MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Pitkä matematiikka, kevät 2010

Mallivastaukset

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen opettaa lukiossa pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita neljän vuoden ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta.

MA-FY Valmennus Oy on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- abikurssit
- yksityisopetus

Tästä keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön ja omien yo-vastausten tarkistamista varten. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MA-FY Valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää näitä mallivastauksia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	050 338 7098

1. a) Ratkaise yhtälö $7x^7 + 6x^6 = 0$.

b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a}+1)^2 - a - 1$.

c) Millä x:n arvoilla pätee $\dfrac{3}{3-2x} < 0$?

Ratkaisu.
a)

$$\begin{aligned} 7x^7 + 6x^6 &= 0 \\ x^6(7x+6) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$\begin{aligned} x^6 &= 0 \quad \text{tai} \quad & 7x + 6 &= 0 \\ x &= 0 & 7x &= -6 \qquad \| : 7 \\ & & x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

V: $x = 0$ tai $x = -\frac{6}{7}$

b)

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}+1)^2 - a - 1 &= \sqrt{a}^2 + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot 1 + 1^2 - a - 1 \\ &= a + 2\sqrt{a} + 1 - a - 1 \\ &= 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

V: $2\sqrt{a}$

c)

(1) $$\frac{3}{3-2x} < 0$$

Määrittelyehto

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\neq 0 \\ -2x &\neq -3 \qquad \| : (-2) \\ x &\neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Epäyhtälön (1) vasen puoli on negatiivinen, kun nimittäjä on negatiivinen, eli

$$\begin{aligned} 3 - 2x &< 0 \\ -2x &< -3 \qquad \| : (-2) \\ x &> \frac{3}{2} \end{aligned}$$

V: $x > \frac{3}{2}$

2. a) Laske integraali $\int_0^1 (e^x + 1)\,dx$.

b) Derivoi funktio $x \sin x$.

c) Minkä luvun 2-kantainen logaritmi on 5?

Ratkaisu. a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^x + 1)\ dx &= \mathop{/}_{0}^{1} (e^x + x) \\ &= e^1 + 1 - \left(e^0 + 0\right) \\ &= e + 1 - 1 \\ &= e\end{aligned}$$

V: e

b)

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\,(x \sin x) &= \mathrm{D}\, x \cdot \sin x + x \cdot \mathrm{D} \sin x \\ &= 1 \cdot \sin x + x \cos x\end{aligned}$$

V: $\sin x + x \cos x$

c)

$$\log_2 x = 5$$

Logaritmin määritelmän mukaan

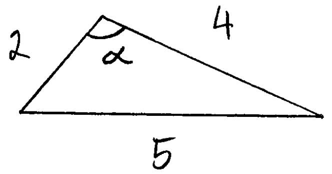
$$\begin{aligned}2^5 &= x \\ 32 &= x\end{aligned}$$

V: Luvun 32 2-kantainen logaritmi on 5

3. a) Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 4 ja 5. Laske kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

b) Määritä toisen asteen yhtälön $x^2+px+q=0$ kertoimet p ja q, kun yhtälön juuret ovat $-2-\sqrt{6}$ ja $-2+\sqrt{6}$.

Ratkaisu.
a)



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Kosinilauseen mukaan

$$\begin{aligned} 5^2 &= 2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\alpha \\ 25 &= 20-16\cos\alpha \\ 16\cos\alpha &= -5 \qquad \| :16 \\ \cos\alpha &= -\frac{5}{16} \\ \alpha &= 108{,}209956\ldots^\circ \end{aligned}$$

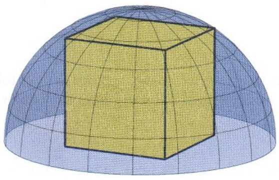
V: $108{,}2^\circ$

b) Tekijälauseen mukaan polynomilla on tekijät $\left[x-\left(-2-\sqrt{6}\right)\right]$ ja $\left[x-\left(-2+\sqrt{6}\right)\right]$, koska sillä on nollakohdat $-2-\sqrt{6}$ ja $-2+\sqrt{6}$. Tekijöiden tulo on

