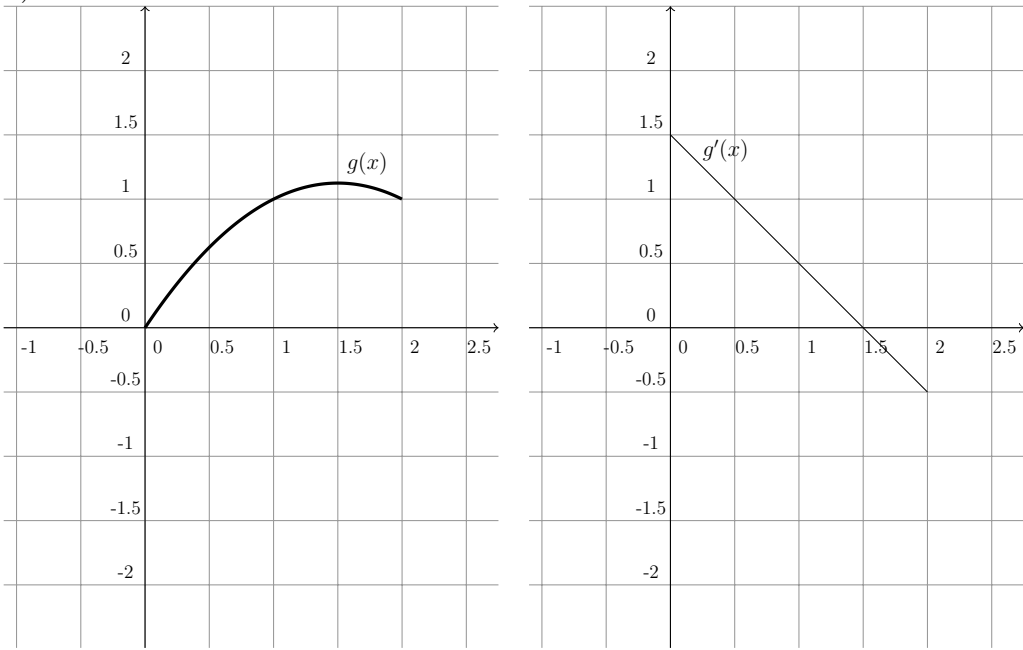


3p

Pisteytys:

- 1p, kun $f'(1) = 0$.
- 1p, kun $f'(x)$ on vähenevä.
- 1p, kun $f'(x)$ on symmetrinen pisteen $(1,0)$ suhteen.

b)



3p(6p)

Pisteytys:

- 1p, kun $g(x)$ on kasvava välillä $[0; 1,5]$
- 1p, kun $g(x)$ on vähenevä välillä $[1,5; 2]$
- 1p, kun $g(x)$ on kovera alaspäin kaikkialla

Perustelut ja selitykset: (ei vaadita koevastauksessa)

a) Kuvaaja on paraabeli, joten se on muotoa

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Kuvaaja kulkee pisteen (0,0) kautta, joten

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = 0.$$

Yhtälö tulee muotoon

$$y = ax^2 + bx.$$

Paraabelin huippu on pisteessä (1,1):

$$\begin{aligned}1 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \\a + b &= 1 \\b &= 1 - a.\end{aligned}$$

Derivaatta on huipun kohdalla nolla, joten

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2ax + b \\f'(1) &= 2a \cdot 1 + b = 0 \\2a + b &= 0.\end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän aikaisemmin saatu $b = 1 - a$.

$$\begin{aligned}2a + (1 - a) &= 0 \\a + 1 &= 0 \\a &= -1\end{aligned}$$

Näin ollen siis

$$\begin{aligned}b &= 1 - a \\b &= 1 - (-1) \\b &= 2,\end{aligned}$$

joten paraabelin yhtälö on

$$y = f(x) = -x^2 + 2x.$$

Derivaatan yhtälö on siten

$$f'(x) = -2x + 2.$$

Derivaatan kuvaaja $y = f'(x)$ on siis laskeva suora. Lasketaan kaksi pistettä, joiden kautta se kulkee, jotta kuvaaja on helppo piirtää.

