# Tiesitkö tämän?

## MAFY-valmennuksen asiakkaat veivät

**37 %**

**Helsingin suomenkielisen yleislääketieteellisen opiskelupaikoista vuonna 2017.**

**31 %**

**Aalto-yliopiston tuotantotalouden opiskelupaikoista vuonna 2017.**

## 40% pk-seudun lukioista käyttää Mafynettiä

Mafynetti-kertauskurssit julkaistiin lukioiden käyttöön syksyllä 2017 ja nyt jo 40% pk-seudun lukioista on ottanut Mafynetin käyttöönsä! Paljon toivotut MAFY-valmennuksen oppimateriaalit lukion ensimmäiselle vuosikurssille julkaistaan lukuvuodelle 2018-2019.

Kysy lisää mafy.fi/yhteydenotto.

# Lyhyt matematiikka, kevät 2018

Mallivastaukset, 26.3.2018

**Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet** filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista pk-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen ja Joonas Suorsa. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

**MAFY-valmennus on** Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.
- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.



MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
`www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot`

1. Ratkaise yhtälöt a) $x^2 = 64$, b) $2^y = 64$ ja c) $z^3 = 64$.

*Ratkaisu.*

a)

$\boxed{\text{Tapa I}}$

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 64 \\
x^2 &= 8^2 && \text{1p} \\
x &= \pm 8 && \text{1p(2p)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Tapa II}}$

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 64 \\
x &= \pm\sqrt{64} && \text{1p} \\
x &= \pm 8 && \text{1p(2p)}
\end{aligned}
$$

b)

$\boxed{\text{Tapa I}}$

$$
\begin{aligned}
2^y &= 64 \\
2^y &= 8^2 \\
2^y &= (2^3)^2 \\
2^y &= 2^{3\cdot 2} \\
2^y &= 2^6 && \text{1p(3p)} \\
y &= 6 && \text{1p(4p)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Tapa II}}$

Jaetaan luku 64 tekijöihin

$$
\begin{aligned}
64 &= 2\cdot 32 = 2\cdot 2\cdot 16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 8 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 4 \\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6 && \text{1p(3p)} \\
2^y &= 64 \\
2^y &= 2^6 \\
y &= 6 && \text{1p(4p)}
\end{aligned}
$$

c)

Tapa I

$$z^3 = 64$$
$$z^3 = 2^6$$
$$z^3 = 2^{2\cdot 3}$$
$$z^3 = (2^2)^3$$
$$z^3 = 4^3 \qquad \text{1p(5p)}$$
$$\underline{\underline{z = 4}} \qquad \text{1p(6p)}$$

Tapa II

$$z^3 = 64$$
$$z^3 = \underbrace{2\cdot 2}_{4}\cdot\underbrace{2\cdot 2}_{4}\cdot\underbrace{2\cdot 2}_{4}$$
$$z^3 = 4\cdot 4\cdot 4 \qquad \text{1p(5p)}$$
$$\underline{\underline{z = 4}} \qquad \text{1p(6p)}$$

2. Selvitä seuraavissa tilanteissa se, kummalla tavalla loppuhinta on korkeampi vai ovatko loppuhinnat yhtä suuria. Kaikissa tilanteissa alkuperäinen hinta on 299 euroa. Hintoja ei tarvitse laskea, jos osaat perustella vastauksesi jollakin muulla tavalla.

   a) Tapa 1: tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja nousee vielä uudestaan 10 %.
   Tapa 2: tuotteen hinta nousee 20 %.

   b) Tapa 1: tuotteen hinta laskee ensin 10 % ja nousee sitten 10 %.
   Tapa 2: tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %.

   c) Tapa 1: tuotteen hinta nousee ensin 20 % ja laskee sitten 20 %.
   Tapa 2: tuotteen hinta nousee ensin 30 % ja laskee sitten 30 %.

*Ratkaisu.*

Merkitään tuotteen alkuperäistä hintaa $a$:lla. Merkitään tavan 1 hintoja alaindeksillä 1 ja tavan 2 hintoja alaindeksillä 2.

a) Tapa 1: Kun tuotteen hinta nousee 10 %, välihinta $a_{1v}$ on

$$a_{1v} = 1{,}10a.$$

Kun tämä hinta nousee vielä 10 %, uusi hinta $a_{1u}$ on

$$a_{1u} = 1{,}10a_{1v} = 1{,}10 \cdot 1{,}10a = 1{,}10 \cdot (1 + 0{,}1)a = (1{,}10 + 0{,}11)a = 1{,}21a.$$

Tapa 2: Kun tuotteen hinta nousee 20 %, uusi hinta $a_{2u}$ on

$$a_{2u} = 1{,}20a < 1{,}21a = a_{1u}.$$ 1p

Näin ollen tavalla 1 loppuhinta on suurempi kuin tavalla 2. 1p(2p)

b) Tapa 1: Kun tuotteen hinta laskee ensin 10 %, joten välihinta $a_{1v}$ on

$$a_{1v} = 0{,}90a.$$

Kun tämä hinta nousee sitten 10 %, uusi hinta $a_{1u}$ on

$$a_{1u} = 1{,}10a_{1v} = 1{,}10 \cdot 0{,}90a.$$

Tapa 2: Kun tuotteen hinta nousee ensin 10 %, joten välihinta $a_{2v}$ on

$$a_{2v} = 1{,}10a.$$

Kun tämä hinta laskee sitten 10 %, uusi hinta $a_{2u}$ on

$$a_{2u} = 0{,}90a_{2v} = 0{,}90 \cdot 1{,}10a = 1{,}10 \cdot 0{,}90a = a_{1u}$$ 1p(3p)

Näin ollen tavalla 1 ja tavalla 2 loppuhinnat ovat keskenään yhtä suuret. 1p(4p)

c) Tapa 1: Kun tuotteen hinta nousee 20 %, välihinta $a_{1v}$ on

$$a_{1v} = 1{,}20a.$$

Kun tämä hinta laskee sitten 20 %, uusi hinta $a_{1u}$ on

$$\begin{aligned} a_{1u} &= 0{,}80a_{1v} = 0{,}80 \cdot 1{,}2a = 8 \cdot 0{,}12a \\ &= 8 \cdot (0{,}1 + 0{,}02)a = (0{,}8 + 0{,}16)a = 0{,}96a. \end{aligned}$$

Tapa 2: Kun tuotteen hinta nousee 30 %, välihinta $a_{2v}$ on

$$a_{2v} = 1{,}30a.$$

Kun tämä hinta laskee sitten 30 %, uusi hinta $a_{2u}$ on

$$\begin{aligned} a_{2u} &= 0{,}70 \cdot a_{2v} = 0{,}70 \cdot 1{,}30a = 7 \cdot 0{,}13a \\ &= 7 \cdot (0{,}1 + 0{,}03)a = (0{,}7 + 0{,}21)a = 0{,}91a. \end{aligned}$$ 1p(5p)

Näin ollen tavalla 1 loppuhinta on suurempi kuin tavalla 2. 1p(6p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

