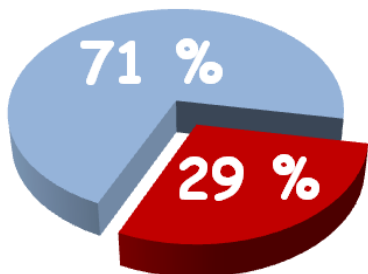


Tiesitkö tätä?

MAFY:n lääkiskurssi 2,6-kertaistaa mahdollisuutesi päästä sisään yhdellä yrityksellä. Poikkeuksellisen kovista tuloksista johtuen lääkikset alkavatkin täyttyä MAFY:n kurssilaisista.



29 % vuonna 2016 Helsingin suomenkieliseen yleislääkikseen päässeistä tuli MAFY:n kurssilta.

Lääkiskurssi

- 5-8 täysmittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koelaisissa.
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 16 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa valintasi mukaan 29.8., 31.10., 9.1., 20.2. tai 28.3. Oppitunnin ajankohdaksi voi yleensä valita aamun, iltapäivän tai illan.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 4 täysmittaista harjoituskoea kustakin aineesta ja pitkällä kurssilla lisäksi 2 yo-harjoituskoea kustakin aineesta.
- Pitkäkurssi 28.3.-26.5. ja kevätkurssi 20.2.-26.5.

Pitkä matematiikka, kevät 2017

Mallivastaukset, 22.3.2017

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n Jyväskylän kursseista ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Olli Hirviniemi, Katja Niemistö ja Joonas Suorsa. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion fysiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot

1. a) Ratkaise yhtälö $2x^2 - 7x - 4 = 0$.
 b) Määritä sellaiset luvut a ja b , että yhtälö $(x + a)^2 = x^2 + 14x + b$ pätee kaikilla muuttujan x arvoilla.
 c) Tarkastellaan ensimmäisen asteen polynomifunktiota $p(x) = cx + d$, jolle $p(4) = 1$ ja $p(7) = 3$. Ratkaise yhtälö $p(x) = 0$.

Ratkaisu.

- a) Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2}$$

1p

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{9^2}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{7+9}{4}$$

TAI

$$x = \frac{7-9}{4}$$

$$x = \frac{16}{4}$$

TAI

$$x = \frac{-2}{4}$$

$$x = 4$$

TAI

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = 4$ tai $x = -\frac{1}{2}$.

1p(2p)

b)

$$(x + a)^2 = x^2 + 14x + b$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 14x + b$$

$$2ax - 14x + a^2 - b = 0$$

$$(2a - 14)x + a^2 - b = 0 \quad (1)$$

Huomataan, että yhtälö on tosi kaikilla x , jos sekä $2a - 14 = 0$ että $a^2 - b = 0$.

Huomautus lukijalle: Yllä olevalla päättelyllä yhtälö on kyllä tosi kaikilla x , mutta se ei perustele, että näin saadaan kaikki ratkaisut. Tätä ei kuitenkaan vaadittu vastauksessa. Alla on esimerkki, miten tämän voi perustella.

Yhtälö (1) on yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa. Lauseke $a^2 - b$ on vakio, joten yhtälö on tosi kaikilla x vain, jos $a^2 - b = 0$, sillä muuten arvolla $x = 0$ yhtälö ei ole tosi. Lauseke $2a - 14$ on vakio, joten täytyy olla myös $2a - 14 = 0$, sillä muuten yhtälö ei toteudu esimerkiksi arvolla $x = 1$, kun $a^2 - b = 0$.

Saadaan siis yhtälöt

$$2a - 14 = 0 \quad (2)$$

$$a^2 - b = 0. \quad (3)$$

1p(3p)

Yhtälöstä (2) saadaan

$$2a - 14 = 0$$

$$2a = 14 \quad || : 2$$

$$a = 7.$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (3).

$$7^2 - b = 0$$

$$b = 7^2$$

$$b = 49.$$

Alkuperäinen yhtälö on siis tosi kaikilla x :n arvoilla, kun $a = 7$ ja $b = 49$. 1p(4p)

- c) Polynomifunktiosta $p(x) = cx + d$ tiedetään, että $p(4) = 1$ ja $p(7) = 3$. Tästä saadaan yhtälöt

$$p(4) = c \cdot 4 + d = 1$$

$$4c + d = 1$$

$$d = 1 - 4c \quad (1)$$

$$p(7) = c \cdot 7 + d = 3$$

$$7c + d = 3. \quad (2)$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2).

$$7c + (1 - 4c) = 3$$

$$7c + 1 - 4c = 3$$

$$3c + 1 = 3$$

$$3c = 3 - 1 = 2 \quad || : 3$$

$$c = \frac{2}{3}.$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (1).

$$d = 1 - 4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$d = 1 - \frac{8}{3}$$

$$d = \frac{3}{3} - \frac{8}{3}$$

$$d = \frac{3 - 8}{3}$$

$$d = -\frac{5}{3}.$$

1p(5p)

Polynomifunktio on siis

$$p(x) = cx + d = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Ratkaistaan kysytty yhtälö.

$$p(x) = 0$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \quad || \cdot 3$$

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5 \quad || : 2$$

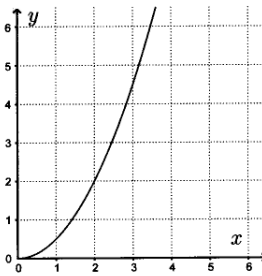
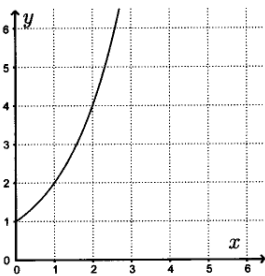
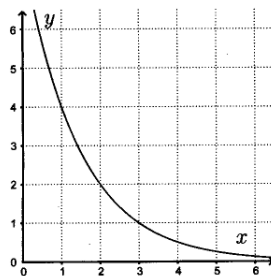
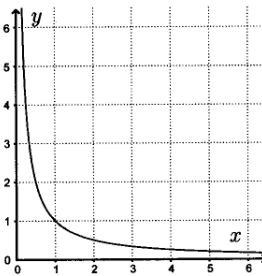
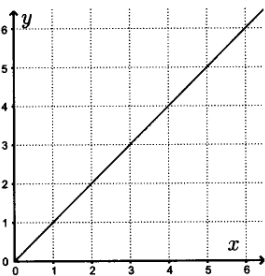
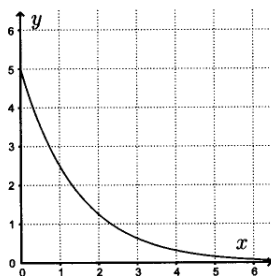
$$x = \frac{5}{2}.$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{5}{2}$.