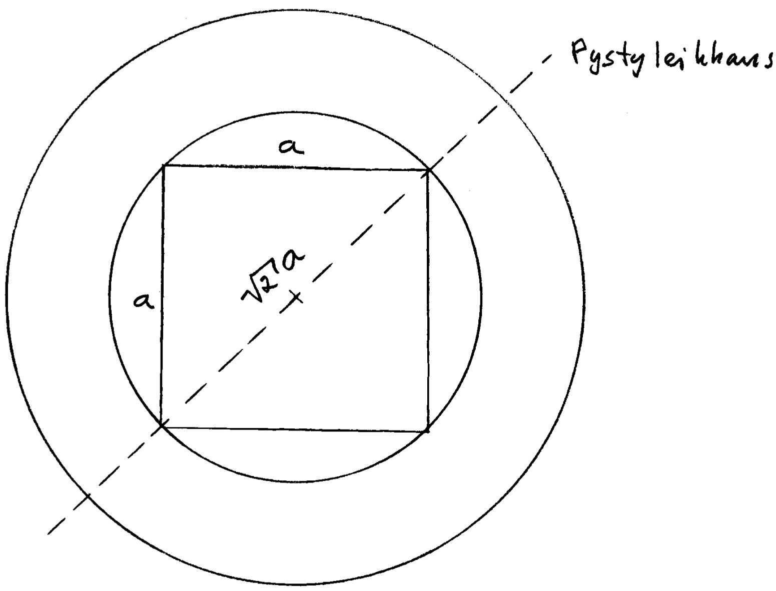
$$\begin{aligned} &\left[x-\left(-2-\sqrt{6}\right)\right]\left[x-\left(-2+\sqrt{6}\right)\right] \\ &\quad=\left(x+2-\sqrt{6}\right)\left(x+2+\sqrt{6}\right) \\ &\quad=\underline{x^2}+\underline{2x}+\cancel{\sqrt{6}x}+\underline{2x}+4+\cancel{2\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{6}x}-\cancel{2\sqrt{6}}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} \\ &\quad=x^2+4x+4-6 \\ &\quad=x^2+4x-2 \end{aligned}$$

V: Kertoimet ovat $p=4$ ja $q=-2$

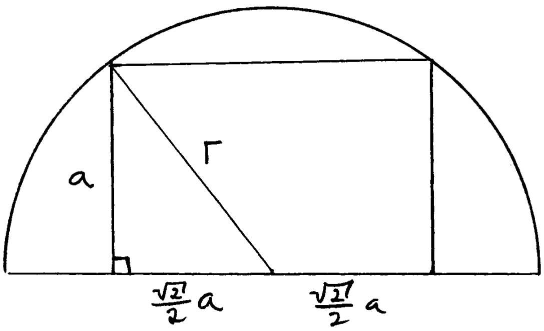
4. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



Ratkaisu.



Kuva 1. Tilanne ylhäältä päin katsottuna.



Kuva 2. Pystysuuntainen leikkaus.

Merkitään kuution särmää a:lla, jolloin sen sivutahkon lävistäjä on $\sqrt{2}a$. Merkitään ympyrän sädettä r:llä.
Kuvasta 1. saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 &= r^2 \\
a^2 + \frac{2}{4}a^2 &= r^2 \\
\frac{3}{2}a^2 &= r^2 \\
r &= {}_{(}\underline{+}{}_{)}\sqrt{\frac{3}{2}a^2} \\
r &= \sqrt{\frac{3}{2}}a
\end{aligned}$$

Tilavuuksien suhde

$$\begin{aligned}
\frac{V_{\text{kuutio}}}{V_{\text{puolipallo}}} &= \frac{a^3}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3} \\
&= \frac{a^3}{\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)^3} \\
&= {}^{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Big)}\frac{\cancel{a^3}}{\frac{2}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cancel{a^3}} \\
&= \frac{1}{\cancel{\tfrac{2}{3}}\pi\cdot\cancel{\tfrac{3}{2}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= {}^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\Big)}\frac{1}{\pi\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\pi\cdot 3} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{3\pi}
\end{aligned}$$

