MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Arviomme tehtävien pisteytyksestä on merkitty sinisellä tekstillä.

Lyhyt matematiikka, syksy 2013

Mallivastaukset, 25.9.2013

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta `www.mafyvalmennus.fi`. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Ratkaise yhtälö $(x-2)^2 = 4$.
   b) Millä muuttujan x arvolla lausekkeet $2x+3$ ja $-(x+3)$ saavat saman arvon?
   c) Laske lausekkeen $a(b-2)+(a-b)^2-b(1-a)$ arvo, kun $a=2$ ja $b=-2$.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 &= 4 \\
(x-2)(x-2) &= 4 \\
x^2-2x-2x+4 &= 4 \\
x^2-4x+\cancel{4} &= \cancel{4} \\
x^2-4x &= 0 && \text{1 p} \\
x(x-4) &= 0 \quad \text{tulon nollasääntö} \\
&\underline{\underline{x=0 \quad \text{tai} \quad x=4}} && \text{1 p (2 p)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2x+3 &= -(x+3) && \text{1 p (3 p)} \\
2x+3 &= -x-3 \\
3x &= -6 \quad \| :3 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

Vastaus: <u>Lausekkeet saavat saman arvon, kun $x=-2$.</u> 1 p (4 p)

c)

$$a(b-2)+(a-b)^2-b(1-a)$$

Sijoitetaan $a=2$ ja $b=-2$, saadaan

$$2(-2-2)+(2-(-2))^2-(-2)\cdot(1-2) = 2\cdot(-4)+4^2-2 = \underline{\underline{6}}$$

1 p (5 p) 1 p (6 p)

2. a) Missä pisteissä suora $y = -3x + 12$ leikkaa koordinaattiakselit?

   b) Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$

   c) Suorakulmion kanta on 11 cm ja korkeus 7 cm. Sen kanta lyhenee 20 prosenttia, ja korkeus kasvaa 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia suorakulmion pinta-ala pienenee?

Ratkaisu.

a)

$$y = -3x + 12$$

Suora leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= -3x + 12 \\ 3x &= 12 \quad \| : 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

1 p

Suora $y = kx + b$ leikkaa y-akselin kohdassa $y = b$, tässä $y = 12$.

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Suora leikkaa } x\text{-akselin pisteessä } (4, 0) \text{ ja } y\text{-akselin pisteessä } (0, 12)}}$.

1 p (2 p)

b)

$$\begin{cases} 2x + \quad y = 4 \\ -x \quad + 2y = 1 \quad \| \cdot 2 \end{cases} \tag{1}$$

$$+\begin{cases} \cancel{2x} + \quad y = 4 \\ -\cancel{2x} + 4y = 2 \end{cases}$$

$$5y = 6 \quad \| : 5$$

$$y = \frac{6}{5}$$ 1 p (3 p)

Sijoitetaan $y = \frac{6}{5}$ yhtälöön (1).

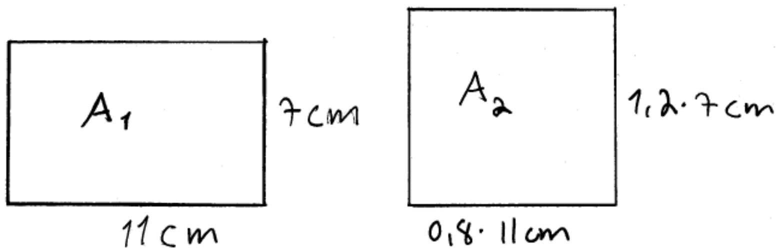
$$2x + \frac{6}{5} = 4$$

$$2x = \frac{14}{5} \quad \| : 2$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Vastaus: $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$ 1 p (4 p)

c)



$$A_1 = 11\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} = 77\,\text{cm}^2$$

$$A_2 = 0{,}8 \cdot 11\,\text{cm} \cdot 1{,}2 \cdot 7\,\text{cm} = 73{,}92\,\text{cm}^2$$ 1 p (5 p)

Verrataan pinta-alojen suuruutta.

