MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2011

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $3x^2 = -x$.

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 5 ja toisen kateetin pituus 2. Laske toisen kateetin pituus.

c) Ratkaise yhtälö

$$\frac{4x-1}{5} = \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{4}.$$

2. **a)** Sievennä lauseke $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ välivaiheet esittäen.

b) Laske suoran $y = 2x$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ leikkauspisteet.

c) Olkoon $f(x) = 2^{-x}$. Laske $f'(1)$.

3. **a)** Ratkaise yhtälö $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 4 + \ln 2$.

b) Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{2x+1}{x-1} \geq 3.$$

c) Määritä pisteen $(3,-2)$ etäisyys suorasta $4x - 3y = 2$.

4. **a)** Näytä, että molemmat funktiot

$$F_1(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{ja} \quad F_2(x) = \frac{x}{1-x}$$

ovat funktion

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

integraalifunktioita, kun $x > 1$.

b) Sievennä erotus $F_1(x) - F_2(x)$.

c) Laske funktion $f(x)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittaman alueen pinta-ala, kun $2 \leq x \leq 5$.

5. Laske vektoreiden $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

6. **a)** Laske $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

b) Ratkaise epäyhtälö

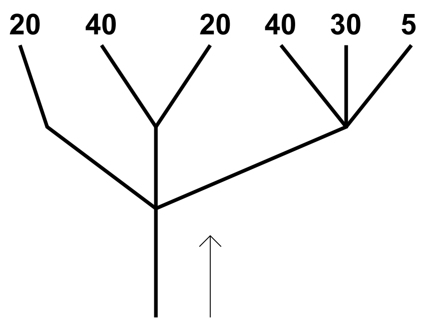
$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0{,}01.$$

7. Poiseuillen lain (Jean Louis Marie Poiseuille, 1797−1869) mukaan putkessa virtaavan veden virtausnopeus on suoraan verrannollinen putken halkaisijan neljänteen potenssiin, kun muut tilanteeseen liittyvät suureet pysyvät samoina. Kuinka monta prosenttia halkaisijaa on suurennettava, jos virtausnopeus halutaan kaksinkertaistaa?

8. Eräässä tietokonepelissä pelaaja etenee ylimmälle tasolle oheisen kaavion mukaisesti ja saa kaavioon merkityn pistemäärän. Jokaisessa risteyksessä hän valitsee satunnaisesti yhden tasavertaisista vaihtoehdoista ja etenee seuraavalle tasolle ylöspäin.

a) Millä todennäköisyydellä pelaaja saavuttaa suurimman pistemäärän 40?

b) Määritä pistemäärän odotusarvo.



9. **a)** Näytä, että funktiolla $f(x) = x^2 - 2x$ on käänteisfunktio, kun $x \geq 1$.

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.

c) Piirrä funktion $f(x)$ ja sen käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajat samaan koordinaatistoon.

10. Määritä funktion $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2$ nollakohdat sekä suurin ja pienin arvo.

11. Lukujonon (a_n) termit ovat muotoa

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

a) Näytä, että $0 < a_n < \frac{1}{2}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots.$

b) Näytä, että $a_{n+1} > a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots.$

c) Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} a_n.$

12. Isaac Newton esitti vuonna 1669 nimeään kantavan menetelmän, jonka avulla funktioiden nollakohtia voidaan laskea numeerisesti. Yhtenä esimerkkinä menetelmänsä toimivuudesta hän käytti polynomia $f(x) = x^3 - 2x - 5.$

a) Laske $f'(x).$

b) Näytä, että Newtonin tutkimalla yhtälöllä $f(x) = 0$ on ratkaisu välillä $[2, 3].$

c) Laske ratkaisulle neljän iteraatioaskeleen approksimaatio Newtonin menetelmällä lähtien alkuarvosta $x_0 = 2.$ Ilmoita vastaus neljän desimaalin tarkkuudella.

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\lg 50$ ei ole rationaaliluku. $(\lg = \log_{10})$

***14.** Olkoon $f(x) = ax + b.$

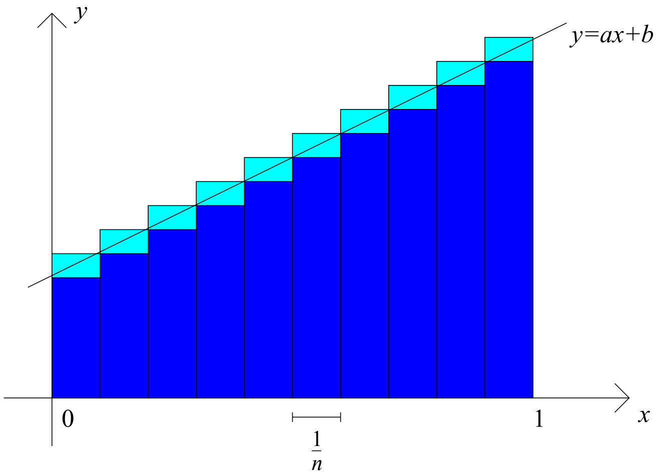
a) Laske $\int_0^1 f(x)\,dx.$ (2 p.)

b) Johda lausekkeet summille

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{ja} \quad s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right),$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots.$ (4 p.)

c) Laske raja-arvot $\lim_{n\to\infty} S_n$ ja $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n).$ (3 p.)