$$\begin{aligned}x = 0 : \quad y &= f'(0) = -2 \cdot 0 + 2 = 2 && \Rightarrow (0, 2) \\x = 1 : \quad y &= f'(1) = -2 \cdot 1 + 2 = 0 && \Rightarrow (2, 0).\end{aligned}$$

b) Selvitetään ensin suoran $y = g'(x)$ yhtälö. Suoran yhtälö on yleisesti muotoa

$$y = kx + b.$$

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{0 - 1,5}{1,5 - 0} = -1$$

ja suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0;1,5)$, joten $b = 1,5$. Täten suoran yhtälö on

$$y = g'(x) = -x + 1,5.$$

Koska $g'(x)$:n, eli funktion $g(x)$ derivaatan kuvaaja on suora, tiedetään, että $g(x)$:n kuvaaja on paraabeli. Paraabelin yhtälö on muotoa

$$y = g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Selvitetään kertoimet a , b ja c . Tehtävänannon mukaan $g(0) = 0$, joten paraabeli kulkee pisteen $(0,0)$ kautta, joten

$$\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 0 \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälö on siis muotoa

$$y = ax^2 + bx.$$

Paraabelin derivaatta on suora $y = g'(x) = -x + 1,5$. Derivoidaan $g(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^2 + bx \\ g'(x) &= 2ax + b. \end{aligned}$$

Nyt siis

$$\begin{aligned} 2ax + b &= -x + 1,5 \\ 2a &= -1 \quad || : 2 \\ a &= -\frac{1}{2} \\ b &= 1,5. \end{aligned}$$

Paraabelin yhtälö on siis

$$y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1,5x.$$

Lasketaan paraabelin pisteet kohdissa $x = 1$, $x = 1,5$ (huippu) ja $x = 2$.

$$g(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1,5 \cdot 1 = 1$$

$$g(1,5) = 1,125$$

$$g(2) = 1$$

Nyt saadaan hahmoteltua kuvaaja.

5. Oheinen taulukko kuvaa kuluttajahintaindeksin kehitystä 2000-luvulla.

- a) Kuinka monta prosenttia kuluttajahinta on noussut kesäkuusta 2006 kesäkuuhun 2010?
- b) Petteri on vuokrannut asunnon syyskuussa 2011. Vuokrasopimuksen mukaan vuokranantajalla on oikeus korottaa vuokraa kerran vuodessa niin, että korotus vastaa kuluttajahintaindeksin muutosta. Vuokranantaja käyttää korotusoikeuttaan täysimääräisenä niin, että korotus tulee voimaan tammikuun alusta vuosina 2012, 2013 ja 2014. Kesäkuussa 2014 Petterin vuokra on 542 €/kk. Mikä oli vuokra vuokrasopimusta solmittaessa?

	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu
2014	119,0	119,3	119,6	119,8	119,5	119,5	119,4	119,6	120,2	120,0	119,8	119,6
2013	117,1	117,8	118,3	118,5	118,5	118,5	118,4	118,2	118,7	118,8	118,6	119,1
2012	115,2	115,9	116,3	116,7	116,7	116,8	116,6	116,8	117,3	117,4	117,0	117,2
2011	111,7	112,4	113,0	113,2	113,3	113,6	113,3	113,7	114,2	114,5	114,5	114,5
2010	108,3	108,7	109,2	109,5	109,4	109,7	109,1	109,6	110,0	110,5	110,7	111,3
2009	108,5	108,6	108,6	108,6	108,4	108,7	108,0	108,3	108,5	107,9	108,0	108,1
2008	106,2	106,7	107,6	107,8	108,4	108,8	108,6	109,1	109,6	109,6	109,1	108,7
2007	102,2	102,9	103,6	104,1	104,0	104,2	104,1	104,2	104,7	105,0	105,3	105,1
2006	99,9	100,7	101,0	101,5	101,6	101,7	101,5	101,9	102,0	102,3	102,3	102,4
2005	99,1	99,8	100,1	100,2	99,9	100,0	99,6	100,0	100,5	100,4	100,2	100,2

Lähde: Tilastokeskus

Ratkaisu.

- a) Kuluttajahintaindeksit kysytyllä ajalla:

Kesäkuu 2006: 101,7

Kesäkuu 2010: 109,7 1p

Lasketaan suhteellinen muutos:

$$\frac{109,7 - 101,7}{101,7} = 0,078662... \approx 7,866\%.$$
1p(2p)

Vastaus: Kuluttajahinta on noussut 7,866%. 1p(3p)

- b) Korotukset tulevat voimaan tammikuun alusta, eli ne on tehty joulukuun indeksillä. Korotusten suuruus:

$$q_{2012} = \frac{114,5}{114,2} \quad q_{2013} = \frac{117,2}{114,5} \quad q_{2014} = \frac{119,1}{117,2}.$$
1p(4p)