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{77\,\text{cm}^2 - 73{,}92\,\text{cm}^2}{77\,\text{cm}^2} = 0{,}04 = 4{,}0\%$$

Vastaus: Pinta-ala pienenee 4,0%. 1 p (6 p)

3. Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.

   a) Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.

   b) Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

Ratkaisu.

a) Kyseessä on suorakulmainen kolmio.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{20}{90} && \text{1 p} \\ \frac{\alpha}{2} &= 12{,}839\ldots^\circ \quad \| \cdot 2 \\ \alpha &= 25{,}679\ldots^\circ \\ &\approx 26^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Huippukulma on 26°.</u> 2 p (3 p)

b) Lasketaan kolmion korkeus h pythagoraan lauseella.

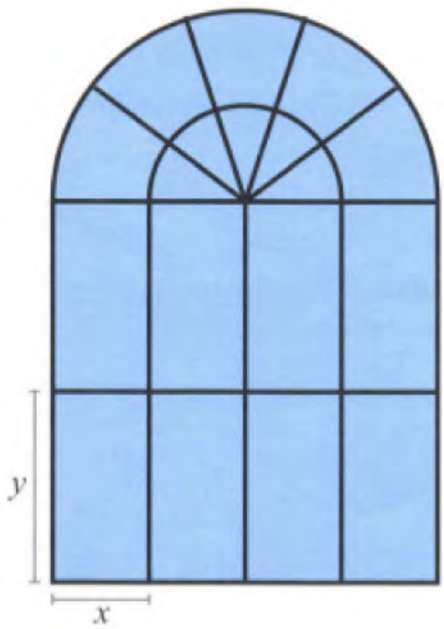
$$\begin{aligned} 90^2 &= h^2 + 20^2 \\ h^2 &= 90^2 - 20^2 \\ h &= \underset{(-)}{+} \sqrt{90^2 - 20^2} \\ h &= 87{,}749\ldots(\mathrm{m}) && \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \cdot h}{2} \\ &= \frac{40\,\mathrm{m} \cdot 87{,}749\ldots\,\mathrm{m}}{2} \\ &= 1754{,}99\ldots \\ &\approx 1755\,(\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Pinta-ala on 1755 m².</u> 2 p (6 p)

4. Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x = 20\,\text{cm}$ ja $y = 40\,\text{cm}$? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puoliympyröiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



Ratkaisu.

$$x = 20\,\text{cm}$$
$$y = 40\,\text{cm}$$

Suoriin osiin rimaa kuluu

$$\begin{aligned} 10y + 20x &= 10 \cdot 40\,\text{cm} + 20 \cdot 20\,\text{cm} \\ &= 800\,\text{cm} \end{aligned}$$

2 p

Suurempaan kaareen (puoliympyrä) rimaa kuluu

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi \cdot r = \pi \cdot 2x = \pi \cdot 2 \cdot 20\,\text{cm} = 125{,}66\ldots\,\text{cm}$$

Pienempään kaareen rimaa kuluu

$$\pi \cdot x = \pi \cdot 20\,\text{cm} = 62{,}83\ldots\,\text{cm}$$

2 p (4 p)

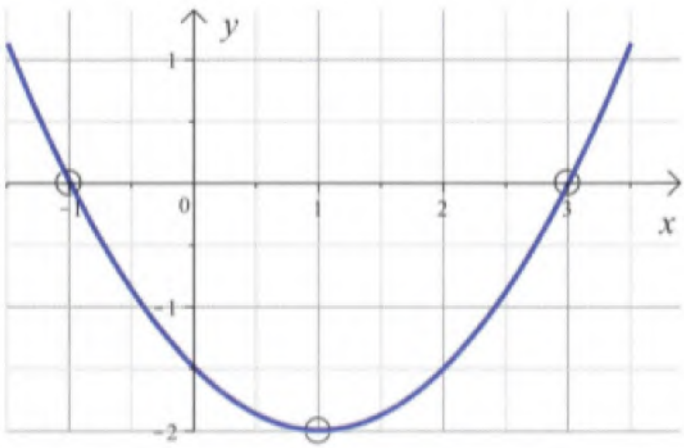
Lasketaan riman menekki.

$$\begin{aligned} &800\,\text{cm} + 125{,}66\ldots\,\text{cm} + 62{,}83\ldots\,\text{cm} \\ &= 988{,}49\ldots\,\text{cm} \\ &\approx 988\,\text{cm} \end{aligned}$$

Vastaus: Rimaa tarvitaan 988 cm.