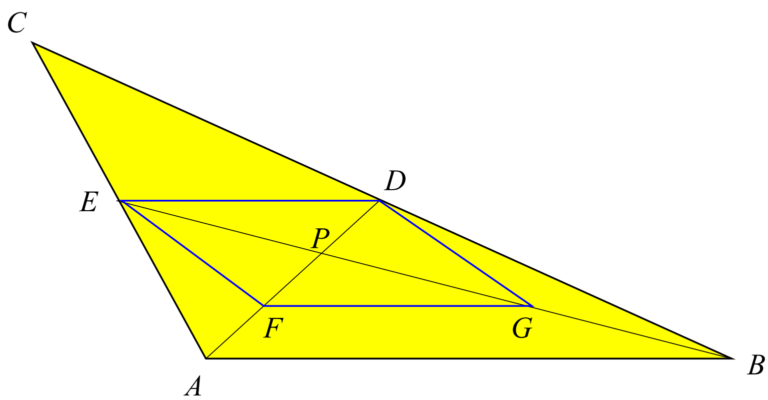
***15.** Merkitään kolmion ABC keskijanojen AD ja BE leikkauspistettä kirjaimella P.

a) Jos F on janan AP keskipiste ja G janan BP keskipiste, niin osoita, että janan FG pituus on puolet janan AB pituudesta. (2 p.)

b) Osoita, että nelikulmio $FGDE$ on suunnikas. (2 p.)

c) Osoita, että janan DP pituus on kolmasosa janan AD pituudesta. (2 p.)

d) Todista edellisten kohtien perusteella seuraava lause: Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa jokaisen keskijanan siten, että sivun puoleisen osan pituus on kolmasosa koko keskijanan pituudesta. (3 p.)



Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä

Pitkä matematiikka, syksy 2011

Mallivastaukset, 28.9.2011

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennuksessa. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennuksen omaisuutta.

MA-FY Valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön ja omien yo-vastausten tarkistamista varten. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MA-FY Valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää näitä mallivastauksia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MA-FY Valmennuksen yhteystiedot:

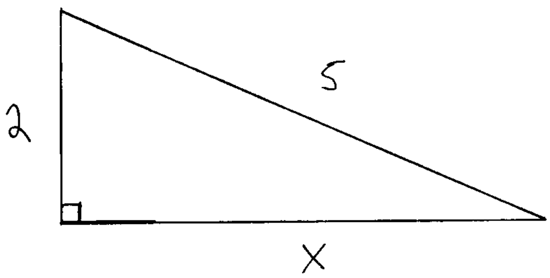
internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a)

$$
\begin{aligned}
3x^2 &= -x \\
3x^2 + x &= 0 \\
x(3x+1) &= 0 \quad \text{(tulon nollasääntö)} \qquad \text{1 p} \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad 3x + 1 = 0 \\
&\qquad 3x = -1 \quad \| : 3 \\
&\qquad x = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 0$ 1 p (2 p)

b) Suorakulmainen kolmio.



Pythagoraan lauseen mukaan

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 2^2 + x^2 \qquad \text{1 p (3 p)} \\
x^2 &= 5^2 - 2^2 \\
x &= \underset{(-)}{+}\sqrt{21}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Toisen kateetin pituus on $\sqrt{21}$. 1 p (4 p)

c)

$$
\frac{4x-1}{5} = \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{4} \quad \| \cdot 20
$$

$$
\frac{\overset{4}{\cancel{20}}(4x-1)}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}(x+1)}{\underset{1}{\cancel{2}}} + \frac{\overset{5}{\cancel{20}}(3-x)}{\underset{1}{\cancel{4}}}
$$

$$
\begin{aligned}
16x - 4 &= 10x + 10 + 15 - 5x \qquad \text{1 p (5 p)} \\
16x - 10x + 5x &= 10 + 15 + 4 \\
11x &= 29 \quad \| : 11 \\
x &= \frac{29}{11} \qquad \text{1 p (6 p)}
\end{aligned}
$$

2. a)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}^{\sqrt{2})} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}^{2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2^2-2}$$

Lavennettu oikein samannimisiksi 1 p

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

1 p (2 p)

b) Leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 2x & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2), saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + (2x)^2 &= 1 \\ x^2 + 4x^2 &= 1 \\ 5x^2 &= 1 \quad \| :5 \\ x^2 &= \frac{1}{5} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \qquad (3)$$

1 p (3 p)

Sijoitetaan (3) yhtälöön (1).