Suhde prosentteina

$$\frac{\sqrt{6}}{3\pi}\cdot 100\% = 25{,}98989\ldots\%$$

V: Kuution tilavuus on 26,0 % puolipallon tilavuudesta

5. Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summa on vektori $4\bar{i}+\bar{j}$ ja niiden pistetulo on $\bar{a}\cdot\bar{b}=4$. Vektori $\bar{b}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{i}$ kanssa. Määritä vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

Ratkaisu. Vektoreiden $\bar{b}$ ja $\bar{i}$ yhdensuuntaisuudesta seuraa, että

$$\bar{b}=t\bar{i}, \text{ jollakin } t\in\mathbb{R}.$$

Merkitään lisäksi

$$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}, \text{ jossa } x,y\in\mathbb{R}.$$

Tehtävänannon ehdot ovat

$$\begin{cases}\bar{a}+\bar{b}=4\bar{i}+\bar{j}\\ \bar{a}\cdot\bar{b}=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\bar{i}+y\bar{j}+t\bar{i}=4\bar{i}+\bar{j}\\ (x\bar{i}+y\bar{j})\cdot t\bar{i}=4\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\qquad\begin{cases}(x+t)\,\bar{i}+y\bar{j}=4\bar{i}+\bar{j}\\ x\cdot t+y\cdot 0=4\end{cases}$$

Yhtälöstä (1) seuraa vektorien komponenttien yksikäsitteisyyslauseen nojalla

$$(3)\qquad\begin{cases}x+t=4\\ y=1\end{cases}$$

Yhtälöstä (3) seuraa

$$(4)\qquad x=4-t$$

Sijoitetaan (4) yhtälöön (2), saadaan

$$\begin{aligned}(4-t)t&=4\\ 4t-t^2&=4\\ -t^2+4t-4&=0\qquad \| :(-1)\\ t^2-4t+4&=0\\ (t-2)(t-2)&=0\end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$\begin{aligned}t-2&=0\\ t&=2\end{aligned}$$

Sijoitetaan edellinen yhtälöön (4), saadaan

$$x = 4 - 2 = 2$$

Vektorit ovat siis

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 2\bar{i} + \bar{j} \qquad \text{ja} \\ \bar{b} &= 2\bar{i} \end{aligned}$$

V: $\underline{\underline{\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} \text{ ja } \bar{b} = 2\bar{i}}}$

6. a) Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat erivärisiset?

b) Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenään eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa?

Ratkaisu. a) Ensimmäinen nostettava pallo voi olla kumpaa tahansa väriä. Toisena nostettavan pallon täytyy olla eri väriä. Suotuisia tapauksia toisessa nostossa on siis yksi ja alkeistapauksia molemmat värimahdollisuudet eli kaksi.
Kysytty todennäköisyys on

$$P = \frac{1}{2}$$

V: Todennäköisyys, että pallot ovat eriväriset on $\dfrac{1}{2}$.

b) Ensimmäinen nostettava pallo voi olla mitä tahansa väriä. Toisena nostettavan pallon täytyy olla jotakin kahdesta muusta väristä. Suotuisia tapauksia toisessa nostossa on siis kaksi ja alkeistapauksia kaikki kolme väriä.
Kysytty todennäköisyys on

$$P = \frac{2}{3}$$

V: Todennäköisyys, että pallot ovat eriväriset on $\frac{2}{3}$.