2 p (6 p)

5. Oheinen kuvaaja esittää paraabelia $y = ax^2 + bx + c$. Määritä vakiot a, b ja c käyttämällä kuvioon ympyröillä merkittyjä pisteitä.



Ratkaisu.

TAPA I

Paraabelin pisteet $(-1, 0)$, $(1, -2)$ ja $(3, 0)$ toteuttavat paraabelin yhtälön $y = ax^2 + bx + c$. Sijoittamalla koordinaatit paraabelin yhtälöön saadaan

$$\begin{cases} a - b + c = 0 & (1) \\ a + b + c = -2 & (2) \\ 9a + 3b + c = 0 \quad \text{2 p} & (3) \end{cases}$$

Kolmen yhtälön täydellinen lineaarinen yhtälöryhmä ei kuulu lyhyen matematiikan oppimäärään, mutta soveltamalla sijoituskeinoa päästään yhtälöpariin.
Yhtälö (1):

$$\begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ c &= b - a \qquad (4) \end{aligned}$$

Sijoitetaan $c = b - a$ yhtälöihin (2) ja (3).

$$\begin{cases} a + b + (b - a) = -2 \\ 9a + 3b + (b - a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = -2 & (5) \\ 8a + 4b = 0 & (6) \end{cases}$$

Yhtälö (5):

$$\begin{aligned} 2b &= -2 \quad \| : 2 \\ b &= -1 \qquad \text{2 p (4 p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $b = -1$ yhtälöön (6).

$$\begin{aligned} 8a + 4 \cdot (-1) &= 0 \\ 8a &= 4 \quad \| : 8 \\ a &= \frac{1}{2} \qquad \textcolor{blue}{\text{1 p (5 p)}} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $b = -1$ ja $a = \frac{1}{2}$ yhtälöön (4).

$$\begin{aligned} c &= -1 - \frac{1}{2} \\ c &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{a = \frac{1}{2},\ b = -1 \text{ ja } c = -\frac{3}{2}}}$. 1 p (6 p)

$\boxed{\text{Tapa II}}$

$$y = ax^2 + bx + c$$

Paraabelin yksi nollakohta on $x = -1$. Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c &= 0 \\ a - b + c &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Paraabelin huippu on pisteessä $(1, -2)$. Tästä saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &= -2 \\ a + b + c &= -2 \qquad \textcolor{blue}{\text{1 p}} \end{aligned} \tag{8}$$

$y(x)$:n derivaatan nollakohta on 1, joten

$$\begin{aligned} y'(1) &= 0 \quad \| \text{ derivaattafunktio } y'(x) = 2ax + b \\ 2a \cdot 1 + b &= 0 \\ b &= -2a \qquad \textcolor{blue}{\text{1 p (2 p)}} \end{aligned} \tag{9}$$

Sijoitetaan (9) yhtälöihin (7) ja (8). Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a-(-2a)+c=0 \\ a+(-2a)+c=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+c=0 \\ -a+c=-2 \quad \| \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+\cancel{c}=0 \\ \quad a-\cancel{c}=2 \quad (10) \end{cases}$$

$$4a=2 \quad \| : 4$$

$$a=\frac{1}{2}$$

2 p (4 p)

Sijoitetaan $a=\frac{1}{2}$ yhtälöön (10), saadaan

$$\frac{1}{2}-c=2$$

$$-c=\frac{3}{2} \quad \| \cdot (-1)$$

$$c=-\frac{3}{2}$$

1 p (5 p)