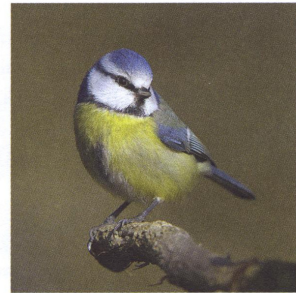
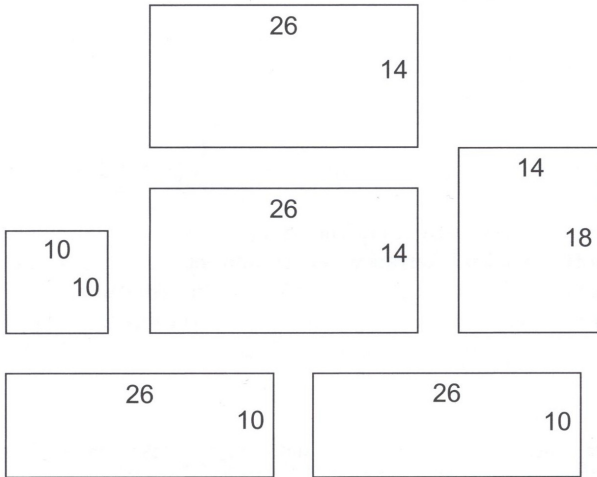
Merkitään alkuperäistä vuokraa x :llä. Korotusten jälkeen vuokra on

$$\begin{aligned}
 q_{2012} \cdot q_{2013} \cdot q_{2014} \cdot x &= 542 \\
 \frac{114,5}{114,2} \cdot \frac{117,2}{114,2} \cdot \frac{119,1}{117,2} \cdot x &= 542 \\
 \frac{119,1}{114,2} \cdot x &= 542 \quad \parallel \cdot \frac{114,2}{119,1} \quad \text{1p(5p)} \\
 x &= \frac{114,2}{119,1} \cdot 542 \\
 &= 519,7010\dots \\
 &\approx 519,70 \text{€}.
 \end{aligned}$$

Vastaus: Vuokra oli 519,70 € vuokrasopimusta solmittaessa. 1p(6p)

6. Peppi rakentaa oheisen kuvan mukaisista laudankappaleista linnunpöntön. Yksikkönä on senttimetri.

- a) Paljonko linnunpönttö painaa? Sisääntuloaukkoa ei tarvitse huomioida eikä käytettäviä nauvoja. Laudan tiheys on 550 kg/m^3 ja paksuus $2,0 \text{ cm}$.
- b) Mikä on linnunpöntön sisätilavuus?



<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.



<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.

Ratkaisu.

a) Lasketaan kappaleiden pinta-alojen summa:

$$A = 10 \cdot 10 + 2 \cdot 26 \cdot 14 + 2 \cdot 26 \cdot 10 + 14 \cdot 18$$

$$A = 1600 \text{ (cm}^2\text{)} \quad \underline{\hspace{10cm}} \quad \text{1p}$$

Kappaleet ovat kaikki $d = 2,0 \text{ cm}$ paksuja, joten kappaleiden yhteistilavuus on

$$V = Ad = 1600 \cdot 2 = 3200 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$3200 \text{ cm}^3 = \frac{3200}{1000^3} \text{ m}^3 = 0,0032 \text{ m}^3. \quad \underline{\hspace{10cm}} \quad \text{1p(2p)}$$

Lasketaan pöntön massa:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \parallel \cdot V$$

$$m = \rho V$$

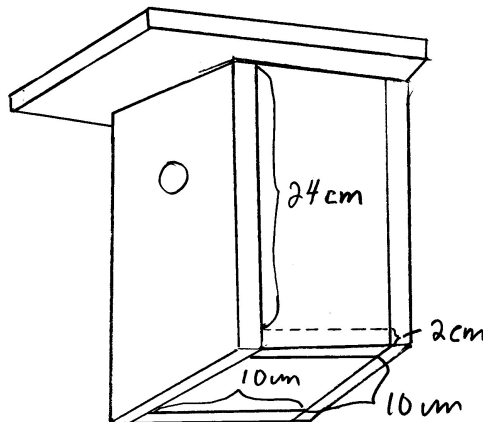
$$= 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,0032 \text{ m}^3$$

$$= 1,76 \text{ kg}$$

$$\approx 1,8 \text{ kg.}$$

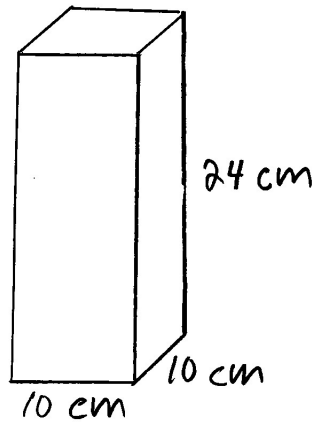
Vastaus: Pöntön massa on 1,8 kg. 1p(3p)

b) Kasataan pönttö tehtävänannon kuvan mukaisesti:



1p(4p)

Sisätila on tällöin suorakulmainen särmiö:



1p(5p)

Sen tilavuus on siis

$$V_s = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm} = 2400 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: Pöntön sisätilavuus on 2400 cm³.