Lisäselitys: Kun tuotteen hintaa nostetaan $p$ prosenttia, sitä nostetaan siis $p$ sadasosaa verrattuna alkuperäiseen. Yksi prosentti, eli yksi sadasosa alkuperäisestä hinnasta on $\frac{a}{100}$, eli $p$ prosenttia alkuperäisestä hinnasta on $p \cdot \frac{a}{100}$. Jos alkuperäinen hinta on siis $a$, ja sitä nostetaan $p$ prosenttia, uusi hinta on

$$a + p \cdot \frac{a}{100} = a + \frac{pa}{100} = a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a.$$

Vastaavasti jos hintaa lasketaan $p$ prosenttia, uusi hinta on

$$a - p \cdot \frac{a}{100} = a - \frac{pa}{100} = a - \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 - \frac{p}{100}\right) a.$$

Jos siis esimerkiksi hintaa nostetaan 25 %, uusi hinta on

$$\left(1 + \frac{25}{100}\right) a = 1{,}25a,$$

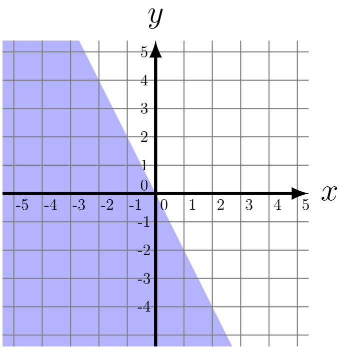
ja jos hintaa esimerkiksi lasketaan 15 %, uusi hinta on

$$\left(1 - \frac{15}{100}\right) a = 0{,}85a.$$

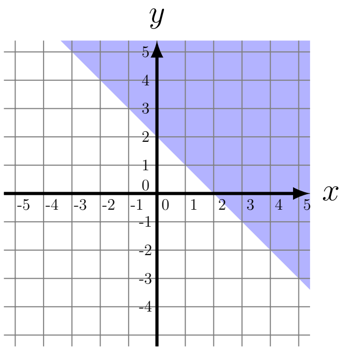
3. Yhdistä kuhunkin $xy$-tason sinisellä varjostettuun alueeseen sitä vastaava epäyhtälö. Kolme epäyhtälöä jää käyttämättä.

| | | |
|---|---|---|
| (A) $x > -y + 2$ | (B) $y < -2x$ | (C) $y > x - 4$ |
| (D) $x < -2$ | (E) $y > 2$ | (F) $x + y > 0$ |
| (G) $2x + y > 0$ | (H) $y < 3x + 4$ | (I) $x + y < 2$ |

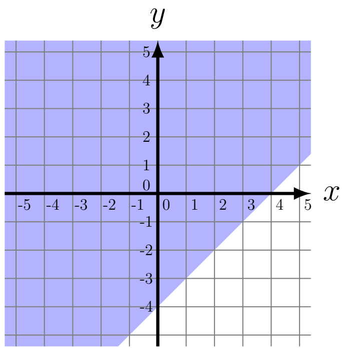
1)



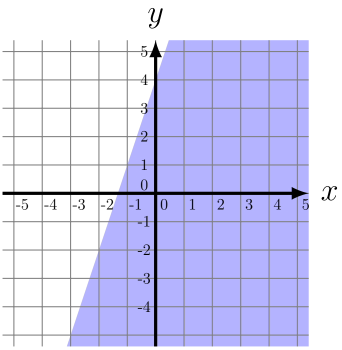

2)



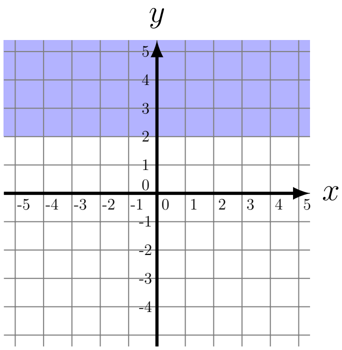

3)



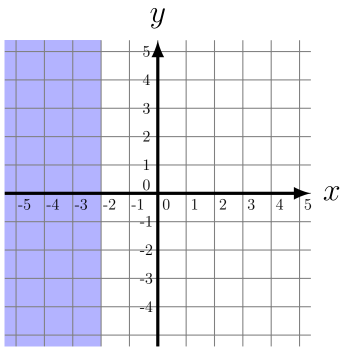

4)




5)




6)




*Ratkaisu.*

| | | |
|---|---|---|
| 1) - B | 2) - A | 3) - C |
| 4) - H | 5) - E | 6) - D |

Pisteytys: 1p/kohta 6p

Perustelut:

1) Rajasuora on

$$y = -2x$$

ja aluetta vastaa epäyhtälö

$$y < -2x.$$

2) Rajasuora on

$$y = -x + 2$$

ja aluetta vastaa epäyhtälö

$$\begin{aligned} y &> -x + 2 \\ x + y &> 2 \\ x &> -y + 2. \end{aligned}$$

3) Rajasuora on

$$y = x - 4$$

ja aluetta vastaa epäyhtälö

$$y > x - 4.$$

4) Rajasuora on

$$y = 3x + 4$$

ja aluetta vastaa epäyhtälö

$$y < 3x + 4.$$

5) Rajasuora on $y = 2$ ja aluetta vastaa epäyhtälö

$$y > 2.$$

6) Rajasuora on $x = -2$ ja aluetta vastaa epäyhtälö

$$x < -2.$$

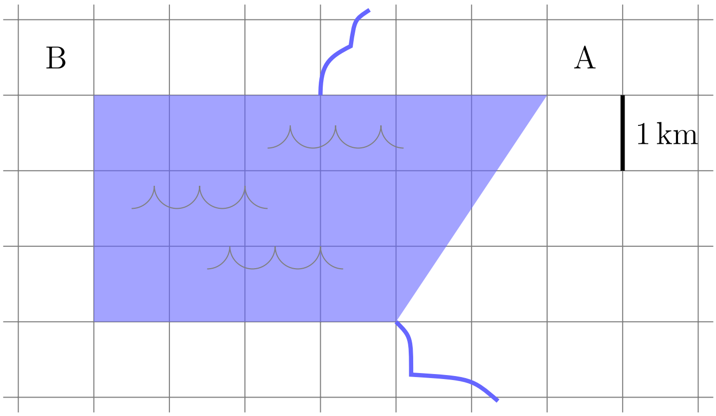
Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

4. Vuonna 1902 säädettiin *Laki, sisältävä määräyksiä välirajasta vedessä ja vesialueen jaosta* (23.7.1902/31), joka on edelleen voimassa. Seuraavassa on lain ensimmäinen pykälä.

> 1 § Järven rannalla sijaitsevilla kylillä olkoon osa järveen rajalinjan ja kylän tilusten mukaan, siten että kukin vallitsee sen osan vettä ja veden alaista pohjaa, joka on lähempänä omaa rantaa kuin toisen.

Nykykielellä ilmaistuna: Kylän vesialuetta ovat ne järven kohdat, jotka ovat lähempänä tämän kylän rantaa kuin muiden kylien rantoja.