7. Suorakulmion kaksi kärkeä on x-akselilla ja kaksi käyrällä

$$y = \frac{4}{2+x^2}.$$

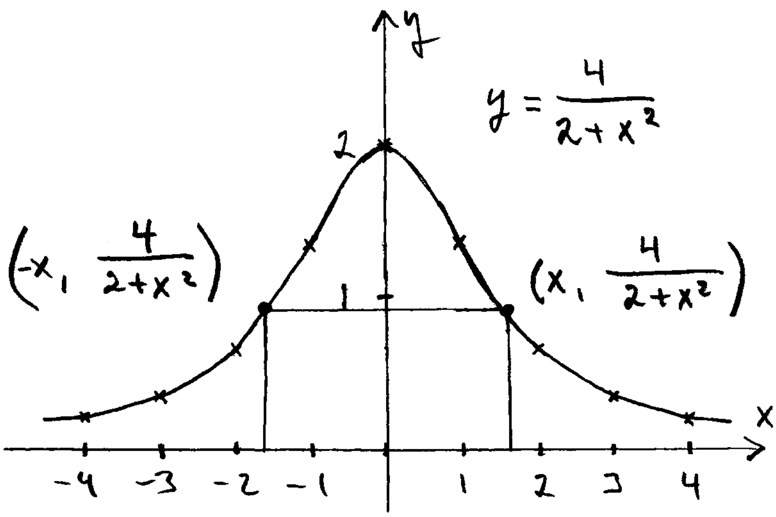
Mitkä ovat suorakulmion sivujen pituudet, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen?

Ratkaisu. Kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen, koska

$$y(-x) = \frac{4}{2+(-x)^2} = \frac{4}{2+x^2} = y(x)$$

Lasketaan $y(x)$ arvoja

x	$y = \frac{4}{2+x^2}$
0	2
1	1,33...
2	0,66...
3	0,36...
4	0,22...



Kuvaaja

Suorakulmien sivumitat ovat

$$2x \quad \text{ja} \quad \frac{4}{2+x^2}, \text{ jossa } x > 0.$$

Pinta-ala

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x \cdot \frac{4}{2+x^2} \\ &= \frac{8x}{2+x^2} \end{aligned}$$

Funktioiden osamäärän derivaatta

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{8 \cdot (2+x^2) - 8x \cdot 2x}{(2+x^2)^2} \\ &= \frac{16 + 8x^2 - 16x^2}{(2+x^2)^2} \\ &= \frac{16 - 8x^2}{(2+x^2)^2} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} \frac{16-8x^2}{(2+x^2)^2} &= 0 \quad \| \cdot (2+x^2)^2, \quad 2+x^2 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ 16 - 8x^2 &= 0 \\ -8x^2 &= -16 \quad \| : (-8) \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tehdään kulkukaavio

$$\begin{aligned} A'(1) &= \frac{16 - 8 \cdot 1^2}{(2+1^2)^2} = 0{,}88\ldots > 0 \\ A'(2) &= \frac{16 - 8 \cdot 2^2}{(2+2^2)^2} = -0{,}44\ldots < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|c|c} & 0 \quad & \sqrt{2} \quad \\ \hline A'(x) & + & - \\ \hline A(x) & \nearrow & \searrow \end{array}$$

Kulkukaaviosta nähdään, että pinta-ala on suurin, kun $x = \sqrt{2}$. Sivujen pituudet ovat:

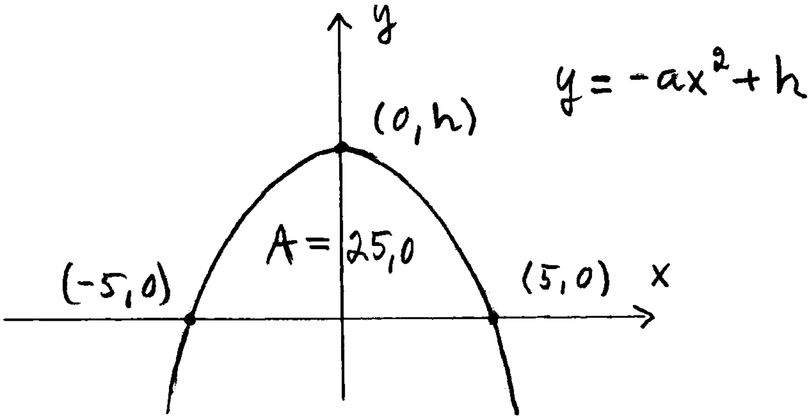
$$2x = 2\sqrt{2} \quad \text{ja}$$

$$\frac{4}{2+x^2} = \frac{4}{2+\sqrt{2}^2} = \frac{4}{2+2} = 1$$

V: Kun pinta-ala on suurin, niin x-akselin suuntaisen sivun pituus on $2\sqrt{2}$ ja y-akselin suuntaisen sivun pituus on 1.