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Leikkauspisteet ovat } \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ ja } \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).}}$ 1 p (4 p)

c) Funktion $f(x) = 2^{-x}$ derivaattafunktio on

$$f'(x) = 2^{-x}\ln 2 \cdot (-1) = -2^{-x}\ln 2$$

1 p (5 p)

Kysytty derivaatan arvo on

$$f'(1) = -2^{-1}\ln 2 = -\frac{\ln 2}{2}$$

Vastaus: $\underline{\underline{f'(1) = -\frac{\ln 2}{2}}}$ 1 p (6 p)

3. a) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 4 + \ln 2$

Määrittelyehdot ovat: $x + 1 > 0$ ja $x - 1 > 0$

$(x > -1$ ja$)$ $x > 1$

$$
\begin{aligned}
\ln(x+1) - \ln(x-1) &= \ln 4 + \ln 2 \\
\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \ln(4 \cdot 2) \\
\frac{x+1}{x-1} &= 8 \quad \| \cdot (x-1) \quad (\text{määrittelyehdon mukaan } x - 1 > 0)
\end{aligned}
$$

1 p

$$
\begin{aligned}
x + 1 &= 8(x-1) \\
x + 1 &= 8x - 8 \\
-7x &= -9 \quad \| : (-7) \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= \frac{9}{7}}}
\end{aligned}
$$

1 p (2 p)

b) $\dfrac{2x+1}{x-1} \geq 3$

Määrittelyehto on $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-1} &\geq {}^{x-1)}3 \\
\frac{2x+1}{x-1} &\geq \frac{3x-3}{x-1} \\
\frac{2x+1}{x-1} - \frac{3x-3}{x-1} &\geq 0 \\
\frac{2x+1-(3x-3)}{x-1} &\geq 0 \\
\frac{-x+4}{x-1} &\geq 0
\end{aligned}
$$

1 p (3 p)

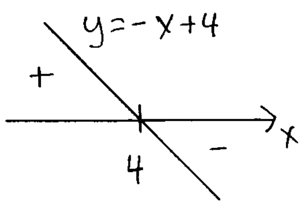
Muodostetaan yhtälön merkkikaavio.

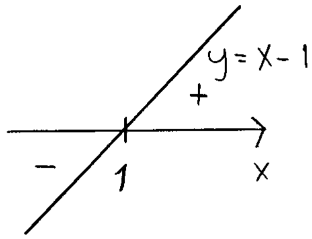
osoittaja: $-x + 4 = 0$

$x = 4$

nimittäjä: $x - 1 = 0$

$x = 1$





		1		4	
$-x+4$	+		+		-
$x-1$	-		+		+
osam.	-		+		-

Vastaus: $\underline{\underline{1 < x \leq 4}}$ 1 p (4 p)

c) Suoran yhtälö on $4x - 3y = 2$ eli $4x - 3y - 2 = 0$.
Piste $(x_0, y_0) = (3, -2)$
Pisteen etäisyys suorasta on

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

missä $A = 4$, $B = -3$ ja $C = -2$. Saadaan 1 p (5 p)

$$d = \frac{|4 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + (-2)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$d = \frac{|16|}{\sqrt{25}}$$

$$d = \frac{16}{5}$$

Vastaus: <u>Pisteen etäisyys suorasta on $\frac{16}{5}$.</u> 1 p (6 p)

4. **a)** F_1 ja F_2 ovat f:n integraalifunktioita, jos ja vain jos F_1' ja F_2' ovat sama funktio kuin f sen määrittelyjoukossa. Lasketaan derivaattafunktiot.

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= D\,\frac{1}{1-x} \\ &= D(1-x)^{-1} \\ &= -(1-x)^{-2}\cdot(-1) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

1 p

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= D\,\frac{x}{1-x} \\ &= \frac{D\,x\cdot(1-x)-x\cdot D(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

F_1, F_2 ja f ovat määriteltyjä kaikilla $x>1$. Lisäksi todettiin, että

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x),$$

joten F_1 ja F_2 ovat funktion f integraalifunktioita. 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned} F_1(x)-F_2(x) &= \frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x} \\ &= \frac{1-x}{1-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1 p (3 p)

Vastaus: $\underline{\underline{F_1(x)-F_2(x)=1}}$ 1 p (4 p)

c) Kysytty ala on

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x)\,dx &= \overset{5}{\underset{2}{/}} F_1(x)\\ &= F_1(5) - F_1(2)\\ &= \frac{1}{1-5} - \frac{1}{1-2} \qquad \text{1 p (5 p)}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty ala on $\frac{3}{4}$. 1 p (6 p)

5.