1p(6p)

7. Hajamielinen professori muistaa ystäviensä ovikoodista vain, että se koostuu neljästä erisuuresta parittomasta numerosta.
- Kuinka monta koodia hän joutuu huonoimmassa tapauksessa (enintään) kokeilemaan, jos hän käy systemaattisesti läpi kaikki vaihtoehdot?
 - Parin vuoden käyntien jälkeen professori huomaa koodissa seuraavan ominaisuuden: siinä ei ole numeroa 9 eikä peräkkäin ”vierekkäisiä” parittomien numeroiden (1 ja 3, 3 ja 1, 3 ja 5, 5 ja 3, 5 ja 7, 7 ja 5, 7 ja 9, 9 ja 7) yhdistelmiä. Kuinka monta koodia pitää huonoimmassa tapauksessa kokeilla, kun otetaan huomioon myös nämä lisätiedot?

Ratkaisu.

- a) Parittomat luvut välillä 0 - 9 ovat

1, 3, 5, 7, 9 _____ 1p

Eriolaisten näistä viidestä numerosta muodostuvien järjestettyjen neljän pituisten jonojen lukumäärä, mikä vastaa mahdollisten koodien lukumäärää, on

$$\frac{5!}{(5-4)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120. \quad 1p(2p)$$

Vastaus: Professori joutuu kokeilemaan enintään 120 eri vaihtoehtoa. 1p(3p)

- b) Koodi muodostuu neljästä numerosta, eli kahdesta numeroparista. Koska pareissa ei saa olla ”vierekkäisiä” parittomia lukuja eikä numeroa 9, kaikki mahdolliset parit ovat

15, 17, 37, 51, 73, 71 _____ 1p(4p)

Koodin tulee alkaa jollain näistä, ja päättyä toiseen. Kirjoitetaan vasemmalle alkuosa ja oikealle sopivat loppuosat. Vain sellaiset loppuosat ovat sopivia, joissa ei ole samoja numeroita kuin alkuosassa, ja jonka ensimmäinen numero ei ole alkuosan toisen numeron ”viereinen” pariton luku. 1p(5p)

15	-
17	-
37	15
51	73
73	-
71	-

Vastaus: Professori joutuu kokeilemaan enintään 2 eri vaihtoehtoa. 1p(6p)

8. Alla on ote Wikipedian CRP:tä koskevasta tiedosta. Vastaa sen perusteella seuraaviin kysymyksiin.
- Potilaan CRP-pitoisuus oli 40 klo 12:00. Kuinka suuri pitoisuus voi enintään olla klo 18:00? (2p.)
 - Potilaan CRP-pitoisuus oli 100 maanantaina klo 12:00. Milloin se voi aikaisintaan laskea arvoon 10? (4p.)

CRP:n pitoisuus veressä nousee bakteeri-infektioiden, muiden tulehdustilojen ja kudonvaurion yhteydessä nopeasti, jo muutaman tunnin kuluessa, ja pitoisuus voi kaksinkertaistua alle kahdeksan tunnin välein jopa 1000-kertaiseksi viitealueeseen verrattuna. Maksimitaso saavutetaan tyypillisesti noin 50 tunnissa. CRP nousee yleensä enemmän bakteerin aiheuttamissa tulehduksissa kuin virustulehduksissa, mutta kohonnut CRP ei ole minkään tietyn tulehdustilan merkki. Lievät tulehdukset ja virusinfektiot nostavat CRP:n tyypillisesti noin tasolle 10–50 mg/l, aktiiviset tulehdukset ja bakteeri-infektiot pitoisuuksiin 50–200 mg/l ja vakavat infektiot tai traumat tasolle > 200 mg/l. CRP:n biologinen puoliintumisaika on 19 tuntia, joten tulehduksen rauhoituttua CRP-taso laskee nopeasti. CRP on siis herkkä, mutta epäspesifinen tulehdustilan indeksi.

<fi.wikipedia.org>. Luettu 6.4.2015

Ratkaisu.