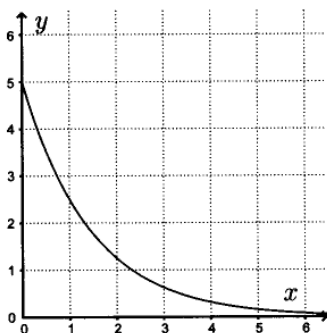
1p(6p)

2. Alla on viisi väittämää sekä kuusi kuviota. Kirjoita jokaisen kuvion alapuolella olevaan ruutuun sen väittämän kirjain, joka pätee kyseisen kuvion tapauksessa. Yksi kirjaimista tulee kahteen eri ruutuun. Vastauksia ei tarvitse perustella.

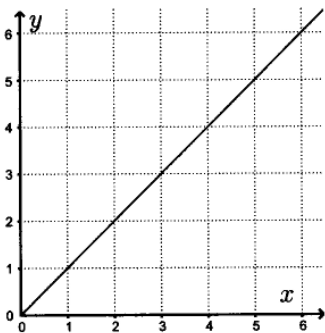
- (A) y on suoraan verrannollinen muuttujaan x .
- (B) y on kääntäen verrannollinen muuttujaan x .
- (C) y kaksinkertaistuu aina, kun muuttuja x kasvaa yhdellä.
- (D) y puolittuu aina, kun x kasvaa yhdellä.
- (E) y on suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön.



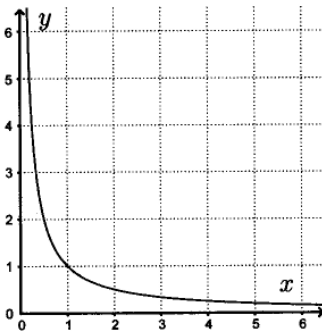
Ratkaisu.



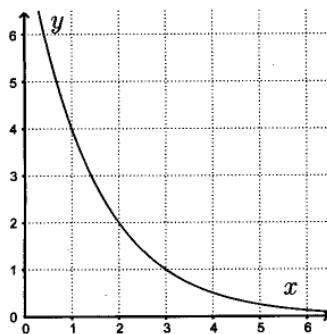
D



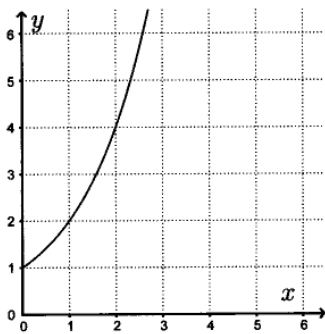
A



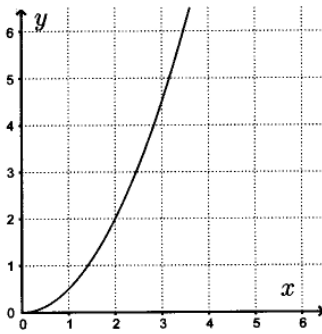
B



D



C



E

Pisteytys: 1p / oikea kirjain

6p

Selitykset (ei vaadittu vastauksessa):

Ylärivin vasemmanpuoleinen kuvaaja: Kuvaajasta voidaan lukea, että

Kun $x = 0$, $y = 5$.

Kun $x = 1$, $y = 2,5$.

Kun $x = 2$, $y = 1,25$.

Näin ollen väittämä D pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

Ylärivin keskeinen kuvaaja: Kuvaaja on origon kautta kulkeva nouseva suora, joten sen yhtälö on

$$y = kx,$$

missä $k > 0$ on vakio. Näin ollen y on suoraan verrannollinen muuttujaan x .

Ylärivin oikeanpuoleinen kuvaaja: Huomataan, että y kasvaa, kun x pienenee, ja y pienenee, kun x kasvaa. Väittämät A, C, ja E eivät siis päde tämän kuvaajan tapauksessa. Huomataan lisäksi, että y ei puolitu aina kun x kasvaa yhdellä, joten myöskään väittämä D ei päde tämän kuvaajan tapauksessa. Ainoa sopiva on väittämä B.

Alarivin vasemmanpuoleinen kuvaaja: Kuvaajasta voidaan lukea, että

Kun $x = 1$, $y = 4$.

Kun $x = 2$, $y = 2$.

Kun $x = 3$, $y = 1$.

Kun $x = 4$, $y = 0,5$.

Näin ollen väittämä D pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

Alarivin keskimmäinen kuvaaja: Kuvaajasta voidaan lukea, että

Kun $x = 0$, $y = 1$.

Kun $x = 1$, $y = 2$.

Kun $x = 2$, $y = 4$.

Näin ollen väittämä C pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

Alarivin oikeanpuoleinen kuvaaja: Kuvaaja näyttää paraabelilta. Lisäksi huomataan, että

Kun $x = 0$, $y = 0$.

Kun $x = 1$, $y = 0,5$.

Kun $x = 2$, $y = 2$.

Kun $x = 3$, $y = 4,5$.

Näiden perusteella voidaan arvata, että $y = \frac{1}{2}x^2$. Näin ollen väittämä E pätee tämän kuvaajan tapauksessa.