8. Tietunnelin poikkileikkaus on osa alaspäin aukeavaa paraabelia. Tien leveys on 10 m, ja tunnelin poikkileikkauksen pinta-ala on 25,0 m^2. Määritä tunnelin korkeus senttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu.



Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon niin, että se on symmetrinen y-akselin suhteen, joten se on muotoa $y = -ax^2 + h$, jossa h on y-akselin leikkauspiste. Paraabeli kulkee pisteen $(5, 0)$ kautta, joten lukupari $(5, 0)$ toteuttaa paraabelin yhtälön, eli

$$0 = -a \cdot 5^2 + h$$
$$0 = -25a + h$$
$$h = 25a \tag{1}$$

Paraabelin yhtälö on siis

$$y = -ax^2 + 25a$$

Paraabelin pinta-ala on

$$A = 25$$

Toisaalta pinta-ala voidaan laskea määrätystä integraalista

$$
\begin{aligned}
\int_{-5}^{5} (-ax^2 + 25a)\, dx &= 25 \\
\Big/_{-5}^{5} \left(-\frac{1}{3}ax^2 + 25ax\right) &= 25 \\
-\frac{1}{3}a \cdot 5^3 + 25a \cdot 5 - \left(-\frac{1}{3}a \cdot (-5)^3 + 25a \cdot (-5)\right) &= 25 \\
-\frac{125}{3}a + 125a - \frac{125}{3}a + 125a &= 25 \\
\frac{500}{3}a &= 25 \quad \| \cdot \frac{3}{500} \\
a &= \frac{3}{20}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan

$$h = 25 \cdot \frac{3}{20} = 3{,}75\,(\mathrm{m}).$$

V: Tunnelin korkeus on 375 cm.

9. Tutki kuinka monta juurta yhtälöllä

$$3\tan x - 1 = 4x$$

on välillä $]-\pi/2, \pi/2[$.

Ratkaisu. Funktio $\tan x$ on määritelty koko avoimella välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, joten myös yhtälö on määritelty tällä välillä.

$$\begin{aligned} 3\tan x - 1 &= 4x \\ 3\tan x - 4x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Merkitään $f(x) = 3\tan x - 4x - 1$. Tehdään funktion $f(x)$ kulkukaavio

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1 + \tan^2 x) - 4 \\ &= 3 + 3\tan^2 x - 4 \\ &= 3\tan^2 x - 1 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} 3\tan^2 x - 1 &= 0 \\ \tan^2 x &= 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \tan x = -1/\sqrt{3} & \text{tai} & \tan x = 1/\sqrt{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + n\pi, & \text{tai} & x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi, \\ \text{jossa } n \in \mathbb{N} & & \text{jossa } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ olevat nollakohdat

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} \approx -0{,}524 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$$

Välin päätepisteiden likiarvot

$$-\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57 \quad \text{ja} \quad \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

Derivaatan merkki

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3\tan^2(-1) - 1 = 6{,}277\ldots > 0 \\ f'(0) &= 3\tan^2 0 - 1 = -1 < 0 \\ f'(1) &= 3\tan^2 1 - 1 = 6{,}277\ldots > 0 \end{aligned}$$

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Funktion arvot ääriarvokohdissa

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{6}\right) &= 3\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 4\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 1 \\ &= -0{,}6376\ldots < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 3\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\cdot\frac{\pi}{6} - 1 \\ &= -1{,}3623\ldots < 0 \end{aligned}$$

Välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ funktio saa kulkukaavion mukaan suurimman arvonsa kohdassa $-\frac{\pi}{6}$. Suurin arvo on $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}6376\ldots$, joten funktio saa välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}[$ vain negatiivisia arvoja, eikä sillä voi olla nollakohtia ko. välillä. Välillä $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ funktio $f(x)$ on aidosti kasvava, joten sillä voi olla ko. välillä korkeintaan yksi nollakohta.