- Pitoisuus voi kaksinkertaistua kahdeksassa tunnissa. Kyseessä on eksponentiaalinen kasvu, joka noudattaa yhtälöä

$$C(x) = q^x C(0).$$

1p

Selvitetään suhdeluku q , kun eksponentti x on aika tunteina.

$$\begin{aligned} C(8) &= q^8 C(0) \\ 2C(0) &= q^8 C(0) \quad || : C(0) \\ q^8 &= 2 \\ q &= \sqrt[8]{2} \\ q &= 1,09050 \dots \end{aligned}$$

1p(2p)

Lasketaan pitoisuus kuuden tunnin kuluttua. $x = 6$, $C(0) = 40$.

$$\begin{aligned} C(6) &= 1,09050 \dots^6 \cdot 40 \\ &= 67,2717 \dots \\ &\approx 67. \end{aligned}$$

Vastaus: Pitoisuus voi olla enintään 67.

1p(3p)

b) Pitoisuus puoliintuu 19 tunnissa. Kyseessä on eksponentiaalinen väheneminen, joka noudattaa yhtälöä

$$C(x) = r^x C(0).$$

Selvitetään suhdeluku r , kun eksponentti x on aika tunteina.

$$\begin{aligned} C(19) &= \frac{1}{2} C(0) \\ \frac{1}{2} C(0) &= r^{19} C(0) \quad \| : C(0) \\ r^{19} &= \frac{1}{2} \\ r &= \sqrt[19]{\frac{1}{2}} \\ &= 0,96417 \dots \end{aligned}$$

1p(4p)

Ratkaistaan, missä ajassa CRP-arvo laskee arvosta 100 arvoon 10.

$$\begin{aligned} C(0) &= 100 \\ C(x) &= 10 \\ 10 &= r^x \cdot 100 \quad \| : 100 \\ 0,1 &= r^x \quad \| \lg(\quad) \\ \lg(0,1) &= \lg(r^x) \\ \lg(0,1) &= x \lg(r) \quad \| : \lg(r) \\ x &= \frac{\lg(0,1)}{\lg(r)} \\ &= \frac{\lg(0,1)}{\lg(0,96417 \dots)} \\ &= 63,11 \dots \\ &\approx 64 \quad (\text{h}) \end{aligned}$$

1p(5p)

Huom! Pyöritys tehdään ylöspäin, koska kyseessä on alaraja. Kuluva aika on siis 64 tuntia, eli 2 vuorokautta ja 16 tuntia, joten CRP-pitoisuus voi saavuttaa rajan aikaisintaan torstaina klo. 04.00.

Vastaus: CRP-pitoisuus voi laskea arvoon 10 aikaisintaan torstaina klo 04.00.

1p(6p)

9. Suora L_1 kulkee pisteiden $(3,0)$ ja $(0,5)$, suora L_2 pisteiden $(6,0)$ ja $(0,3)$, ja suora L_3 pisteiden $(2,0)$ ja $(2,2)$ kautta. Nämä kolme suoraa ja koordinaattiakselit rajoittavat monikulmion, jonka yksi kärki on $(0,0)$. Etsi funktion $f(x, y) = 2x - 4y + 10$ suurin ja pienin arvo tässä monikulmiossa.

Ratkaisu.

Määritetään suorien yhtälöt. Pisteiden (x_0, y_0) kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Suora L_1 : Pisteet $(3,0)$ ja $(0,5)$.

$$k_1 = \frac{5 - 0}{0 - 3} = -\frac{5}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 3)$$

$$y = -\frac{5}{3}x + 5.$$

Suora L_2 : Pisteet $(6,0)$ ja $(0,3)$.

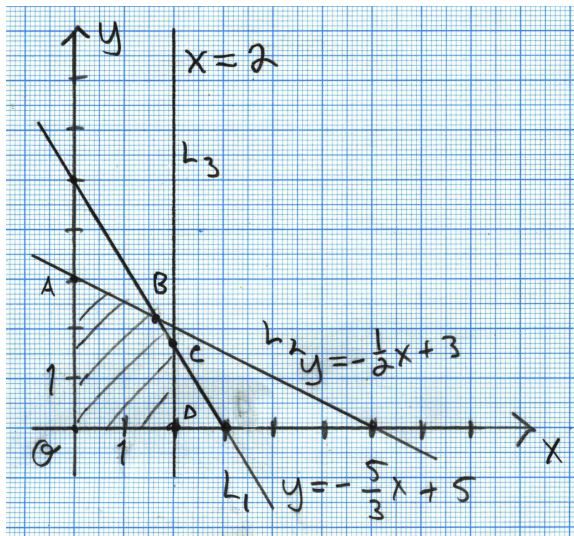
$$k_2 = \frac{3 - 0}{0 - 6} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 6)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

1p

Suora L_3 : Pisteet $(2,0)$ ja $(2,2)$. Suoran yhtälö on $x = 2$. Piirretään suorat koordinaatistoon.