3. Olkoot $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Millä parametrin $-2 \leq t \leq 2$ arvolla vektorin $\vec{c}_t = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ pituus on mahdollisimman pieni?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
 \vec{c}_t &= t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \\
 &= t(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (1-t)(2\vec{i} + 5\vec{k}) \\
 &= t\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t\vec{k} + 1 \cdot (2\vec{i} + 5\vec{k}) - t(2\vec{i} + 5\vec{k}) \\
 &= t\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t\vec{k} + 2\vec{i} + 5\vec{k} - 2t\vec{i} - 5t\vec{k} \\
 &= (t+2-2t)\vec{i} + 2t\vec{j} + (3t+5-5t)\vec{k} \\
 &= (2-t)\vec{i} + 2t\vec{j} + (5-2t)\vec{k}
 \end{aligned}$$

1p

Lasketaan vektorin $\vec{c}_t$ pituus:

$$\begin{aligned}
 |\vec{c}_t| &= \sqrt{(2-t)^2 + (2t)^2 + (5-2t)^2} \\
 &= \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2t + t^2 + 2^2t^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2t + (2t)^2} \\
 &= \sqrt{4 - 4t + t^2 + 4t^2 + 25 - 20t + 4t^2} \\
 &= \sqrt{9t^2 - 24t + 29}.
 \end{aligned}$$

1p(2p)

Tutkitaan, milloin vektorin $\vec{c}_t$ pituus on pienin.

Vektorin pituus $|\vec{c}_t| = \sqrt{9t^2 - 24t + 29}$, jossa $-2 \leq t \leq 2$, on pienin, kun funktion $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 9t^2 - 24t + 29$ arvo on pienin.

1p(3p)

Lasketaan funktion f derivaatta:

$$f'(t) = 2 \cdot 9t^1 - 24t^0 = 18t - 24.$$

1p(4p)

Lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= 0 \\
 18t - 24 &= 0 \quad || + 24 \\
 18t &= 24 \quad || : 18 \\
 t &= \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \in [-2, 2].
 \end{aligned}$$

1p(5p)

RATKAISUTAPA I

Koska funktion f kuvaaja on osa ylöspäin aukeavaa paraabelia, sen pienin arvo saadaan derivaatan nollakohdassa, mikäli nollakohta kuuluu välille $[-2, 2]$. Derivaatan nollakohta $\frac{4}{3} \in [-2, 2]$, joten f saa pienimmän arvonsa, kun $t = \frac{4}{3}$. Siis myös vektorin $\vec{c}_t$ pituus on pienin, kun $t = \frac{4}{3}$.

1p(6p)

RATKAISUTAPA II

Suljetulla välillä derivoituva funktio saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

Funktio f on derivoituva suljetulla välillä $[-2, 2]$.

Lasketaan funktion f arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä:

$$f(2) = 9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 + 29 = 36 - 48 + 29 = 17$$

$$f(-2) = 9 \cdot 4 + 24 \cdot 2 + 29 = 36 + 48 + 29 = 113$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 9 \cdot \frac{16}{9} - 24 \cdot \frac{4}{3} + 29 = 16 - 32 + 29 = 13,$$

joista pienin on $f\left(\frac{4}{3}\right)$. Funktio f saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $t = \frac{4}{3}$, joten myös vektorin $\bar{c}_t$ pituus on pienin, kun $\underline{\underline{t = \frac{4}{3}}}$.

1p(6p)

4. Logaritmi voidaan määritellä erilaisilla kantaluvuilla. Määritelmän mukaan $\log_a x = b$, jos $x = a^b$. Tälle a -kantiselle logaritmille pätee kaava

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

- a) Olkoot $x > 0$ ja $y > 0$. Ratkaise y yhtälöstä $\log_4 y = \log_2 x$.
 b) Suorat $x = 2$, $x = 3$ ja $y = 0$ rajaavat yhdessä a-kohdan käyrän kanssa erään tasokuvion. Hahmottele tämä kuvio ja laske sen pinta-ala.

Ratkaisu.

- a) Ratkaistaan yhtälö.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

$$\log_4 y = \log_2 x$$

$$\frac{\ln y}{\ln 4} = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$\frac{\ln y}{\ln 2^2} = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$\frac{\ln y}{2 \cdot \ln 2} = \frac{\ln x}{\ln 2} \quad || \cdot 2$$

$$\ln y = 2 \ln x$$

$$\ln y = \ln x^2$$

$$y = x^2.$$

1p

1p(2p)

1p(3p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

$$\log_4 y = \log_2 x \quad | 4^{(\quad)}$$

$$y = 4^{\log_2 x}$$

$$y = (2^2)^{\log_2 x}$$

$$y = (2^{\log_2 x})^2$$

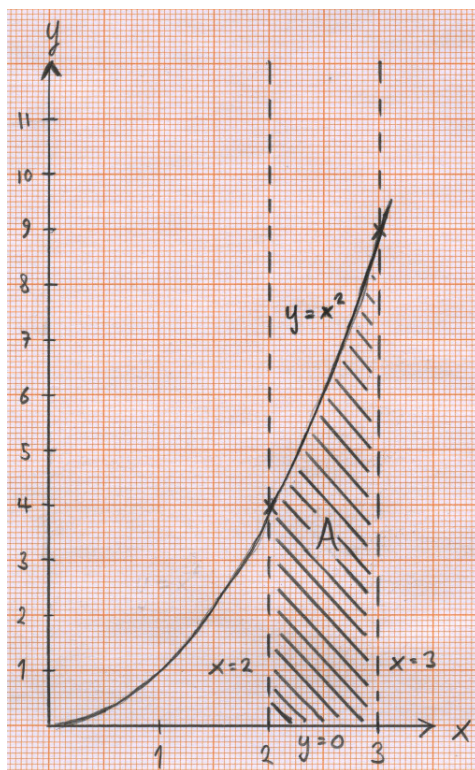
$$y = x^2$$

1p

1p(2p)

1p(3p)

- b) Kuvaaja on sama kuin ylöspäin aukeavan paraabelin $y = x^2$ kuvaaja arvoilla $x > 0$.