$$f(1{,}5) = 3\cdot\tan 1{,}5 - 4\cdot 1{,}5 - 1 \approx 35{,}3 > 0$$

ja toisaalta

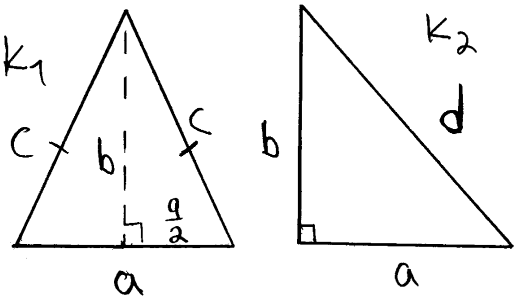
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx -1{,}36 < 0,$$

joten funktio vaihtaa merkkiään välillä $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ ja sillä on siis Bolzanon lauseen mukaan nollakohta ko. välillä. Yhtälöllä on siis yksi juuri välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

V: Yhtälöllä on yksi juuri välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

10. Kolmio K_1 on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on a ja korkeus b. Kolmio K_2 on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat a ja b. Kummalla kolmiolla on pidempi piiri?

Ratkaisu.



$$
\begin{aligned}
c^2 &= b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
c &= \underset{(-)}{\pm}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \\
d^2 &= a^2 + b^2 \\
d &= \underset{(-)}{\pm}\sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Piirit:

$$
\begin{aligned}
K_1: \quad & p_1 = a + 2c \\
& p_1 = a + 2\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_2: \quad & p_2 = a + b + d \\
& p_2 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Oletetaan, että $p_2 > p_1$. Nyt

$$
\begin{aligned}
a + b + \sqrt{a^2 + b^2} &> a + 2\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \\
b + \sqrt{a^2 + b^2} &> 2\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \quad \| ()^2 \\
b^2 + 2b\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 &> 4\left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right) \\
a^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{a^2 + b^2} &> 4b^2 + a^2 \\
2b\sqrt{a^2 + b^2} &> 2b^2 \quad \| : 2b
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+b^2} &> b \quad \|()^2 \\
a^2+b^2 &> b^2 \\
a^2 &> 0 \quad \text{tosi kaikilla } a>0,
\end{aligned}$$

joten $p_2 > p_1$.

V: K_2:n piiri on pidempi.

11. Määritä ne geometriset sarjat, joiden summa on 2 ja toinen termi on $\frac{3}{8}$. Anna vastauksena sarjan ensimmäinen termi ja sarjan suhdeluku.

Ratkaisu. Summa S.

$$S = \frac{a}{1-q}, \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Sarjan ensimmäinen termi on a ja toinen termi $\frac{3}{8}$, joten

$$\begin{aligned} q &= \frac{\frac{3}{8}}{a} \\ a &= \frac{3}{8q} \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} S &= 2 \\ \frac{a}{1-q} &= 2 \\ \frac{\frac{3}{8q}}{1-q} &= 2 \quad \| \cdot (1-q) \\ \frac{3}{8q} &= 2 - 2q \quad \| \cdot 8q \\ 3 &= 16q - 16q^2 \\ 16q^2 - 16q + 3 &= 0 \\ q &= \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 16 \cdot 3}}{2 \cdot 16} \\ q &= \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Kun } \; q = \frac{1}{4}, \quad a = \frac{3}{8 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$
$$q = \frac{3}{4}, \quad a = \frac{3}{8 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

V: Sarjat $a = \frac{3}{2}$ ja $q = \frac{1}{4}$ sekä $a = \frac{1}{2}$ ja $q = \frac{3}{4}$.