Sijoitetaan $a=\frac{1}{2}$ yhtälöön (9)

$$b=-2\cdot\frac{1}{2}$$

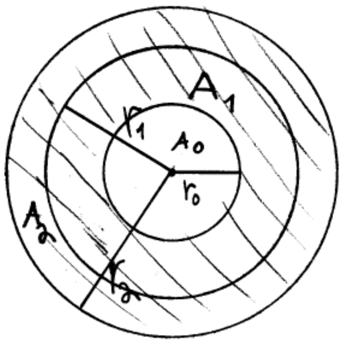
$$b=-1$$

Vastaus: $\underline{\underline{a=\frac{1}{2},\ b=-1 \text{ ja } c=-\frac{3}{2}}}$

1 p (6 p)

6. Talouspaperirullan korkeus on 21 cm, täyden rullan ulkohalkaisija on 12 cm ja sen sisähalkaisija 4,5 cm. Mikä on rullan halkaisija silloin, kun paperin tilavuudesta on jäljellä puolet? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu. Voidaan tarkastella rullan päädyn pinta-aloja, sillä ne ovat suoraan verrannollisia tilavuuteen.



$r_0 = 2{,}25$ cm
$r_2 = 6$ cm

$$\begin{aligned} A_0 &= \pi r_0^2 \\ A_1 &= \pi r_1^2 - A_0 \\ &= \pi r_1^2 - \pi r_0^2 \\ &= \pi(r_1^2 - r_0^2) \\ A_2 &= \pi r_2^2 - \pi r_1^2 \\ &= \pi(r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

2 p

Paperista on kulunut puolet, kun

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \\ \pi(r_1^2 - r_0^2) &= \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad \| : \pi \\ r_1^2 - r_0^2 &= r_2^2 - r_1^2 \\ 2r_1^2 &= r_2^2 + r_0^2 \quad \| : 2 \\ r_1^2 &= \frac{r_0^2 + r_2^2}{2} \\ r_1 &= \underset{(-)}{\pm} \sqrt{\frac{6^2 + 2{,}25^2}{2}} \\ r_1 &= 4{,}531\ldots\,(\text{cm}) \end{aligned}$$

1 p (3 p)

2 p (5 p)

Halkaisija on tällöin

$$d_1 = 2r_1 = 2 \cdot 4{,}531\ldots\ \text{cm} = 9{,}06\ldots\ \text{cm} \approx 9{,}1\ \text{cm}$$

Vastaus: Rullan halkaisija on 9,1 cm.

1 p (6 p)

7. Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Mittauksissa havaittiin, että jarrutusmatka nopeudesta 40 km/h on 11,0 metriä.
   a) Mikä on auton jarrutusmatka nopeudesta 80 km/h?
   b) Auton jarrutusmatkaksi mitattiin 21,3 metriä. Mikä oli auton nopeus jarrutuksen alkaessa? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

*Ratkaisu.*Auton jarrutusmatka ja nopeuden neliö ovat suoraan verrannolliset suureet, joten tehtävänannon mukaan

a)

jarrutusmatka	nopeus^2
11,0 m	$(40\,\mathrm{km/h})^2$
x	$(80\,\mathrm{km/h})^2$

1 p

Saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{11{,}0}{x} &= \frac{40^2}{80^2} \quad \text{(kerrotaan ristiin)}\\ 40^2 \cdot x &= 80^2 \cdot 11{,}0 \| : 40^2\\ x &= \frac{80^2 \cdot 11{,}0}{40^2}\\ x &= 44\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

Vastaus: Jarrutusmatka on 44 metriä.

2 p (3 p)

b) Vastaavasti nyt:

jarrutusmatka	nopeus^2
11,0 m	$(40\,\mathrm{km/h})^2$
21,3 m	x^2

1 p (4 p)

Saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{11{,}0}{21{,}3} &= \frac{40^2}{x^2} \quad \text{(kerrotaan ristiin)}\\ 11{,}0x^2 &= 40^2 \cdot 21{,}3 \quad \| : 11{,}0\\ x^2 &= \frac{40^2 \cdot 21{,}3}{11{,}0}\\ x &= {}_{(}\pm_{)} \sqrt{\frac{40^2 \cdot 21{,}3}{11{,}0}}\\ x &= 55{,}6613\ldots \approx 56\,(\mathrm{km/h})\end{aligned}$$

Vastaus: Nopeus oli 56 km/h.