1p(4p)

Lasketaan kuvaajan pisteet kohdissa $x = 2$ ja $x = 3$.

x	$y = x^2$
2	4
3	9

Lasketaan pinta-ala integroimalla.

$$A = \int_2^3 x^2 dx$$

1p(5p)

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

1p(6p)

5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x - 1| + 1$.

- a) Funktion lauseke voidaan sieventää välillä $0 \leq x \leq 1$ niin, ettei siinä esiinny itseisarvoa. Mikä on tämä sievennetty lauseke? (2 p.)
- b) Funktion f kuvaaja pyörähtää x -akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 2$. Laske näin muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus. (4 p.)

Ratkaisu.

- a) Itseisarvon määritelmän mukaan

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0 \end{cases}$$

Kun $0 \leq x \leq 1$, niin $x - 1 \leq 0$, joten $|x - 1| = -(x - 1)$. 1p

Siis

$$f(x) = -(x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2,$$

kun $0 \leq x \leq 1$.

Vastaus: $f(x) = -x + 2$ 1p(2p)

- b) Kun $1 \leq x \leq 2$, niin $x - 1 \geq 0$, joten $|x - 1| = x - 1$ ja $f(x) = x - 1 + 1 = x$.

Siis

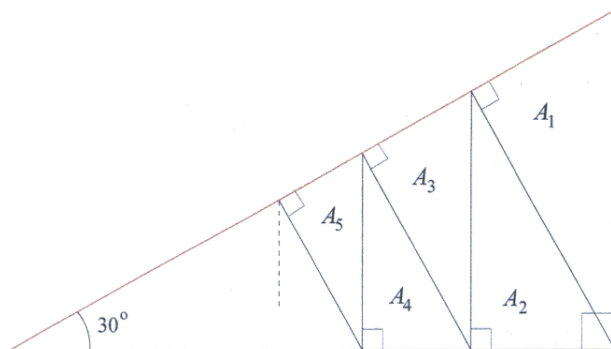
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Pyörähdyskappaleen tilavuus välillä $[0, 2]$ on

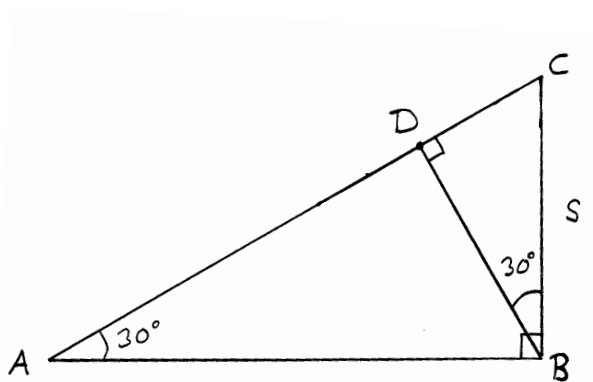
$$\begin{aligned}\int_0^2 \pi (f(x))^2 dx &= \int_0^1 \pi (-x + 2)^2 dx + \int_1^2 \pi x^2 dx \quad \text{1p(3p)} \\&= \pi \left[\int_0^1 (x^2 - 4x + 4) dx + \int_1^2 x^2 dx \right] \\&= \pi \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right) + \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 \right) \right] \quad \text{2p(5p)} \\&= \pi \left(\frac{1}{3} - 2 + 4 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \\&= \pi \left(2 + \frac{8}{3} \right) \\&= \frac{14}{3} \pi\end{aligned}$$

Vastaus: Pyörähdyskappaleen tilavuus on $\frac{14}{3}\pi$. 1p(6p)

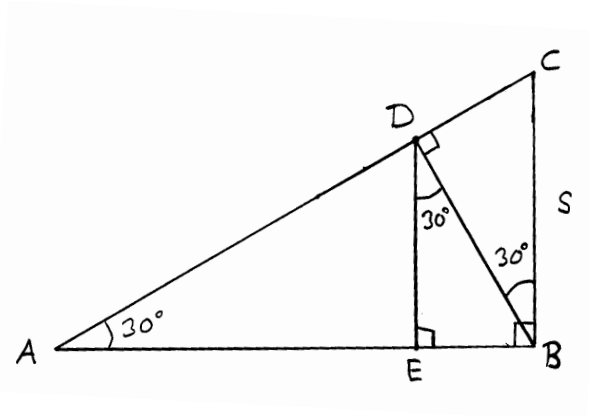
6. Suorakulmaisen kolmion muotoisesta suklaalevystä lohkotaan alla olevan kuvion mukaisesti n kappaletta yhdenmuotoisia paloja, joiden pinta-alat ovat $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Kuinka monta palaa suklaasta täytyy lohkaista, jotta palojen yhteenlasketut pinta-alat muodostavat vähintään 97 % suklaalevyn alkuperäisestä pinta-alasta?



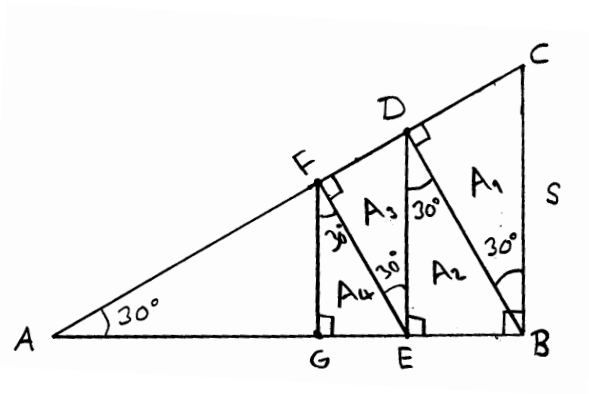
Ratkaisu. Koko suklaalevy ABC on yhdenmuotoinen ensimmäisen palan BCD kanssa, sillä niissä on yhteinen kulma ACB ja molemmissa on suora kulma.



Ensimmäinen pala BCD on puolestaan yhdenmuotoinen seuraavan palan BDE kanssa, sillä niissä on molemmissa suorakulma, ja kulmat DBC ja BDE ovat samankohvaisina kulmina yhtä suuret.