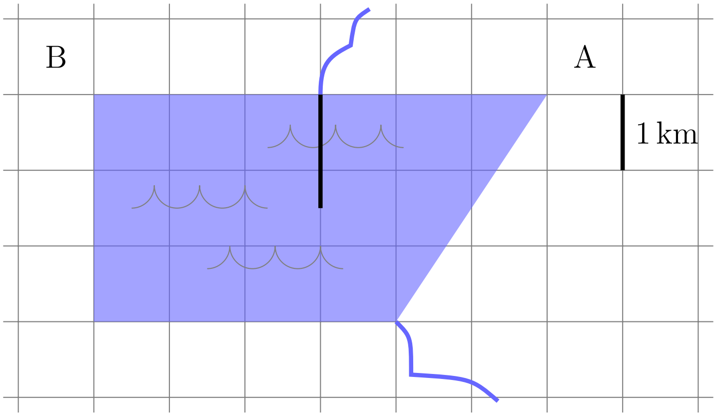
Alla olevassa havainnekartassa esiintyvät kylät A ja B, joiden maaraja muodostuu kahdesta joesta. Piirrä karttaan kylien A ja B välinen vesiraja sekä arvioi kylien vesialueiden pinta-alat yhden neliökilometrin tarkkuudella.



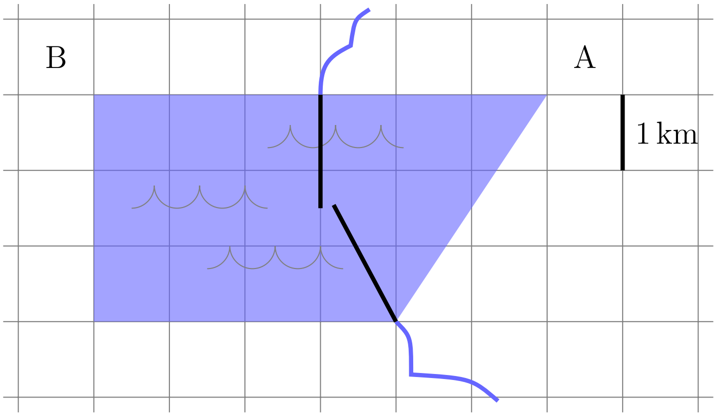

*Ratkaisu.*

Huomautus lukijalle: Tässä kuva on piirretty vaiheittain lukemisen helpottamiseksi. Ratkaisussa olisi tietysti vain yksi kuva.

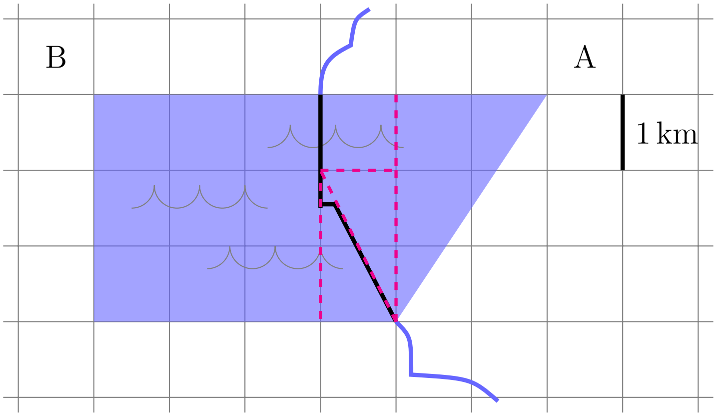
Piirretään sellainen jana ylemmästä joesta lähtien, joka on yhtä kaukana kylän A ja kylän B rannoista, eli kulkee suoraan alaspäin. Sen pituus on 1,5 ruutua, minkä jälkeen sen täytyy kääntyä, koska kyseisestä pisteestä alaspäin kylän B alaranta olisi lähempänä kuin kylän A kumpikaan ranta.




Piirretään sitten alemmasta joesta lähtien jana, joka on yhtä kaukana kylän A ja kylän B rannoista. Se jatkuu niin pitkälle, kunnes kylän A yläranta on lähempänä kuin kummankaan kylän alaranta, eli pystysuunnassa katsottuna vesialueen puoleen väliin.




Pienellä alueella janojen päätepisteiden välissä vesiraja on vaakasuora, sillä kylän A ylempi ranta ja kylän B alempi ranta ovat tällöin yhtä kaukana rajasta.




3p

Oikea kuva = 3p. Saattaa saada myös 3p laskelmiin riittävän tarkasta kuvasta, jossa on vain kaksi janaa, koska YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 27.03.2018) siitä oli saanut täydet pisteet.

Arvioidaan, että janat risteävät likimain ruutujen risteyksessä. Näin ollen kylän B vesialueen pinta-ala on

$$A_B = 9 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 10 \quad (\mathrm{km}^2)$$

1p(4p)

ja kylän A vesialueen pinta-ala on

$$A_A = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 5 \quad (\mathrm{km}^2).$$

1p(5p)

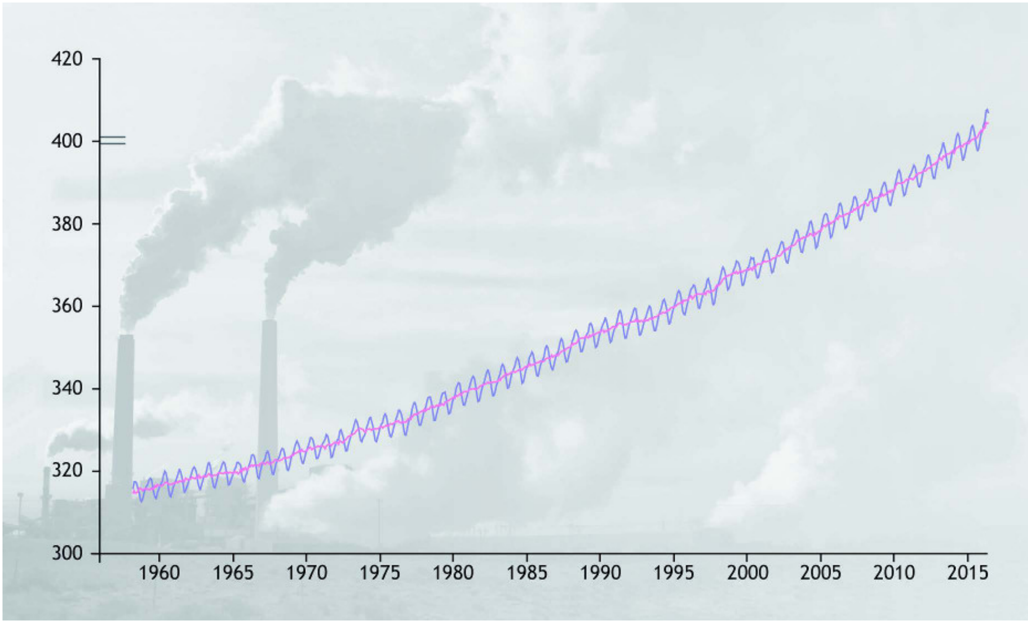
Vastaus: Kylän A vesialueen pinta-ala on noin $5\,\mathrm{km}^2$ ja kylän B vesialueen pinta-ala on noin $10\,\mathrm{km}^2$.

1p(6p)

Lisäselitys: Kuvaan on merkitty katkoviivalla ne kuviot, minkä avulla pinta-alat on laskettu. Kylän B vesialue muodostuu neliöstä ja kolmiosta. Kylän A vesialue muodostuu pienestä neliöstä ja kahdesta kolmiosta.