2 p (6 p)

8. Pussissa on punaisia ja valkoisia palloja. Todennäköisyys sille, että väriä näkemättä valitsee punaisen pallon, on 0,4. Kuinka monta punaista palloa pussissa on, jos siinä on n kappaletta valkoisia palloja?

Ratkaisu. Pussissa on n kappaletta valkoisia palloja. Merkitään punaisten pallojen määrää k:lla. Palloja on siis yhteensä $n + k$. Nyt siis

$$P(\text{Väriä näkemättä nostettu pallo on punainen}) = 0{,}4$$

Nostettaessa satunnainen pallo suotuisia tapauksia on k ja kaikkia tapauksia on $n + k$ kappaletta, joten

$$\begin{aligned}
\frac{k}{n+k} &= 0{,}4 \quad \| \cdot (n+k) \qquad \text{2 p} \\
k &= 0{,}4(n+k) \\
k &= 0{,}4n + 0{,}4k \quad \| - 0{,}4k \\
k - 0{,}4k &= 0{,}4n \\
0{,}6k &= 0{,}4n \quad \| \cdot 5 \\
3k &= 2n \quad \| : 3 \\
k &= \frac{2}{3}n
\end{aligned}$$

Vastaus: Pussissa on $\frac{2}{3}n$ punaista palloa. 4 p (6 p)

9. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$.

Ratkaisu.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

Funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$ löytyvät välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \qquad \text{1 p}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
6x^2 - 6x - 12 &= 0 \quad \| : 6 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \\
x &= \frac{1 \pm 3}{2} \\
x &= -1 \quad \text{tai} \quad x = 2 \qquad \text{2 p (3 p)}
\end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot.

$$\begin{aligned}
f(-2) &= 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 5 = 1 \\
f(-1) &= 12 \\
f(2) &= -15 \quad \text{pienin arvo} \\
f(4) &= 37 \quad \text{suurin arvo}
\end{aligned}$$

Vastaus: Pienin arvo on $f(2) = -15$ ja suurin arvo on $f(4) = 37$. 3 p (6 p)

10. Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu. Merkitään vuotuista kasvuprosenttia p:llä. Täten liikevaihto kasvoi joka vuosi $\left(1+\frac{p}{100}\right)$-kertaiseksi. Merkitään liikevaihtoa alussa a:llä. Nyt siis

1p

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20} a &= 10a \quad \| : a && \text{1 p (2 p)}\\
\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20} &= 10\\
1+\frac{p}{100} &= \underset{(-)}{+} \sqrt[20]{10} \quad \| - 1 && \text{1 p (3 p)}\\
\frac{p}{100} &= \sqrt[20]{10} - 1 \quad \| \cdot 100\\
p &= 100 \cdot (\sqrt[20]{10} - 1)\\
&= 12{,}2018\ldots && \text{2 p (5 p)}\\
&\approx 12{,}2
\end{aligned}$$

Vastaus: <u>Yrityksen liikevaihto kasvoi 12,2% vuodessa.</u> 1 p (6 p)

11. Eräällä matematiikan kurssilla oppilaat saivat vain arvosanoja 10, 9 ja 8. Niitä esiintyi suhteessa 1 : 2 : 3. Laske kurssin arvosanojen keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

1 p

Ratkaisu. Merkitään kaikkien saatujen arvosanojen määrää $6n$:llä. Nyt koska arvosanoja 10, 9 ja 8 esiintyi suhteessa 1 : 2 : 3, saatujen arvosanojen määrät olivat seuraavat.

$$\begin{aligned} \text{Arvosanoja } 10: &\quad n \text{ kpl} \\ \text{Arvosanoja } 9: &\quad 2n \text{ kpl} \\ \text{Arvosanoja } 8: &\quad 3n \text{ kpl} \end{aligned}$$

2 p (3 p)

Täten arvosanojen keskiarvo oli

$$\begin{aligned} &\frac{10n + 9 \cdot 2n + 8 \cdot 3n}{6n} \\ &= \frac{(10 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3)\cancel{n}}{6\cancel{n}} \\ &= \frac{10 + 18 + 24}{6} \\ &= \frac{52}{6} \\ &= 8{,}666\ldots \\ &\approx 8{,}7 \end{aligned}$$

2 p (5 p)

Vastaus: Keskiarvo oli 8,7.