Lasketaan suorien leikkauspisteet. L_1 ja L_2 :

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + 5 & (1) \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3}x + 5 &= -\frac{1}{2}x + 3 \\ -\frac{7}{6}x &= -2 \quad \parallel \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) \\ x &= \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = \frac{12}{7}$ yhtälöön (2).

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{7} + 3 = \frac{15}{7}.$$

Leikkauspiste on $B = \left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$. 1p(2p)

Suorat L_2 ja L_3 .

$$\begin{cases} x = 2 & (3) \\ y = -\frac{5}{3}x + 5 & (4) \end{cases}$$

Sijoitetaan (4) yhtälöön (3).

$$y = -\frac{5}{3} \cdot 2 + 5 = \frac{5}{3}.$$

Leikkauspiste on $C = \left(2, \frac{5}{3}\right)$. 1p(3p)

Kuvaan merkityt pisteet A ja D ovat $A = (0, 3)$ ja $D = (2, 0)$. 1p(4p)

Lineaarinen optimointi: Funktion $f(x, y) = 2x - 4y + 10$ suurin ja pienin arvo monikulmiossa $OABCD$ löytyvät kärkipisteistä. Lasketaan arvot.

$$f(0, 0) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 10 = 10$$

$$f(0, 3) = -2 \leftarrow \text{pienin arvo}$$

$$f\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right) = \frac{10}{7} \quad (= 1,428\dots)$$

$$f\left(2, \frac{5}{3}\right) = \frac{22}{3} \quad (= 7,333\dots)$$

$$f(2, 0) = 14 \leftarrow \text{suurin arvo} \quad \text{1p(5p)}$$

Vastaus: Suurin arvo on $f(3, 0) = 14$ ja pienin arvo on $f(0, 3) = -2$. 1p(6p)

10. a) Annika sai 58 000 € perintönä. Kuinka monta euroa Annika maksaa perinnöstä veroa? Mikä on hänen perintöveroprosenttinsa?
 b) Piirrä kuvaaja, josta käy ilmi perintöveron suuruus prosentteina perinnön arvon funktiona, kun perinnön suuruus on välillä 0 € ja 60 000 €.

Verotettavan osuuden arvo, €	Veron vakioerä alarajan kohdalla, €	Veron alarajan ylimenevästä osasta, %
20000 – 40000	100	8
40000 – 60000	1700	11
60000 – 200000	3900	14
200000 – 1000000	23500	17
1000000 –	159500	20

(Perintö- ja lahjaverolaki, 378/1940, §14)

Ratkaisu.

- a) Vero määräytyy arvovälin 40 000 € - 60 000 € mukaan. Vakioerä on 1700 €. Alarajasta ylimenevän osan suuruus on 1p

$$58\,000\text{ €} - 40\,000\text{ €} = 18\,000\text{ €}.$$

Tällöin veron osuus on 11% tästä. Kokonaisvero on siten

$$1700\text{ €} + 0,11 \cdot 18\,000\text{ €} = 3680\text{ €}.$$
1p(2p)

Perintöveroprosentti on tällöin

$$\frac{3680\text{ €}}{58\,000\text{ €}} = 0,0634\dots \approx 6,3\%.$$

Vastaus: Annika maksaa veroa 3680 € ja perintöveroprosentti on 6,3%. 1p(3p)

- b) Lasketaan veroprosentit rajakohdissa.

$$20\,000\text{ €} : \frac{100\text{ €}}{20\,000\text{ €}} = 0,005 = 0,5\%$$

$$40\,000\text{ €} : \frac{1700\text{ €}}{40\,000\text{ €}} = 0,0425 = 4,25\%$$

$$60\,000\text{ €} : \frac{3900\text{ €}}{60\,000\text{ €}} = 0,065 = 6,5\%.$$
1p(4p)

Muodostetaan lausekkeet veroprosenteille väleillä 20 000 € - 40 000 € sekä 40 000 € - 60 000 € .

$$y = \frac{100 + (x - 20000) \cdot 0,08}{x} \quad (1. \text{ väli})$$

$$y = \frac{1700 + (x - 40000) \cdot 0,11}{x} \quad (2. \text{ väli})$$

Lasketaan arvot molemmissa väleissä kolmessa eri pisteessä, jotta voidaan piirtää kuvaaja.