12. Osoita, että muotoa $p^2 - 1$ oleva luku on jaollinen luvulla 12, kun p on alkuluku ja suurempi kuin 3.

Ratkaisu. Oletus: $r = p^2 - 1$, p on alkuluku ja $p > 3$.
Väite: $r = 12l$, $l \in \mathbb{Z}$
Todistus: $r = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$
Koska p on alkuluku, eli se on jaollinen vain itsellään ja 1:llä, ja $p > 3$, niin p pariton ja näin ollen $p-1$ ja $p+1$ ovat parillisia:

$$\begin{aligned} p - 1 &= 2s, \quad s \in \mathbb{Z} \\ p + 1 &= 2t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kolmesta peräkkäisestä luonnollisesta luvusta yksi on aina jaollinen 3:lla, joten jokin luvuista $p-1$, p tai $p+1$ on jaollinen kolmella. p ei voi olla jaollinen 3:lla, koska se on alkuluku, ja tällöin olisi $p = 3$, joten joko

$$p - 1 = 3u \quad \text{tai} \quad p + 1 = 3u, \ u \in \mathbb{Z}.$$

Toinen luvuista $p-1$ ja $p+1$ on siis jaollinen sekä kahdella että kolmella. Luku, joka on jaollinen kahdella ja kolmella on muotoa: $2 \cdot 3 \cdot v$, $v \in \mathbb{Z}$. Näin ollen joko

$$(p-1)(p+1) = 2 \cdot 3v \cdot 2t = 12vt = 12l$$

tai

$$(p-1)(p+1) = 2s \cdot 2 \cdot 3v = 12sv = 12l,$$

joten $p^2 - 1 = 12l$ $\square$

13. Funktion f kuvaajan kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Laske funktion $\ln x$ kuvaajan kaarenpituus välillä $[1, 2]$ puolisuunnikassäännöllä jakamalla väli neljään osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu.

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \quad [a, b] = [1, 2]$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Puolisuunnikasssääntö:

$$\int_a^b g(x)\, dx = h\left[\frac{1}{2}g(x_0) + g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + \frac{1}{2}g(x_4)\right]$$

Neljä osaväliä: $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$
$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{7}{4}$, $x_4 = 2$

$$d = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{x}\right)^2}\, dx$$

$$d = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 + 1^2} + \sqrt{1 + \left(\tfrac{4}{5}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\tfrac{4}{7}\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$d = 1{,}22508\ldots \approx 1{,}225$$

V: Kaaren pituus on 1,225.

⋆**14.** Tarkastellaan lukujonoa $a_1 = \frac{9}{10}$, $a_2 = \frac{99}{100}$, $a_3 = \frac{999}{1000}$, ...

a) Määritä luvun a_n lauseke indeksin n avulla lausuttuna. (2 p.)

b) Osoita, että lukujono on kasvava ja että $a_n < 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. (3 p.)

c) Määritä $\lim_{n\to\infty} a_n$. (2 p.)

d) Mikä luku on päättymätön desimaalikehitelmä 0,999 ...? (2 p.)

Ratkaisu. $a_1 = \dfrac{9}{10}$, $a_2 = \frac{99}{100}$, $a_3 = \frac{999}{1000}$

a)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{10^1 - 1}{10^1} = \frac{9}{10} \\
a_2 &= \frac{10^2 - 1}{10^2} = \frac{99}{100} \\
a_3 &= \frac{10^3 - 1}{10^3} = \frac{999}{1000} \\
&\underline{\underline{a_n = \frac{10^n - 1}{10^n}}}
\end{aligned}
$$

b) Lukujono on kasvava, jos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{10^{n+1}-1}{10^{n+1}}}{\frac{10^n-1}{10^n}} = \frac{(10^{n+1} - 1) \cdot 10^{\cancel{n}}}{(10^n - 1) \cdot 10^{\cancel{n}+1}} \\
&= \frac{10^{n+1} - 1}{10(10^n - 1)} = \frac{10^{n+1} - 1}{10^{n+1} - 10}
\end{aligned}
$$

Tutkitaan epäyhtälöä

$$
\begin{aligned}
\frac{10^{n+1} - 1}{10^{n+1} - 10} &\geq 1 \quad \| \cdot (10^{n+1} - 10), \quad 10^{n+1} - 10 > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \\
10^{n+1} - 1 &\geq 10^{n+1} - 10 \\
-1 &\geq -10 \quad \text{tosi } \forall n \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

<u>Jono a_n on siis kasvava.</u>

Osoitetaan vielä, että kaikki jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 1.

$$\begin{aligned}
& a_n < 1 \\
\iff \quad & \frac{10^n - 1}{10^n} < 1 \qquad \| \cdot 10^n, \quad 10^n > 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}_+ \\
\iff \quad & 10^n - 1 < 10^n \\
\iff \quad & -1 < 0
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö on aina tosi, joten kaikki lukujonon jäsenet ovat pienempiä kuin yksi.