1 p (6 p)

12. Korkeushyppääjän eri-ikäisenä saavuttamia tuloksia voidaan vertailla Seppo Sarnan laajasta tilastollisesta aineistosta kehittämän muunnoskaavan

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

avulla. Kaavassa t on hyppääjän saavuttama todellinen tulos a vuoden ikäisenä, T on muunnettu tulos ja k tilastomateriaaliin perustuva kerroin, jonka arvo on 201,4 cm. Korkeushypyssä tulokset ilmaistaan senttimetrin tarkkuudella.

a) Raimo hyppäsi 19-vuotiaana juniorina tuloksen 196 cm, 23-vuotiaana ennätyksensä 200 cm ja 40-vuotiaana veteraanina tuloksen 175 cm. Aseta nämä tulokset paremmuusjärjestykseen, kun niitä verrataan muunnoskaavan avulla.

b) Missä iässä hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm? (233 cm oli sisäratojen miesten Suomen ennätys vuoden 2012 alussa.)

Ratkaisu.

a) Lasketaan muunnetut tulokset.

ikä (vuotta)	tulos (cm)	muunnettu tulos (cm)
19	196	$196 + 201{,}4 \cdot \lg\left(\frac{19}{35}\right) = 142{,}56\ldots \approx 143$
23	200	$200 + 201{,}4 \cdot \lg\left(\frac{23}{35}\right) = 163{,}27\ldots \approx 163$
40	175	$175 + 201{,}4 \cdot \lg\left(\frac{40}{35}\right) = 186{,}67\ldots \approx 187$

2 p

Muunnoskaavan avulla verrattuna Raimon paras tulos oli 40-vuotiaana, toiseksi paras 23-vuotiaana ja huonoin 19-vuotiaana.

1 p (3 p)

b) Sijoitetaan $T = 233$ ja $t = 175$ yhtälöön

$$\begin{aligned} T &= t + K \lg\left(\frac{a}{35}\right) \\ 233 &= 175 + 201{,}4 \lg\left(\frac{a}{35}\right) \\ 201{,}4 \lg\left(\frac{a}{35}\right) &= 58 \quad \| : 201{,}4 \\ \lg\left(\frac{a}{35}\right) &= \frac{58}{201{,}4} \end{aligned}$$

1 p (4 p)

Logaritmin määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{a}{35} &= 10^{\frac{58}{201,4}} \quad \| \cdot 35 \\ a &= 35 \cdot 10^{\frac{58}{201,4}} \\ a &= 67{,}92\ldots \qquad \text{1 p (5 p)} \\ a &\approx 68\,(\text{a}) \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty ikä on 68 vuotta. 1 p (6 p)

13. Eräässä tosi-TV-sarjassa kilpailijoiden tehtävänä on kerätä kulta- ja hopearahoja. Yhteensä niitä saa kerätä enintään 60 kappaletta. Kultarahan arvo on 25 € ja hopearahan arvo 20 €. Rahat täytyy kuljettaa ohuessa muovipussissa, joka kestää kolikoita vain yhden kilogramman verran. Yksi kultaraha painaa 20 grammaa ja hopearaha 10 grammaa. Kuinka monta kulta- ja hopearahaa kilpailijan kannattaa kerätä, jotta saaliin arvo on mahdollisimman suuri?

Ratkaisu.