Samoin kaikki seuraavatkin palat ovat yhdenmuotoisia edellisten palojen kanssa.



Kolmioista saadaan

$$|BC| = s$$

$$|DB| = \cos(30^\circ) \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \quad \text{1p}$$

$$|ED| = \cos(30^\circ) \cdot |DB| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot s$$

$$|FE| = \cos(30^\circ) \cdot |ED| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot s$$

ja niin edelleen. 1p(2p)

RATKAISUTAPA I

Kun suklaalevystä poistetaan n palaa, jäljelle jäävä pala on myös yhdenmuotoinen koko levyn kanssa, koska sillä on sama kulma CAB ja molemmissa on suorakulma. Jäljelle jäävän palan lyhyemmän kateetin pituus on

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot s. \text{_____} \quad 1\text{p}(3\text{p})$$

Merkitään koko levyn pinta-alaa A :lla ja jäljelle jäävää pinta-alaa A_j :llä. Pinta-alojen suhde on vastinsivujen neliöiden suhde, joten

$$\frac{A_j}{A} = \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot s.}{s.}\right)^2 \quad || \cdot A$$

$$A_j = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} \cdot A. \text{_____} \quad 1\text{p}(4\text{p})$$

Selvitetään, millä n jäljelle jäävä pinta-ala on alle 3% koko pinta-alasta, eli pois lohkaistujen palojen pinta-ala on yli 97% koko pinta-alasta. Rajatapauksessa:

$$A_j = 0,03A$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} \cdot A = 0,03A$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = 0,03 \text{_____} \quad 1\text{p}(5\text{p})$$

$$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n}\right) = \ln(0,03)$$

$$2n \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln(0,03) \quad || : \left(2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$n = \frac{\ln(0,03)}{2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$n = 12,189 \dots$$

Näin ollen lohkaistujen palojen yhteenlaskettu pinta-ala on vähintään 97% koko levyn pinta-alasta, kun paloja leikataan 13 kappaletta. _____ $1\text{p}(6\text{p})$

RATKAISUTAPA II

Irti lohkaistavien palojen pinta-alat ovat siis

$$A_1 = \frac{1}{2}|BC||DB|\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}|DB||ED|\sin(30^\circ) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot s^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2}|ED||FE|\sin(30^\circ) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \cdot s^2, \quad \text{1p(3p)}$$

eli n :en palan pinta-ala on siis

$$A_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(2n-1)} s^2$$

$$A_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} \cdot s^2$$

$$A_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^n \cdot s^2$$

$$A_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot s^2$$

Palasten pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on

$$A_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} s^2$$

ja suhdeluku on

$$q = \frac{3}{4}.$$

Näin ollen ensimmäisen $n:n$ palan pinta-alojen summa on

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n A_k &= A_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} s^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}s^2}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}s^2}{8} \cdot 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}s^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right).
 \end{aligned}$$

1p(4p)

Lasketaan koko suklaalevyn, eli kolmion ABC pinta-ala. Kolmiosta saadaan, että

$$\begin{aligned}
 \tan(30^\circ) &= \frac{|BC|}{|AB|} \quad \parallel \cdot \frac{|AB|}{\tan(30^\circ)} \\
 |AB| &= \frac{|BC|}{\tan(30^\circ)} \\
 |AB| &= \frac{s}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 |AB| &= \sqrt{3} \cdot s.
 \end{aligned}$$

Lasketaan koko suklaalevyn, eli kolmion ABC pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2}|AB||BC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2.$$

1p(5p)

Selvitetään, kuinka monta palaa täytyy lohkaista, että niiden summa on

vähintään 97% koko levyn pinta-alasta. Rajatapauksessa siis

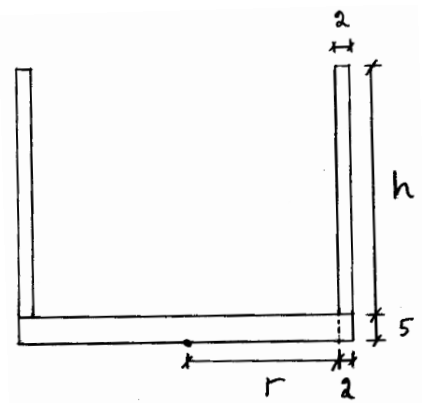
$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n A_k &= 0,97A \\
 \cancel{\frac{\sqrt{3}s^2}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) &= 0,97 \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}s^2} \\
 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n &= 0,97 \\
 \left(\frac{3}{4}\right)^n &= 1 - 0,97 \\
 \left(\frac{3}{4}\right)^n &= 0,03 \\
 \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) &= \ln(0,03) \\
 n \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right) &= \ln(0,03) \quad || : \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\
 n &= \frac{\ln(0,03)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \\
 n &= 12,189 \dots
 \end{aligned}$$

Näin ollen lohkaistujen palojen yhteenlaskettu pinta-ala on vähintään 97% koko levyn pinta-alasta, kun paloja leikataan 13 kappaletta.

1p(6p)

7. Suunnittele sellainen suoran lieriön muotoinen juomalasi, jonka pohjan paksuus on 5,0 mm, seinämän paksuus 2,0 mm, vetoisuus 2,0 dl ja jonka valmistamiseen tarvitaan mahdollisimman vähän lasia. Ilmoita lasin korkeus ja ulkopuolelta mitattu pohjan halkaisija.

Ratkaisu.