$$y(25000) = \frac{100 + (25000 - 20000) \cdot 0,08}{25000} = 0,02 = 2\% \quad \Rightarrow (25000, 2\%)$$

$$y(30000) = 0,03 = 3\% \quad \Rightarrow (30000, 3\%)$$

$$y(35000) = 0,0371 \dots \approx 3,7\% \quad \Rightarrow (35000; 3,7\%)$$

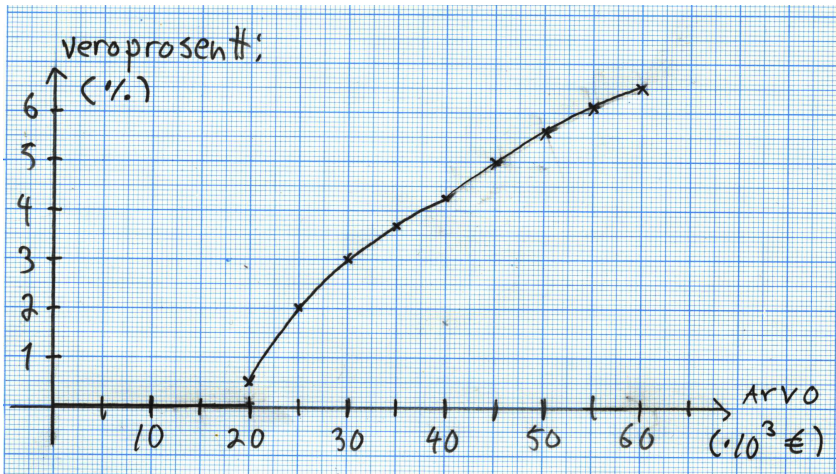
$$y(45000) = \frac{1700 + (45000 - 40000) \cdot 0,11}{45000} = 0,05 = 5\% \quad \Rightarrow (45000, 5\%)$$

$$y(50000) = 0,056 = 5,6\% \quad \Rightarrow (50000; 5,6\%)$$

$$y(55000) = 0,0609 \dots \approx 6,1\% \quad \Rightarrow (55000; 6,1\%)$$

1p(5p)

Piirretään perintöveron suuruus prosentteina perinnön arvon funktiona:



1p(6p)

11. a) Määritellään funktio $f(x) = \cos(x) + 1$. Määritä funktion suurin ja pienin arvo.
 b) Määritellään funktio $g(x) = A \sin(x) + B$, missä $A, B > 0$ ovat vakioita. Mitä kaikkia arvoja tämä funktio voi saada?

Ratkaisu.

a)

$$f(x) = \cos(x) + 1.$$

Funktion $\cos(x)$ pienin arvo on -1 ja suurin arvo on 1 . Näin ollen $f(x)$:n pienin arvo on 1p

$$\underline{\underline{f(x)_{\min} = -1 + 1 = 0}} \quad \text{1p(2p)}$$

ja suurin arvo on

$$\underline{\underline{f(x)_{\max} = 1 + 1 = 2.}} \quad \text{1p(3p)}$$

b)

$$g(x) = A \sin(x) + B, \quad A, B > 0.$$

Funktion $\sin(x)$ pienin arvo on -1 ja suurin arvo on 1 . Näin ollen $g(x)$:n pienin arvo on 1p(4p)

$$g(x)_{\min} = A \cdot (-1) + B = B - A$$

ja suurin arvo on

$$g(x)_{\max} = A \cdot 1 + B = A + B. \quad \text{1p(5p)}$$

Funktio g on jatkuva, joten se saa kaikki arvot väliltä

$$\underline{\underline{[B - A, A + B]}}. \quad \text{1p(6p)}$$

12. Vieraalla planeetalla putoavan kappaleen kulkema matka s on suoraan verrannollinen kuluneen ajan t toiseen potenssiin kaavan $s = 10t^2$ mukaisesti.
- a) Kopioi oheinen taulukko vastauspaperiisi ja täydennä tyhjät kohdat. (2p.)
- b) Merkitse koordinaatistoon a-kohdan taulukosta pisteet, joiden koordinaatit ovat $(\lg t, \lg s)$. Mitä havaitset? Selitä. (4p.)

t	$\lg t$	$\lg s$
1	0	1
2		
4		
10		
100		

Ratkaisu.

a)

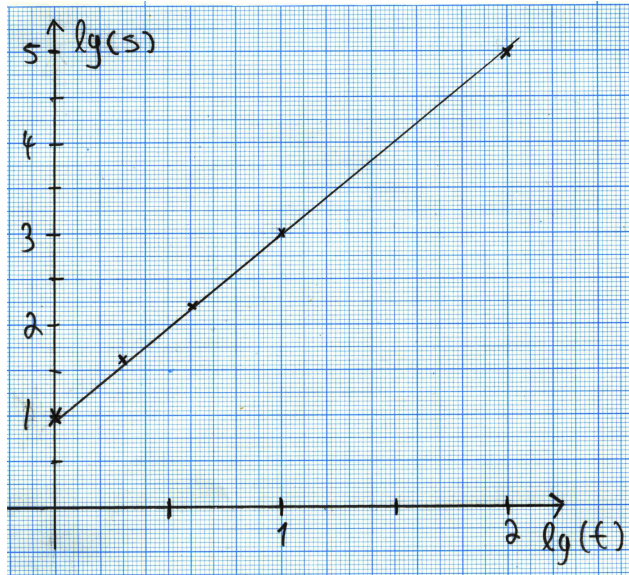
t	$\lg t$	$\lg s$	
1	0	1	
2	0,3010 ...	1,6020 ...	$s = 10 \cdot 2^2 = 40$
4	0,6020 ...	2,2041 ...	$s = 10 \cdot 4^2 = 160$
10	1	3	$s = 10 \cdot 10^2 = 1000$
100	2	5	$s = 10 \cdot 100^2 = 100000$