5. Mauna Loa -observatoriossa Havaijilla on mitattu ilmakehän hiilidioksidipitoisuutta jo vuodesta 1958 alkaen. Maaliskuussa 1958 mittaukset osoittivat ilmakehän hiilidioksidipitoisuudeksi noin 316 ppm (*parts per million* eli miljoonasosaa). Maaliskuussa vuonna 2016 pitoisuudeksi mitattiin noin 405 ppm.

   a) Kuinka monta prosenttia hiilidioksidin määrä ilmakehässä on lisääntynyt edellä mainittujen mittauskertojen välillä?
   b) Tutkija mallintaa hiilidioksidipitoisuuden kasvua suoralla $y = kt + 316$. Tässä $y$ kuvaa hiilidioksidipitoisuutta (yksikkönä ppm) ja $t$ kulunutta aikaa vuoden 1958 maaliskuusta alkaen (yksikkönä vuosi). Määritä se suoran kulmakerroin $k$, jolla malli antaa mitatun tuloksen maaliskuussa 2016.
   c) Minkä arvon b-kohdan mallisi antaa maaliskuun 2020 hiilidioksidipitoisuudelle?




Lähde: <www.climate.gov>.
Luettu: 19.3.2017. Käännös: YTL.

*Ratkaisu.*

$$P(1) = 316\,\text{ppm}$$
$$P(2) = 405\,\text{ppm}$$

a) Lasketaan kasvuprosentti.

$$\frac{P(2)-P(1)}{P(1)} = \frac{405-316}{316} = 0{,}28164\dots \approx 28{,}2\,\%$$ 1p

Vastaus: Hiilidioksidin määrä on lisääntynyt 28,2 %. 1p(2p)

b)

$$y = kt + 316$$

Kulunut aika on $t = 2016 - 1958 = 58$.
Ratkaistaan $k$ kun tiedetään, että

$$\begin{aligned} y(58) &= 405 \\ k \cdot 58 + 316 &= 405 \\ 58k &= 405 - 316 \quad \| : 58 \\ k &= \frac{89}{58} \\ &= 1{,}53448\dots \\ &\approx 1{,}53 \end{aligned}$$ 1p(3p)

Vastaus: kulmakerroin on $k = \frac{89}{58} \approx 1{,}53$. 1p(4p)

c) Maaliskuussa 2020 aika

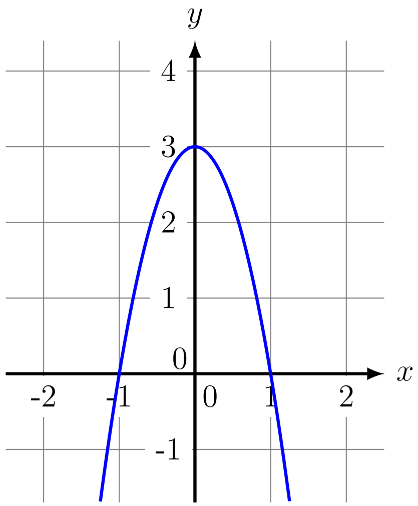
$$t = 2020 - 1958 = 62.$$

Lasketaan kysytty arvo.

$$y(62) = \frac{89}{58} \cdot 62 + 316 = 411{,}13\dots \approx 411\,(\text{ppm}).$$ 1p(5p)

Vastaus: Malli antaa pitoisuudelle arvon 411 ppm. 1p(6p)

6. a) Olkoon $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 0$.
   b) Alla olevassa kuviossa on polynomifunktion $g(x)$ kuvaaja. Ratkaise yhtälö $g'(x) = 0$. Perustele vastauksesi kuvion avulla.
   c) Millä muuttujan $x$ arvoilla sekä $f'(x)$ että $g'(x)$ ovat pienempiä kuin nolla?




*Ratkaisu.*

a)

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

Derivoidaan $f(x)$.

$$f'(x) = 4x - 2$$ 1p

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x - 2 &= 0 \\ 4x &= 2 \quad \| : 4 \\ x &= \frac{2}{4} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$ 1p(2p)

b) Kohdassa, jossa $g'(x) = 0$, on kuvaajalle $y = g(x)$ piirretyn tangentin kulmakerroin 0. 1p(3p)

Tämä kohta on paraabelin huipun kohdalla. Kuvaajan perusteella yhtälön ratkaisu on

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 0}} \end{aligned}$$

1p(4p)

c) i) Ratkaistaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \\ 4x - 2 &< 0 \\ 4x &< 2 \quad \| : 4 \\ x &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ii) Kuvaajasta nähdään, että funktio $g$ on vähenevä, kun $x \geq 0$. Täsmälleen kohdassa $x = 0$ derivaatta on nolla, mutta sen oikealla puolella $g'(x) < 0$. Näin ollen $g'(x) < 0$, kun

$$x > 0.$$

1p(5p)

i) ja ii) ovat yhtä aikaa voimassa kun

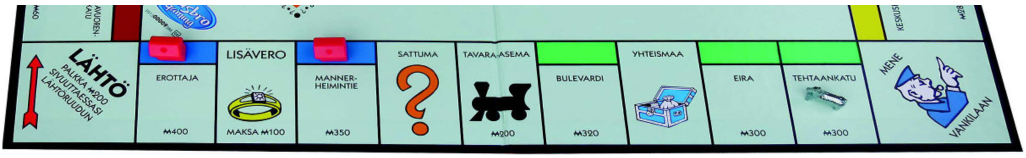
$$\underline{\underline{0 < x < \frac{1}{2}}}.$$

1p(6p)

7. Monopoly-pelissä pelaaja heittää kahta noppaa ja siirtää pelinappulaansa silmälukujen summan verran.

   a) Pelaaja on Tehtaankadulla. Jos hänen heittämiensä noppien silmälukujen summa on kuusi tai kahdeksan, niin hän joutuu Mannerheimintiellä tai Erottajalla sijaitsevaan toisen pelaajan omistamaan hotelliin. Kuinka suurella todennäköisyydellä näin tapahtuu?

   b) Monopolyssa on seuraavat säännöt. *Jos pelaaja saa molemmilla nopilla saman silmäluvun, niin hän saa heittää noppia uudelleen. Jos hän saa kolme kertaa peräkkäin molemmilla nopilla saman silmäluvun, niin hän joutuu ylinopeuden vuoksi vankilaan.* Kuinka suurella todennäköisyydellä näin tapahtuu?