Astian sisätilavuus on 2 dl = 200000 mm³, josta saadaan

$$\pi r^2 h = 200000 \quad || : (\pi r^2)$$

1p

$$h = \frac{200000}{\pi r^2}$$

Juomalasin valmistamiseen kuluvan lasin määrä $V = V_u - V_s$, jossa V_s on sisätilavuus 200000 mm³ ja V_u on ulkotilavuus, eli ulkopinnan rajoittaman pienimmän sylinterin tilavuus.

$$V = \pi(r + 2)^2(h + 5) - 200000$$

2p(3p)

$$= \pi(r + 2)^2 \left(\frac{200000}{\pi} r^{-2} + 5 \right) - 200000$$

$$= (r + 2)^2(200000r^{-2} + 5\pi) - 200000$$

1p(4p)

$$V'(r) = 2(r + 2)(200000r^{-2} + 5\pi) + (r + 2)^2 \cdot (-2) \cdot 200000r^{-3}$$

$$= 2(r + 2)[200000r^{-2} + 5\pi - (r + 2) \cdot 200000r^{-3}]$$

$$= 2(r + 2)(200000r^{-2} + 5\pi - 200000r^{-2} - 400000r^{-3})$$

$$= 2(r + 2)(5\pi - 400000r^{-3})$$

1p(5p)

Derivaatan nollakohdat

$$\begin{array}{ll}
 2(r+2)(5\pi - 400000r^{-3}) = 0 & \\
 r+2 = 0 & \text{tai} \quad 5\pi - 400000r^{-3} = 0 \\
 r = -2 & 5\pi = 400000r^{-3} \quad \parallel \cdot \frac{r^3}{5\pi} \\
 \text{hylätään} & r^3 = \frac{80000}{\pi} \\
 & r = \sqrt[3]{\frac{80000}{\pi}} \\
 & r \approx 29,42 \dots
 \end{array}$$

Lasketaan derivaatan merkit nollakohdan molemmin puolin kulkukaavion piirtämiseksi.

$$\begin{aligned}
 V'(10) &= 2(10+2)(5\pi - 400000 \cdot 10^{-3}) = -9223,008 \dots < 0 \\
 V'(100) &= 2(10+2)(5\pi - 400000 \cdot 100^{-3}) = 3122,824 \dots > 0.
 \end{aligned}$$

Kulkukaavio:

	$\sqrt[3]{\frac{80000}{\pi}}$	
$V'(r)$	-	+
$V(r)$		
	minimi	

Ulkopuolinen halkaisija on

$$2(r+2) = 62,8402 \dots \approx \underline{\underline{63 \text{ (mm)}}}.$$

Lasin korkeus on

$$h+5 = \frac{200000}{\pi}r^{-2} + 5 = 78,5506 \dots \approx \underline{\underline{79 \text{ (mm)}}}.$$

8. Tehtävänä on määrittää se yhtälön

$$4x^3 + 18x^2 + 23x + 7 = 0$$

ratkaisu, joka on lähimpänä kohtaa $x = -1$. Valitse alkuarvo (esimerkiksi kuvaajan perusteella) ja laske Newtonin menetelmällä tämän ratkaisun likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu. Määritellään $f(x) = 4x^3 + 18x^2 + 23x + 7$.

Sijoittamalla saadaan, että $f(-3) = -8 < 0$, $f(-2) = 1 > 0$, $f(-1) = -2 < 0$ ja $f(0) = 7 > 0$.

Polynomifunktiona f on jatkuva, joten Bolzanon lauseen nojalla funktiolla f on nollakohta joka välillä $] -3, -2[$, $] -2, -1[$ ja $] -1, 0[$.

Koska f on kolmannen asteen polynomi, sillä on enintään kolme nollakohtaa.

Erityisesti, kullakin näistä kolmesta välistä on tasan yksi nollakohta.

Etsittävä nollakohta on joko välillä $] -2, -1[$ tai $] -1, 0[$.

Pätee $f(-0,5) = -0,5 < 0$ ja $f(-0,4) = 0,424 > 0$, ja lisäksi $f(-1,7) = 0,268 > 0$ ja $f(-1,6) = -0,104 < 0$.

On siis löydettävä nollakohta väliltä $] -0,5; -0,4[$, sillä se on lähimpänä kohtaa $x = -1$.

2p

Käytetään Newtonin menetelmää alkuarvolla $x_0 = -0,45$.

1p(3p)

$$f(x) = 4x^3 + 18x^2 + 23x + 7$$

$$f'(x) = 12x^2 + 36x + 23$$

$$x_0 = -0,45$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0,4424702 \dots$$

1p(4p)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0,4425462 \dots$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0,4425462 \dots$$

1p(5p)

Nollakohdan likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella on siis $-0,4425$.

Varmistetaan tämä vielä:

$$f(-0,44255) = -3,55 \dots \cdot 10^{-5} < 0$$

$$f(-0,44245) = 9,06 \dots \cdot 10^{-4} > 0.$$

Nollakohdan likiarvo on todella $-0,4425$.

1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

9. Oletetaan, että p , q ja r ovat positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$(p + q)(q + r)(r + p)$$

on parillinen.

Ratkaisu.

RATKAISUTAPA 1

Tehdään vastaoletus: Joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla p , q ja r luku $(p + q)(q + r)(r + p)$ on pariton. _____

1p

Tällöin lukujen $p + q$, $q + r$ ja $r + p$ on kaikkien oltava parittomia. _____

1p(2p)

Silloin $(p + q) + (q + r) + (r + p)$ olisi kolmen parittoman kokonaisluvun summa ja siten pariton. _____

1p(3p)

Mutta $(p + q) + (q + r) + (r + p) = 2p + 2q + 2r = 2(p + q + r)$, _____

1p(4p)

joten summa on parillinen, mikä on ristiriitaista. _____

1p(5p)

Siten vastaoletus on väärä ja $(p + q)(q + r)(r + p)$ on aina parillinen. _____

1p(6p)

RATKAISUTAPA 2

Jos ainakin toinen luvuista $p + q$ ja $q + r$ on parillinen, _____

1p

kokonaislukujen tulossa $(p + q)(q + r)(r + p)$ on parillinen tekijä ja tulo on siten parillinen. _____

1p(2p)

Oletetaan sitten, että $p + q$ ja $q + r$ ovat molemmat parittomia. _____

1p(3p)

Silloin $(p + q) + (q + r) = r + p + 2q$ on kahden parittoman luvun summana parillinen.