2p

Pisteytys:

- =1p, kun vähintään kaksi kohtaa oikein
- =1p(2p), kun kaikki kohdat oikein

b)



2p(4p)

Pisteytys:

- 1p(3p), kun pisteet oikein piirretty
- 1p(4p), kun suora sovitettu

Pisteet sijaitsevat likimain samalla suoralla. Tutkitaan tehtävänannossa mainittua yhteyttä s :n ja t :n välillä.

$$s = 10t^2 \quad || \lg(\quad)$$

$$\lg(s) = \lg(10t^2)$$

$$\lg(s) = \lg(10) + \lg(t^2)$$

$$\lg(s) = 2\lg(t) + 1$$

1p(5p)

Merkitään $y = \lg(s)$ ja $x = \lg(t)$.

$$y = 2x + 1$$

Kyseessä on nousevan suoran yhtälö, joten tuloksista pitäisikin tulla suora. 1p(6p)

13. Uuteen 20-kerroksiseen tornitaloon asennettiin kolme hissiä. Todennäköisyys, että hissi tilataan johonkin kerroksista 2-20, on 0,025 kullekin. Todennäköisyys, että hissi tilataan kerrokseen 1, on 0,4 ja kellarikerroksessa sijaitsevaan parkkihalliin 0,125. Ruuhkattomina aikoina hissit palaavat seuraavanlaisille odotuspaikoilleen: yksi hissi on kerroksessa 1, yksi hissi on kerroksessa 8 ja yksi hissi on kerroksessa 16. Näistä hissiin haluava voi astua siihen suoraan. Jos tilaa hissin muualta, odotteluun kuluu 10 sekuntia ja lisäksi 5 sekuntia jokaista kerrosta kohden, jonka hissi joutuu kulkemaan. Kuinka suurella todennäköisyydellä tilattua hissiä joutuu odottamaan ruuhkattomana aikana yli 22 sekuntia?

Ratkaisu.

Taulukoidaan hissin odotusajat eri kerroksesta tilattaessa ruuhkattomana aikana, jos oletetaan, että aina tilataan lähin hissi.

kerros	odotusaika (s)	kerros	odotusaika (s)
p	$10 + 5 = 15$	11	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
1	0	12	$10 + 4 \cdot 5 = 30$
2	$10 + 5 = 15$	13	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
3	$10 + 2 \cdot 5 = 20$	14	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
4	$10 + 3 \cdot 5 = 25$	15	$10 + 5 = 15$
5	$10 + 3 \cdot 5 = 25$	16	0
6	$10 + 2 \cdot 5 = 20$	17	$10 + 5 = 15$
7	$10 + 5 = 15$	18	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
8	0	19	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
9	$10 + 5 = 15$	20	$10 + 4 \cdot 5 = 30$
10	$10 + 2 \cdot 5 = 20$		

3p

Pisteytys:

- 1p, kun vähintään yhdessä nollassa sekunnista poikkeavasta laskettu odotusaika oikein
- 1p(2p), kun suurin osa odotusajoista oikein
- 1p(3p), kun loputkin odotusajat oikein

Kerrokset, joissa voi joutua odottamaan yli 22 sekuntia ovat siis

4, 5, 11, 12, 13, 19, 20

1p(4p)

Jokaisessa näissä kerroksessa hissin tilaamisen todennäköisyys on 0,025.

1p(5p)

Kysytty todennäköisyys on siten

$$\begin{aligned} & P(4 \text{ tai } 5 \text{ tai } 11 \text{ tai } 12 \text{ tai } 13 \text{ tai } 19 \text{ tai } 20) \\ &= P(4) + P(5) + P(11) + P(12) + P(13) + P(19) + P(20) \\ &= 7 \cdot 0,025 \\ &= 0,175 \\ &= 17,5\%. \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että hissiä joutuu odottamaan yli 22 sekuntia on 17,5%.

1p(6p)