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{10^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{\to 0} \\
&= 1 - 0 \\
&= \underline{\underline{1}}
\end{aligned}$$

d) $0{,}99999\ldots = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{1}}$

⋆**15.** Funktio $f\colon [0,\infty[\, \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = 2^{1-n}\sin x, \quad \text{kun } x \in [(n-1)\pi, n\pi[, \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots.$$

a) Piirrä funktion kuvaaja, kun $x \in [0, 3\pi]$. (2 p.)

b) Laske $\displaystyle\int_0^{3\pi} f(x)\,dx$. (2 p.)

c) Laske $\displaystyle\int_0^{n\pi} f(x)\,dx$. (3 p.)

d) Määritä $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f(x)\,dx$. (2 p.)

Ratkaisu. $f\colon [0,\infty[\, \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 2^{1-n}\sin x, \quad \text{kun } x \in [(n-1)\pi, n\pi[,\ n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

a) Kun $x \in [0, \pi[$,

$$f(x) = 2^{1-1}\cdot\sin x$$
$$f(x) = \sin x$$

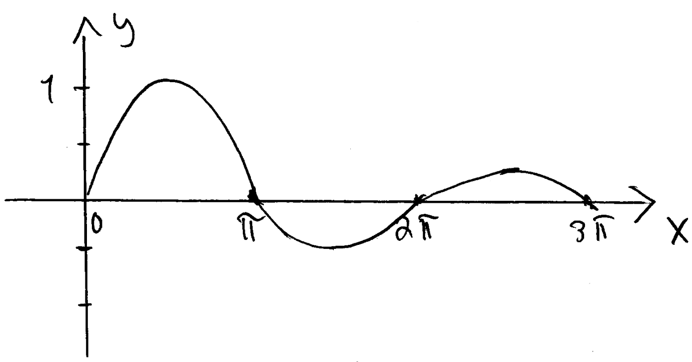
Kun $x \in [\pi, 2\pi[$,

$$f(x) = 2^{1-2}\cdot\sin x$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x$$

Kun $x \in [2\pi, 3\pi[$,

$$f(x) = 2^{1-3}\cdot\sin x$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\sin x$$

Kun $x = 3\pi$, niin $f(x) = f(3\pi) = 2^{1-4}\cdot\sin 3\pi = 0$



b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{3\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{1}{4}\sin x\,dx \\
&= -\Big/_{\!0}^{\pi} \cos x - \frac{1}{2}\Big/_{\!\pi}^{2\pi} \cos x - \frac{1}{4}\Big/_{\!2\pi}^{3\pi} \cos x \\
&= -(\cos\pi - \cos 0) - \frac{1}{2}\big(\cos 2\pi - \cos\pi\big) - \frac{1}{4}(\cos 3\pi - \cos 2\pi) \\
&= -(-1-1) - \frac{1}{2}\big(1-(-1)\big) - \frac{1}{4}(-1-1) \\
&= 2 - 1 + \frac{1}{2} \\
&= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

c)

$$\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{2}{(-2)^{n-1}}$$

Oikeanpuoleinen lauseke on geometrinen summa S_n. Geometriselle summalle pätee

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

jossa tässä tapauksessa $a = 2$ ja $q = -\frac{1}{2}$. Integraalista tulee siis

$$
\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} f(x)\,dx &= \frac{2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{3}{2}} \\
&= \underline{\underline{\frac{4\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3}}}.
\end{aligned}
$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Oikeanpuoleinen lauseke on suppeneva geometrinen sarja S, joten

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f(x)\,dx &= S\\ &= \frac{a}{1-q}\\ &= \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{2}{\frac{3}{2}}\\ &= \underline{\underline{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$