Luku $2q$ on parillinen, joten $(r + p + 2q) - 2q = r + p$ on kahden parillisen luvun erotuksena parillinen. _____

1p(4p)

Silloin tulossa $(p + q)(q + r)(r + p)$ on parillinen tekijä, joten tulo on parillinen. _____

1p(5p)

Luku $(p + q)(q + r)(r + p)$ on siis aina parillinen. _____

1p(6p)

RATKAISUTAPA 3

Tehdään vastaoletus: Joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla p , q ja r luku $(p + q)(q + r)(r + p)$ on pariton. _____

1p

Tällöin lukujen $p + q$, $q + r$ ja $r + p$ on kaikkien oltava parittomia. _____

1p(2p)

Oletetaan, että p on parillinen. Silloin $p+q$ on pariton vain, jos q on pariton. 1p(3p)

Jos q ja $q+r$ ovat parittomia, niin silloin r on parillinen. 1p(4p)

Tästä seuraa kuitenkin, että $r+p$ on parillinen. 1p(5p)

Oletuksesta, että p on pariton, seuraa vastaavasti, että q on parillinen ja r pariton. Mutta silloin myös $r+p$ on parillinen. Vastaoletus on siis väärä. 1p(6p)

RATKAISUTAPA 4

Jos yksikin tekijöistä $(p+q)$, $(q+r)$ tai $(r+p)$ on parillinen, tulo on parillinen. 1p

Taulukoidaan kaikki mahdolliset vaihtoehdot lukujen p , r ja q parillisuudelle ja parittomuudelle ja näitä tapauksia vastaavat lukujen $(p+q)$, $(q+r)$ ja $(r+p)$ parillisuudet ja parittomuudet. 1p(2p)

Merkitään x parillisten kohdalle.

p	r	q	$p+q$	$q+r$	$r+p$
			x	x	x
		x			x
	x		x		
x				x	
	x	x		x	
x		x	x		
x	x				x
x	x	x	x	x	x

Taulukosta nähdään, että kaikissa tapauksissa vähintään yksi tulon tekijöistä on parillinen, joten tulokin on siis aina parillinen. 3p(5p)

1p(6p)

10. Tiedetään, että $h(x) = g(f(x))$, $f(x) = e^x$ ja $g(x) = 2x^2 + 1$. Elmeri ja Uolevi laskevat derivaatan $h'(x)$ seuraavalla tavalla:

Elmerin ratkaisu:	Uolevin ratkaisu:
$f(x) = e^x$	$h(x) = g(f(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{x^2} + 1$
$g'(x) = 4x$	$h'(x) = 2e^{x^2} \cdot (2x)$
joten $h'(x) = g'(f(x)) = 4e^x$	joten $h'(x) = 4xe^{x^2}$

Mari saa laskimella vastaukseksi $4e^{2x}$. Kenen vastaus on oikein? Etsi väärin ratkaisujen virheet ja esitä korjatut ratkaisut.

Ratkaisu. Elmerin ratkaisussa yhdistetyn funktion derivointisääntö on virheellisesti muodossa $h'(x) = g'(f(x))$, kun oikea muoto olisi

$h'(x) = g'(f(x)) f'(x)$. 1p

Korjattu ratkaisu:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ g'(x) &= 4x \\ f'(x) &= e^x, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) f'(x) \\ h'(x) &= 4e^x \cdot e^x \\ h'(x) &= 4e^{2x} \end{aligned}$$

1p(2p)

Uolevin ratkaisussa on virheellinen potenssin laskusääntö $(e^x)^2 = e^{x^2}$, kun oikea muoto olisi $(e^x)^2 = e^{2x}$.

1p(3p)

Korjattu ratkaisu:

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{2x} + 1 \\ h'(x) &= 2e^{2x} \cdot 2, \end{aligned}$$

1p(4p)

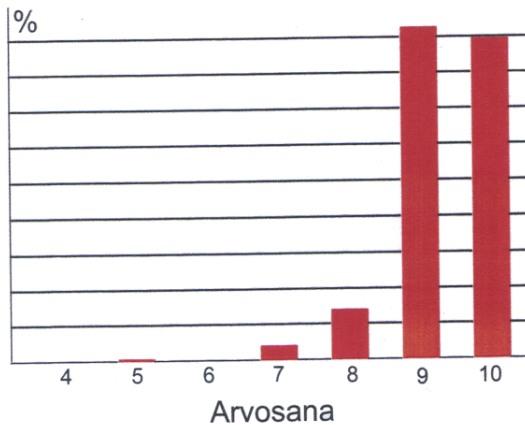
1p(5p)

joten $h'(x) = 4e^{2x}$.

Vastaus: Marin vastaus on oikein. 1p(6p)

11. Arkikielessä keskimääräisyyteen liittyvät käsitteet ja mediaani menevät usein sekaisin. Tässä tehtävässä ”keskimääräisellä” tarkoitetaan keskiarvoa.

- a) Valtion liikenneturvallisuuslaitos pyysi taksinkuljettajia arvioimaan ajotaitoaan kouluarvosanoin 4–10. Vastaukset tuhannelta kuljettajalta näkyvät oheisessa pylväsdiagrammissa, joka perustuu kiireisen toimittajan hätäisiin muistiinpanoihin. Arvioi kuvion perusteella arvosanan neljäsosan tarkkuudella, mikä oli tutkimuksen mukaan keskimääräisen kuljettajan ajotaidon arvosana.



- b) Sama kysely tehtiin tuhannelle tavalliselle autoilijalle. Anna perusteltu esimerkki sellaisesta jakaumasta (mahdollisesta tuloksesta), jossa vähintään 80 % vastaajista arvioi olevansa keskimääräistä parempia kuljettajia.

Ratkaisu.

- a) Huomataan, että muistiinpanoihin ei ole merkitty asteikkoa kuljettajien osuuksille.