*Ratkaisu.*

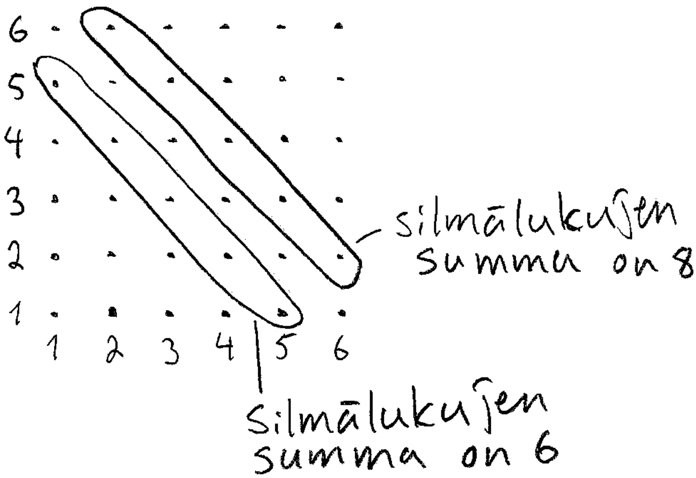
a) Nimetään tapahtumat

$$\begin{array}{ll} A: & \text{"Silmälukujen summa on 6"} \\ B: & \text{"Silmälukujen summa on 8".} \end{array}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(A \text{ tai } B) \tag{1}$$

Piirretään kuva kaikista kahden nopanheiton silmälukujen summista.



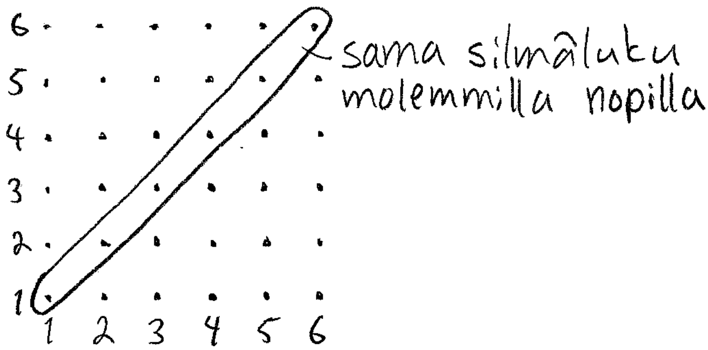
Alkeistapauksia on yhteensä $N = 36$, joista suotuisia A:lle on $N_A = 5$ ja B:lle $N_B = 5$. 1p 1p(2p)

Lasketaan todennäköisyys (1).

$$\begin{aligned} P(A \text{ tai } B) &= \frac{N_A + N_B}{N} \\ &= \frac{5+5}{36} = \frac{5}{18} \\ &= 0{,}2777\cdots \approx 27{,}8\,\% \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{5}{18} \approx 27{,}8\,\%$. 1p(3p)

b)




1p(4p)

Todennäköisyys saada sama silmäluku molemmilla nopilla on

$$P(S) = \frac{N(S)}{N(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$ 1p(5p)

Lisäselitys: Tämän voisi todeta myös siten, että ensimmäisen nopan todennäköisyys olla suotuisa on 1, ja toiselle nopalle todennäköisyys, että silmäluku on sama kuin ensimmäisellä nopalla, on 1/6.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(S \text{ ja } S \text{ ja } S) &= P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) \\ &= P(S)^3 \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{216} \\ &= 0{,}004629\ldots \\ &\approx 0{,}46\,\% \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{216} \approx 0{,}46\,\%$. 1p(6p)

8. Inkeri ottaa 100 000 euron annuiteettilainan kiinteällä 1,2 %:n vuosikorolla ja 10 vuoden laina-ajalla.

   a) Mikä on annuiteetin eli kuukausittaisen maksuerän suuruus? (2 p.)
   b) Inkeri saa 21 000 euron suuruisen perinnön. Viiden vuoden jälkeen lainaa on pankin mukaan jäljellä 51 498,75 euroa. Inkeri sopii pankin kanssa lainaehtoihin tehtävistä muutoksista, jotka tulevat voimaan kuudennen lainavuoden alussa. Ensin lainaa lyhennetään koko perinnön verran ja lisäksi kuukausimaksu korotetaan 1 100 euroon. Kuinka monta kuukautta kestää, ennen kuin hän on maksanut koko lainan takaisin? (4 p.)

*Ratkaisu.*

$$K = 100\,000\,€$$
$$p = 1{,}2$$
$$q = \left(1 + \frac{1{,}2}{12 \cdot 100}\right) = 1{,}001$$ 1p
$$n = 10 \cdot 12 = 120$$

a) Lasketaan kuukausierän suuruus.

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$
$$A = 100\,000\,€ \cdot 1{,}001^{120} \cdot \frac{1-1{,}001}{1-1{,}001^{120}}$$
$$= 884{,}7491\ldots\,€$$
$$\approx 884{,}75\,€$$

Vastaus: Kuukausierän suuruus on 884,75 € 1p(2p)

b) Kuudennen vuoden alussa jäljellä olevan lainan määrä on

$$K = 51\,498{,}75\,€ - 21\,000\,€ = 30\,498{,}75\,€.$$ 1p(3p)

Siitä eteen päin laina lyhennetään loppuun tasaerin $A = 1\,100\,€$, joilloin tietyllä hetkellä jäljellä olevan lainan määrä on

$$V_K = Kq^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q},$$

missä $k$ on kuudennen vuoden alusta lukien maksettujen erien lukumäärä. Laina on kokonaan maksettu, kun

$$V_K = 0$$
$$Kq^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} = 0.$$ 1p(4p)

**Yhtälön ratkaisu - vaihtoehtoinen tapa 1**

Sijoitetaan lukuarvot ja ratkaistaan $k$ laskimella.

$$30\,498{,}75 \cdot 1{,}001^k - 1\,100 \cdot \frac{1-1{,}001^k}{1-1{,}001} = 0$$

Laskimesta saadaan ratkaisu

$$k = 28{,}1318\ldots$$

Vastaus: Laina on maksettu takaisin 29 kuukauden kuluttua 2p(6p)

28 kuukauden jälkeen lainaa on vielä hieman jäljellä, koska $k = 23{,}13\ldots$, joten laina on kokonaan maksettu vasta 29 kuukauden jälkeen. Huom: Tässä on tulkittu, että piti laskea kauanko lainanmaksu kestää lainaehtojen muuttamisen jälkeen. Tehtävänanto voidaan tulkita myös niin, että piti laskea koko laina-aika, jolloin vastaus on 5 vuotta suurempi, eli $5 \cdot 12 + 29 = 89\,(\text{kk})$. Kummalla tahansa vastauksella pitäisi saada täydet pisteet.

**Yhtälön ratkaisu - vaihtoehtoinen tapa 2**

Sijoitetaan lukuarvot ja ratkaistaan yhtälö taulukoimalla eri $k$:n arvoille.

$$V(k) = 30\,498{,}75 \cdot 1{,}001^k - 1\,100 \cdot \frac{1-1{,}001^k}{1-1{,}001} = 0$$

Lasketaan yhtälön vasemman puoleisen lausekkeen arvo $k$:n arvoilla aloittamalla arvosta $k = 20$.

$$k = 20$$
$$V(20) = 30\,498{,}75 \cdot 1{,}001^{20} - 1\,100 \cdot \frac{1-1{,}001^{20}}{1-1{,}001}$$
$$= 8\,904{,}29\ldots$$

$V(20) > 0$, joten valitaan suurempi $k$:n arvo

$$
\begin{aligned}
k &= 30 \\
V(30) &= -2\,055{,}89\cdots < 0 \\
k &= 25 \\
V(25) &= 3\,437{,}89\cdots > 0 \\
k &= 28 \\
V(28) &= 144{,}91\cdots > 0 \\
k &= 29 \\
V(29) &= -954{,}93\cdots < 0
\end{aligned}
$$