TAPA I

Merkitään kultarahojen määrää x:llä, jolloin hopearahojen määrä on $60 - x$. Rahojen yhteenlaskettu arvo on

$$\begin{aligned} y &= 25x + 20(60 - x) \\ &= 25x + 1200 - 20x \\ &= 5x + 1200 \end{aligned}$$ 1 p

Lauseke $y(x)$ on nouseva suora, joten se saa sitä suuremman arvon, mitä suurempi x on. 1 p (2 p)

Kolikoiden paino on yhteensä

$$\begin{aligned} m &= 20x + 10(60 - x) \\ &= 20x + 600 - 10x \\ &= 10x + 600 \end{aligned}$$ 1 p (3 p)

Paino saa olla enintään 1000 g, joten

$$\begin{aligned} 10x + 600 &\leq 1000 \\ 10x &\leq 400 \quad \| : 10 \\ x &\leq 40 \end{aligned}$$ 1 p (4 p)

1 p (5 p)

x voi olla enintään 40, joten $y(x)$:n suurin arvo saavutetaan, kun $x = 40$. Silloin hopearahoja on $60 - 40 = 20$.

Vastaus: Kilpailijan kannattaa kerätä 40 kultarahaa ja 20 hopearahaa. 1 p (6 p)

Tapa II

Lineaarinen optimointi

$$x \text{ on kultarahojen määrä}$$
$$y \text{ on hopearahojen määrä}$$

Saaliin kokonaisarvo on

$$s = 25x + 20y.$$

Rahoja on vähintään 0, joten

$$x \geq 0 \quad \text{rajasuora on } x = 0 \qquad (1)$$
$$y \geq 0 \quad \text{rajasuora on } y = 0 \qquad (2)$$

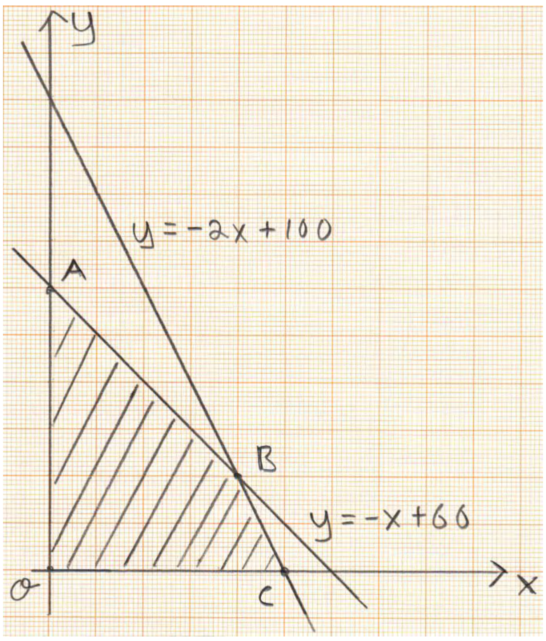
Rahoja saa kerätä korkeintaan 60, joten

$$x + y \leq 60 \quad \text{rajasuora on } y = -x + 60 \qquad (3)$$

Rahat saavat painaa 1000 g, joten

$$20x + 10y \leq 1000 \quad \| : 10$$
$$2x + y \leq 100 \quad \text{rajasuora on } y = -2x + 100 \qquad \text{1 p} \qquad (4)$$

Piirretään suorien rajaama alue koordinaatistoon.



1 p (2 p)

Ratkaistaan leikkauspisteet A, B ja C.

$$A: \quad x = 0, \quad y = 60, \quad A = (0, 60)$$

$$B: \quad \begin{cases} y = -2x + 100 \\ y = -x + 60 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + 60 &= -2x + 100 \\ x &= 40 \\ y &= -40 + 60 = 20 \\ B &= (40, 20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C: \quad & y = 0, \\ & 0 = -2x + 100 \\ & x = 50 \\ & C = (50, 0) \end{aligned}$$

2 p (4 p)

Lasketaan saaliin arvo pisteissä A, B ja C.

$$\begin{aligned} A: &\quad S = 25 \cdot 0 + 20 \cdot 60 = 1200 \\ B: &\quad S = 25 \cdot 40 + 20 \cdot 20 = 1400 \ \leftarrow \text{suurin} \\ C: &\quad S = 25 \cdot 50 + 20 \cdot 0 = 1250 \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Kannattaa kerätä 40 kultarahaa ja 20 hopearahaa.</u> 2 p (6 p)

14. Abiturientti saa lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 €. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.

a) Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \le x \le 12\,000$.

b) Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \le x \le 12\,000$.