Jos oletamme asteikon olevan lineaarinen, prosenttiosuuksien summaksi tulee silmämääräisesti 100 %, jos vaakaviivat ovat viiden prosenttiyksikön välein. Diagrammista saadaan osuudet:

arvosana	osuus	lukumäärä
4	0 %	0
5	0,5 %	5
6	0 %	0
7	2 %	20
8	7 %	70
9	46 %	460
10	44,5 %	445

1p

Arvosanojen keskiarvo on siis

$$\frac{4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 20 + 8 \cdot 70 + 9 \cdot 460 + 10 \cdot 445}{1000}$$

1p(2p)

$$= 9,315 \approx \underline{\underline{9,25}}$$

1p(3p)

b) Oheisessa taulukossa on esimerkkijakauma.

arvosana	lukumäärä
4	200
5-9	0
10	800

Arvosanojen keskiarvo on

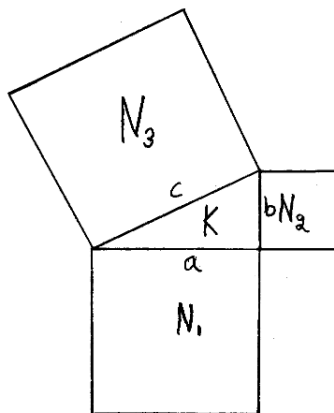
$$\frac{4 \cdot 200 + 10 \cdot 800}{1000} = 8,8.$$

Siten 800 vastaajaa, eli 80 % vastaajista, arvioi olevansa keskimääräistä parempia.

3p(6p)

12. Neliöiden N_1 , N_2 ja N_3 pinta-alojen suhde on $9 : 2 : 11$. Kolmion K yhtenä sivuna on neliön N_1 sivu, toisena sivuna neliön N_2 sivu ja kolmantena sivuna neliön N_3 sivu. Laske kolmion K ja neliön N_2 pinta-alojen suhteen tarkka arvo.

Ratkaisu.



Olkoon neliöiden N_1 , N_2 ja N_3 sivujen pituudet a , b ja c . Neliöiden pinta-alat ovat $9A$, $2A$ ja $11A$. _____

1p

$$a^2 + b^2 = 9A + 2A = 11A = c^2.$$

2p(3p)

Kolmio K toteuttaa Pythagoraan lauseen, joten se on suorakulmainen. Sen pinta-ala on siten $\frac{1}{2}ab$. Kysytty pinta-alojen suhde on siis

$$\frac{\frac{1}{2}ab}{b^2}$$

1p(4p)

$$= \frac{1}{2} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9A}{2A}} = \frac{3}{4} \sqrt{2}.$$

1p(5p)

Vastaus: Pinta-alojen suhde on $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

1p(6p)

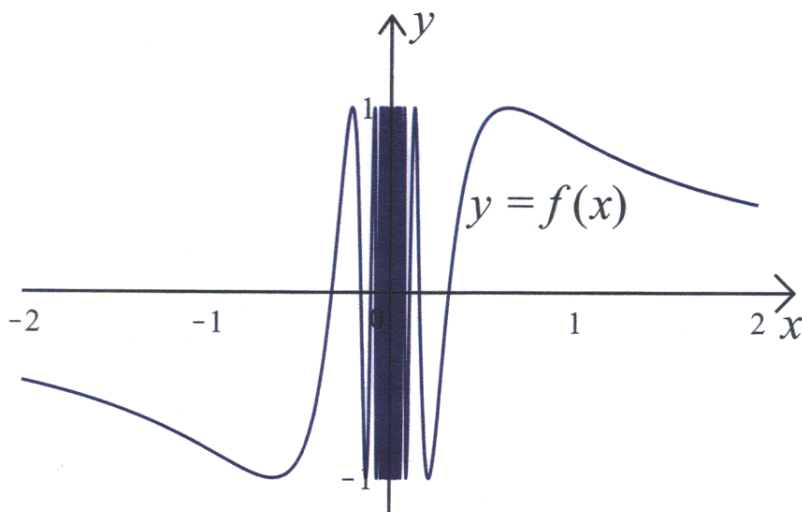
13. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, jonka kuvaaja on alla.

a) Etsi sellainen jono $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ positiivisia reaalilukuja, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0.$$

b) Olkoon $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Etsi sellainen jono $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ positiivisia reaalilukuja, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \sin(t).$$



Ratkaisu.

a) Etsitään luvut x , joille $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \sin \frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tai} \quad \frac{1}{x} = \pi - 0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Yhdistämällä ehdot saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{1}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

1p

Nyt voidaan valita $a_n = \frac{1}{\pi n}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n . 1p(2p)

Tällöin $a_n > 0$ ja $f(a_n) = 0$ kaikilla n . Lisäksi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} = 0.$$

Lukujono $a_n = \frac{1}{\pi n}$ toteuttaa siis vaaditut ehdot. 1p(3p)

b) Etsitään luvut x , joille $f(x) = \sin t$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin t \\ \sin \frac{1}{x} &= \sin t \\ \frac{1}{x} &= t + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tai} \quad \frac{1}{x} = \pi - t + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{1}{t + 2\pi n}, \quad t + 2\pi n \neq 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{\pi - t + 2\pi n}, \end{aligned}$$

missä $\pi - t + 2\pi n \neq 0$ 1p(4p)

Nyt jos n on positiivinen kokonaisluku,

$$t + 2\pi n \geq t + 2\pi \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi \geq 0.$$

Valitaan siis $a_n = \frac{1}{t+2\pi n}$, jolloin $a_n > 0$ ja $f(a_n) = \sin(t)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n . 1p(5p)

Lisäksi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t + 2\pi n} \stackrel{(n)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{t}{n} + 2\pi} = \frac{0}{0 + 2\pi} = 0.$$

Lukujono $a_n = \frac{1}{t+2\pi n}$ toteuttaa siis vaaditut ehdot. 1p(6p)

Huomaa, että a-kohdan voi ratkaista myös b-kohdan avulla: Jos valitaan $t = 0$, niin lukujono $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, missä $a_n = \frac{1}{t+2\pi n} = \frac{1}{2\pi n}$ toteuttaa ehdot $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$ ja $\lim f(a_n) = \sin t = \sin 0 = 0$.