Näin ollen laina on kokonaan maksettu 29 maksuerän jälkeen.
Vastaus: Laina on maksettu takaisin 29 kuukauden kuluttua. 2p(6p)

Vastaukseksi kelpaa myös 89 kuukautta (ks. kommentti ratkaisuvaihtoehdon 1 kohdalla)

**Yhtälön ratkaisu - vaihtoehtoinen tapa 3**

$$
\begin{aligned}
Kq^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} &= 0 \\
Kq^k &= A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \\
Kq^k &= \frac{A}{1-q} - \frac{A}{1-q}q^k \\
Kq^k + \frac{A}{1-q}q^k &= \frac{A}{1-q} \\
\left(K + \frac{A}{1-q}\right) q^k &= \frac{A}{1-q} \qquad \| : \left(K + \frac{A}{1-q}\right) \\
q &= \frac{A}{(1-q)(K + \frac{A}{1-q})} \\
1{,}001^k &= \frac{1\,100}{(1-1{,}001)(30\,498{,}75 + \frac{1\,100}{1-1{,}001})} \\
1{,}001^k &= 1{,}028516\ldots \\
k &= \log_{1{,}001} 1{,}028516\ldots \\
k &= 28{,}1318\ldots \\
&\approx 29
\end{aligned}
$$

Vastaus: Laina on maksettu takaisin 29 kuukauden kuluttua. 2p(6p)

Vastaukseksi kelpaa myös 89 kuukautta (ks. kommentti ratkaisuvaihtoehdon 1 kohdalla.)

9. Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1 TAI 9.2. (Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaisesti olet opiskellut.)

9.1 (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet) Tarkastellaan vektoreita $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ ja $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$.

a) Määritä vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen terävä kulma.

b) Merkitään $\bar{w} = 2\bar{i} + t\bar{j}$. Määritä sellainen kerroin $t$, että vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{w}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

9.2 (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet) Tavallista noppaa heitetään 20 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että ykkösiä tulee viidesti tai useammin?

*Ratkaisu.*

9.1 a)

$$\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$$
$$\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$$

Vektorien välisen kulman suuruus saadaan yhtälöstä

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}.$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = 3\cdot 2 + 2\cdot 3 = 12 \qquad \text{1p}$$
$$|\bar{u}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$
$$|\bar{v}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \qquad \text{1p(2p)}$$

Ratkaistaan kysytty kulma.

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}$$
$$\cos\alpha = \frac{12}{13}$$
$$\alpha = 22{,}619\ldots^\circ$$
$$\approx 22{,}6^\circ$$

Vastaus: Vektorien välinen terävä kulma on 22,6°. 1p(3p) b)

$$\bar{w} = 2\bar{i} + t\bar{j}$$

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{w} &= 0 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot t &= 0 \\ 2t &= -6 \quad \| : 2 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

1p(4p)
1p(5p)

Vastaus: Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan arvolla $t = -3$. 1p(6p)

9.2 Kyseessä on toistokoe, jossa jokaisella heitolla ykkönen tulee todennäköisyydellä

$$P = \frac{1}{6}.$$

Sen vastatapahtuman todennäköisyys on

$$\overline{P} = 1 - P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

1p

Todennäköisyys saada $k$ kappaletta ykkösiä $n$:llä heitolla on binomitodennäköisyys

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

1p(2p)

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(\text{ykkönen 5 kertaa tai useammin}) \\ &= 1 - P(\text{ykkönen 0, 1, 2, 3 tai 4 kertaa}) \\ &= 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)] \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} + \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \right. \\ &\quad \left. + \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} + \binom{20}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16}\right] \\ &= 0{,}23125\ldots \\ &\approx 23{,}1\,\% \end{aligned}$$

1p(3p)
1p(4p)
1p(5p)

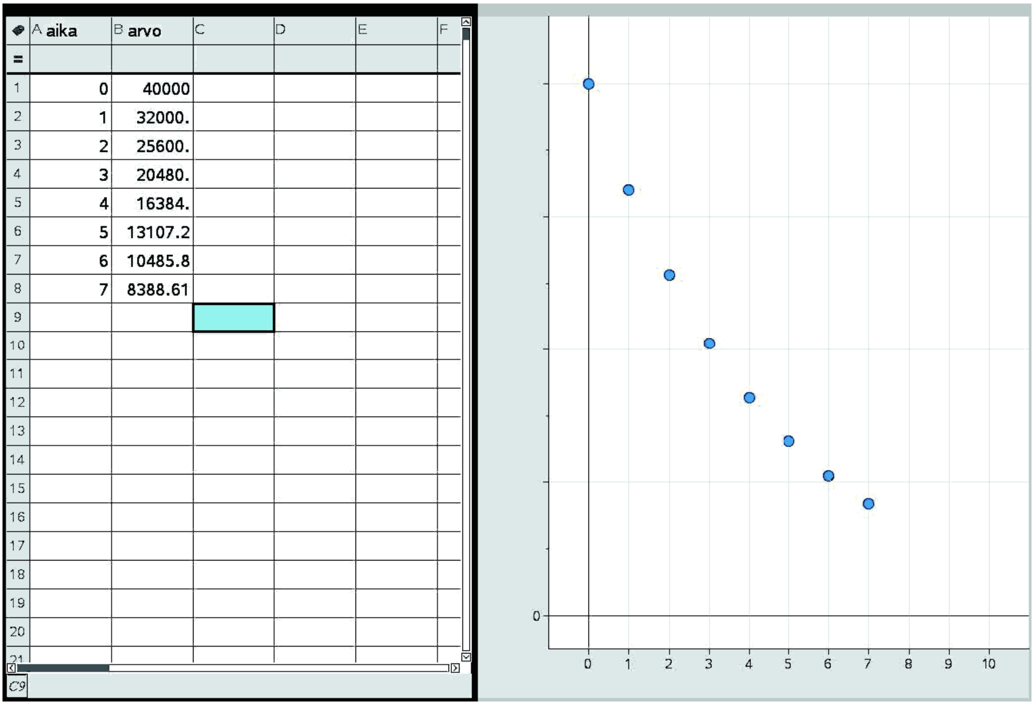
Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 23,1 %. 1p(6p)

10. Iiris on löytänyt uuden autonsa arvon alenemista kuvaavan taulukon. Hän syöttää tiedot ohjelmaan, joka piirtää auton arvoa kuvaavat pisteet ajan funktiona yhden vuoden välein. Auton ostaminen tapahtuu taulukossa vuonna 0.

a) Selitä sanallisesti, millä tavalla auton arvo näyttää alenevan ajan funktiona.

b) Muodosta kaava, joka kuvaa sitä, miten taulukon lukuarvot on laskettu. Voit käyttää muotoa $a_n = f(n)$ olevaa lukujonoa, kun $a_n$ on auton arvo vuonna $n$.

c) Kuinka monen vuoden jälkeen auton ostamisesta sen arvo on kaavasi mukaan laskenut alle 2 000 euron?