Ratkaisu.

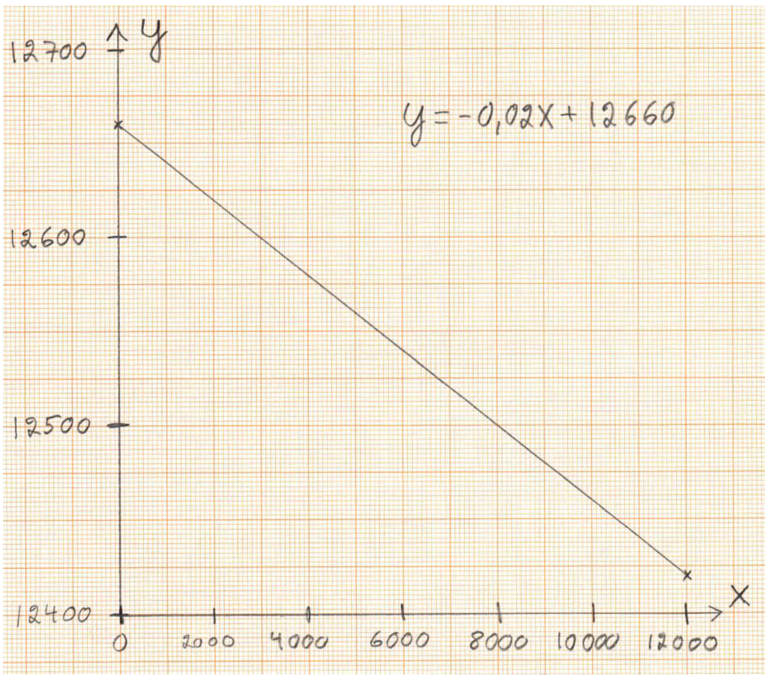
a) Korot ovat 3,5% ja 5,5%, ja sijoitukset ovat x ja $12000 - x$ euroa vastaavasti. Sijoituksen arvo vuoden kuluttua on

$$\begin{aligned} y &= 1{,}035x + 1{,}055(12000 - x) && \text{1 p} \\ &= 1{,}035x + 12660 - 1{,}055x \\ &= -0{,}02x + 12660 \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{y = -0{,}02x + 12660.}}$ 2 p (3 p)

b)

$$\begin{aligned} y(0) &= 12660 \\ y(12000) &= -0{,}02 \cdot 12000 + 12660 \\ &= 12420 && \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$



2 p (6 p)

15. Olkoot $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\bar{b} = \bar{j} - 2\bar{k}$.

a) Laske $2|\bar{a}|^2 + 2|\bar{b}|^2$.
b) Laske $|\bar{a} + \bar{b}|^2 + |\bar{a} - \bar{b}|^2$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} \\
\bar{b} &= \bar{j} - 2\bar{k} \\
\bar{a} + \bar{b} &= \bar{i} + (2+1)\bar{j} + (2-2)\bar{k} = \bar{i} + 3\bar{j} \\
\bar{a} - \bar{b} &= \bar{i} + (2-1)\bar{j} + [2-(-2)]\bar{k} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k} \\
|\bar{a}|^2 &= 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 \\
|\bar{b}|^2 &= 1^2 + (-2)^2 = 5 && \text{2 p} \\
|\bar{a} + \bar{b}|^2 &= 1^2 + 3^2 = 10 \\
|\bar{a} - \bar{b}|^2 &= 1^2 + 1^2 + 4^2 = 18 && \text{2 p (4 p) nämä pisteet liittyvät b-kohtaan}
\end{aligned}$$

a) $2|\bar{a}|^2 + 2|\bar{b}|^2 = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = \underline{\underline{28}}$ 1 p (5 p)
b) $|\bar{a} + \bar{b}|^2 + |\bar{a} - \bar{b}|^2 = 10 + 18 = \underline{\underline{28}}$ 1 p (6 p)