| | A aika | B arvo |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 40000 |
| 2 | 1 | 32000. |
| 3 | 2 | 25600. |
| 4 | 3 | 20480. |
| 5 | 4 | 16384. |
| 6 | 5 | 13107.2 |
| 7 | 6 | 10485.8 |
| 8 | 7 | 8388.61 |



*Ratkaisu.*

a) Kahden peräkkäisen vuoden hintojen suhde on aina 0,8 hyvin suurella tarkkuudella. Arvo näyttää alenevan eksponentiaalisesti ajan funktiona siten, että arvon alennus on 20 % vuodessa. 2p

b) Auton arvo alussa on $a_0$. Arvosta on jäljellä $100\,\% - 20\,\% = 80\,\%$ aina vuoden kuluttua, joten $n$:n vuoden jälkeen arvo on

$$a_n = q^n a_0 \quad \| \text{ sij. } q = 0{,}8 \text{ ja } a_0 = 40\,000$$ 1p(3p)

$$\underline{\underline{a_n = 0{,}8^n \cdot 40\,000}}$$ 1p(4p)

c) Auton arvo on $n$:n vuoden jälkeen 2 000 €, eli

$$\begin{aligned} a_n &= 2000 \\ 0{,}8^n \cdot a_0 &= 2000 \quad \| \text{ sij. } a_0 = 40\,000 \\ 0{,}8^n \cdot 40\,000 &= 2000 \quad \| : 40\,000 \\ 0{,}8^n &= 0{,}05 \\ n &= \log_{0{,}8} 0{,}05 \\ n &= 13{,}4251\ldots \end{aligned}$$ 1p(5p)

Hinta on 13,42... vuoden kuluttua tasan 2 000 €, joten 14 vuoden kuluttua se on alle 2 000 €.
Vastaus: Arvo on laskenut alle 2000 euron 14 vuoden kuluttua. 1p(6p)

Yhtälön voi ratkaista myös kaavalla $\lg x^n = n \lg x$ näin:

$$\begin{aligned} 0{,}8^n &= 0{,}05 \quad \| \lg() \\ \lg 0{,}8^n &= \lg 0{,}05 \\ n \lg 0{,}8 &= \lg 0{,}05 \quad \| : \lg 0{,}8 \\ n &= \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}8} \\ n &= 13{,}4251\ldots \end{aligned}$$

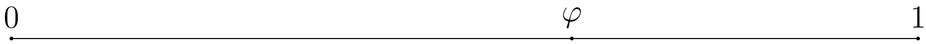
tai oppikirjan kaavalla
Jos $k^x = a$, niin $x = \dfrac{\lg a}{\lg k}$ näin:

$$\begin{aligned} 0{,}8^n &= 0{,}05 \\ n &= \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}8} \\ n &= 13{,}4251\ldots \end{aligned}$$

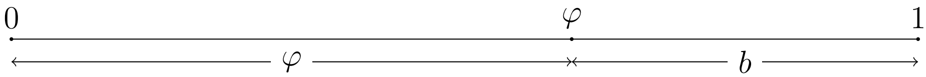
11. *Kultainen suhde* $\varphi$ on luku, joka kuvaa sopusuhtaisen suorakulmion sivujen pituuksien suhdetta. Sillä on suuri merkitys taiteessa ja arkkitehtuurissa.

Kultainen suhde määritellään seuraavalla tavalla: yhden pituusyksikön mittainen jana jaetaan kahteen osaan niin, että koko janan pituuden suhde pidemmän osan pituuteen on yhtä suuri kuin pidemmän osan pituuden suhde lyhyemmän osan pituuteen.

Määritä tämä suhde $\varphi$ kolmen desimaalin tarkkuudella.




*Ratkaisu.*




1p

Tehtävänannon mukaan pituuksille 1, $\varphi$ ja $b$ pätee

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{b}. \qquad (1)$$

2p(3p)

Lisäksi

$$\begin{aligned} \varphi + b &= 1 \\ b &= 1 - \varphi. \qquad (2) \end{aligned}$$

1p(4p)

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} &= \frac{\varphi}{1-\varphi} \quad \|\text{kerrotaan ristiin} \\ 1 - \varphi &= \varphi^2 \\ \varphi^2 + \varphi - 1 &= 0 \\ \varphi &= \frac{-1 \underset{(-)}{\pm} \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \quad \text{(Negatiivinen ratkaisu hylätään)} \\ \varphi &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \varphi &= 0{,}61803\cdots \approx 0{,}618 \end{aligned}$$

1p(5p)

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kysytty suhde on } \varphi = 0{,}618}}$

1p(6p)

12. Hannu keräsi aineiston eräässä risteyksessä kulkevien autojen lukumäärästä huhtikuun jokaisena päivänä klo 12.00–12.15 välisenä aikana. Hän kokosi autojen lukumääristä frekvenssitaulukon ja laski, että lukumäärien keskiarvo on täsmälleen 3,3. Taulukon viimeinen sarake repeytyi kuitenkin irti. Sinä olleet luvut on merkitty alla kysymysmerkeillä. Päättele, mitkä luvut sarakkeessa olivat.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| autojen lukumäärä | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | ? |
| frekvenssi | 2 | 5 | 7 | 6 | 5 | 3 | ? |

*Ratkaisu.* Huhtikuussa on 30 päivää. Frekvenssien summan on oltava tällöin 30, eli 1p

$$
\begin{aligned}
2+5+7+6+5+3+a_7 &= 30 \\
28+a_7 &= 30 \\
a_7 &= 2.
\end{aligned}
$$

1p(2p)
1p(3p)

Keskiarvo on tasan 3,3, joten

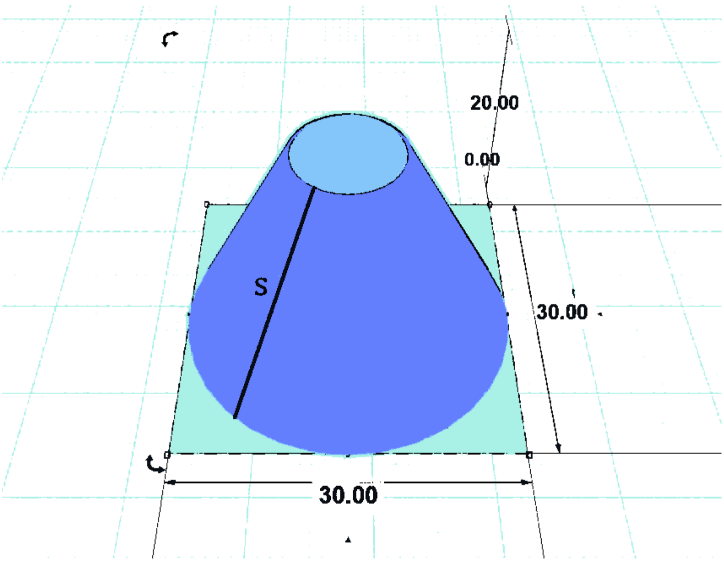
$$
\begin{aligned}
\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} &= 3{,}3 \\
\frac{2\cdot 0+5\cdot 1+7\cdot 2+6\cdot 3+5\cdot 5+3\cdot 7+2\cdot x_7}{30} &= 3{,}3 \\
\frac{83+2x_7}{30} &= 3{,}3 \quad \| \cdot 30 \\
83+2x_7 &= 99 \\
2x_7 &= 16 \quad \| : 2 \\
x_7 &= 8
\end{aligned}
$$

2p(5p)

Vastaus: Puuttuva autojen lukumäärä on 8 ja puuttuva frekvenssi on 2. 1p(6p)

13. Mari tekee 3D-suunnitteluohjelmalla lampunvarjostimen mallin. Hän aloittaa suorasta ympyräkartiosta, jonka korkeus ja pohjan halkaisija ovat molemmat 30,0 cm. Tästä kartiosta hän leikkaa pois yläosan, joka on 10,0 cm korkea suora ympyräkartio.

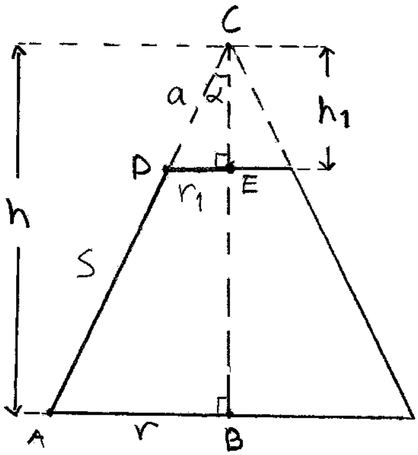
a) Määritä varjostimen sivujanan $S$ pituus yhden millimetrin tarkkuudella. Sivujana on merkitty alla olevaan kuvaan.
b) Varjostimen sauma kulkee sivujanaa $S$ pitkin. Hahmottele kuvio siitä, miltä varjostin näyttää tasoon levitettynä, kun se on avattu saumaa pitkin.
c) Laske varjostimen pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella.




*Ratkaisu.*

a)

$$r = \frac{30{,}0\,\text{cm}}{2} = 15{,}0\,\text{cm}$$
$$h = 30{,}0\,\text{cm}$$
$$h_1 = 10{,}0\,\text{cm}$$




Kolmiot $ABC$ ja $DEC$ ovat yhdenmuotoisia (kk), joten

$$\frac{r_1}{h_1} = \frac{r}{h} \quad \| \cdot h_1$$

$$r_1 = \frac{h_1}{h} \cdot r \tag{1}$$

$$r_1 = \frac{10{,}0\,\text{cm}}{30{,}0\,\text{cm}} \cdot 15{,}0\,\text{cm} = 5{,}0\,\text{cm} \tag{2}$$

Pythagoraan lauseen mukaan

$$a^2 = r_1^2 + h_1^2$$
$$a = \pm\sqrt{r_1^2 + h_1^2}$$
$$a = \sqrt{5^2 + 10^2}$$
$$a = 11{,}1803\ldots\ \text{(cm)}$$

1p

ja

$$(S+a)^2 = r^2 + h^2$$
$$S + a = \pm\sqrt{r^2 + h^2}$$
$$S = \sqrt{r^2 + h^2} - a$$
$$S = \sqrt{15^2 + 30^2} - 11{,}1803\ldots$$
$$S = 22{,}3606\ldots\ \text{cm}$$
$$\approx 22{,}4\,\text{cm}$$

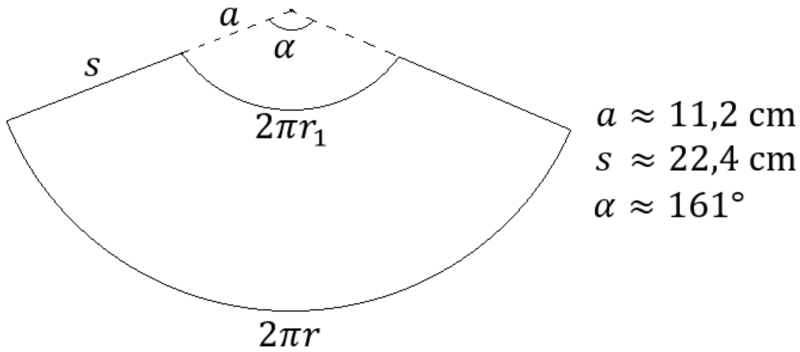
Vastaus: Sivujanan pituus on 22,4 cm.

1p(2p)

b) Aluetta rajoittavat samankeskeisten ympyröiden kaaret, joiden pituudet ovat $2\pi r$ ja $2\pi r_1$ sekä leikkauksessa muodostuneet sivujanat, joiden pituus on $S$.

Kulma $\alpha$ on sama kuin pienen, $a$-säteisen sektorin keskuskulma. Keskuskulma on yleisesti $\alpha = 360° \cdot \frac{B}{2\pi R}$, jossa nyt kaari $B = 2\pi r_1$ ja $R = a$.

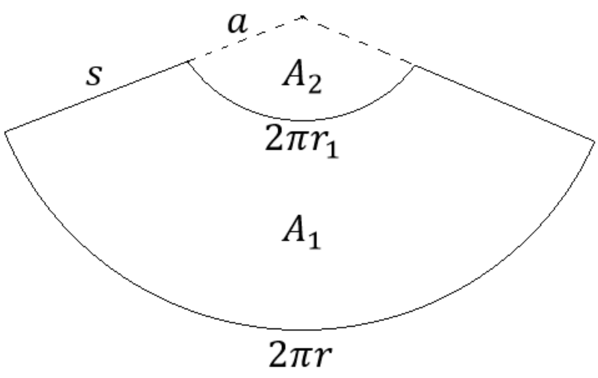
$$\begin{aligned}\alpha &= 360° \cdot \frac{\cancel{2\pi} r_1}{\cancel{2\pi} a} \\ &= 360° \cdot \frac{5\,\text{cm}}{11{,}1803\ldots\ \text{cm}} \\ &= 160{,}997\ldots° \\ &\approx 161°\end{aligned}$$




Pisteytys kuvasta:

- kaksi samankeskistä ympyrän kaarta yhdistettynä sivujanoilla 1p(3p)
- keskuskulma välillä 120°–180° ja suuremman ympyrän säde noin 2–4 kertaa suurempi kuin pienemmän ympyrän säde. 1p(4p)

c)




Varjostimen pinta-ala on kahden sektorin $A_1$ ja $A_2$ pinta-alojen erotus. Sektorin pinta-ala on yleisesti

$$A = \frac{br}{2},$$

missä $b$ on sektorin kaaren pituus ja $r$ on sektorin säde, joten

$$A_1 = \frac{2\pi r \cdot (S+a)}{2} \quad \text{ja}$$
$$A_2 = \frac{2\pi r_1 a}{2}$$

1p(5p)

Lasketaan erotus.

$$A_v = A_1 - A_2$$
$$A_v = \frac{2\pi r(S+a)}{2} - \frac{2\pi r_1 a}{2}$$
$$A_v = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \cdot [r(S+a) - r_1 a]$$
$$A_v = \pi\,[15 \cdot (22{,}3606\dots + 11{,}1803\dots) - 5 \cdot 11{,}1803\dots]$$
$$= 1\,404{,}95\dots$$
$$\approx 1\,405\ (\mathrm{cm}^2)$$

Vastaus: Varjostimen pinta-ala on $1\,405\,\mathrm{cm}^2$

1p(6p)