$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$$
$$\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$$

Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma α saadaan kaavasta

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Lasketaan skalaaritulo.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 2\cdot 3 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1) = 6 \qquad \text{1 p}$$

Lasketaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pituudet.

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \qquad \text{1 p (2 p)}$$
$$|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \qquad \text{1 p (3 p)}$$

Ratkaistaan kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{6}{3\cdot\sqrt{14}} \qquad \text{1 p (4 p)}$$
$$\alpha = 57{,}688\ldots^\circ \qquad \text{1 p (5 p)}$$
$$\alpha \approx 57{,}7^\circ$$

Vastaus: Vektorien välinen kulma on 57,7°. 1 p (6 p)

6. a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}^{1}(x+2)}{\cancel{(x-2)}_{1}} \qquad \text{1 p}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2) \qquad \text{1 p (2 p)}$$

$$=2+2$$

$$=\underline{\underline{4}} \qquad \text{1 p (3 p)}$$

b) $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<0{,}01$

Epäyhtälön määrittelyehto on $x-2\neq 0$

$$x\neq 2 \qquad \text{1 p (4 p)}$$

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<0{,}01$$

$$\left|\frac{\cancel{(x-2)}^{1}(x+2)}{\cancel{(x-2)}_{1}}-4\right|<0{,}01$$

$$|x+2-4|<0{,}01$$

$$|x-2|<0{,}01 \qquad \text{1 p (5 p)}$$

$$x-2<0{,}01 \quad \text{ja} \quad x-2>-0{,}01$$

$$x<2{,}01 \quad \text{ja} \quad x>1{,}99$$

Vastaus: $\underline{\underline{1{,}99<x<2{,}01 \text{ ja } x\neq 2.}}$ 1 p (6 p)

7. Jos putken halkaisija on d, niin veden virtausnopeus v on

$$v = k \cdot d^4, \qquad \text{1 p}$$

missä k on vakio.
Pieni putki: v_1 ja d_1
Iso putki: v_2 ja d_2
Virtausnopeus halutaan kaksinkertaistaa, joten oltava

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{1} \qquad \text{1 p (2 p)}$$

$$\frac{\cancelto{1}{k} \cdot d_2^4}{\cancelto{1}{k} \cdot d_1^4} = 2 \quad \| \cdot d_1^4$$

$$d_2^4 = 2d_1^4 \quad \| \sqrt[4]{}$$

$$d_2 = \underset{(-)}{+} \sqrt[4]{2} d_1 \qquad \text{1 p (3 p)}$$

Vaadittu halkaisijan muutos on

$$\frac{d_2 - d_1}{d_1} = \frac{\sqrt[4]{2}\,\cancelto{1}{d_1} - \cancelto{1}{d_1}}{\cancelto{1}{d_1}} \qquad \text{1 p (4 p)}$$

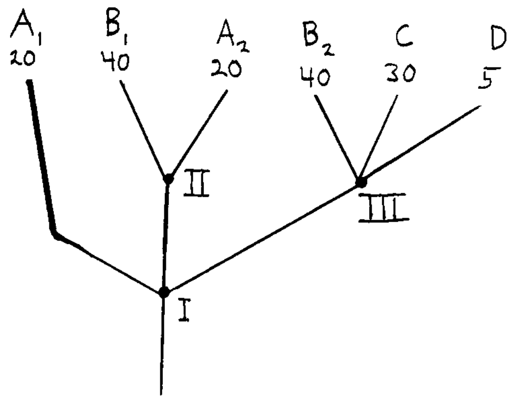
$$= \sqrt[4]{2} - 1$$

$$= 0{,}1892\ldots \qquad \text{1 p (5 p)}$$

$$\approx 18{,}9\,\%$$

Vastaus: Halkaisijaa on suurennettava 18,9 %. 1 p (6 p)

8. Merkitään vaihtoehtoisia tapauksia oheisen kuvan mukaisesti



Solmukohdissa I–III jokainen haara eteenpäin on yhtä todennäköinen. Siten

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{3}$$
$$P(\mathrm{II}) = \frac{1}{2}$$
$$P(\mathrm{III}) = \frac{1}{3}$$ 1 p

a) M: ”Tulee 40 pistettä”

$$\begin{aligned} P(M) &= P(B_1 \text{ tai } B_2) \\ &= P(\text{I ja II tai I ja III}) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$ 1 p (2 p)

Vastaus: Suurin pistemäärä saavutetaan todennäköisyydellä $\frac{5}{18}$. 1 p (3 p)

b) Olkoon satunnaismuuttuja X saatu pistemäärä. Nyt

$$P(X=40)=\frac{5}{18}\quad\text{(a-kohta)}$$

$$\begin{aligned}P(X=30)&=P(C)\\&=P(\text{I ja III})\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=20)&=P(A_1\text{ tai }A_2)\\&=P(\text{I tai I ja II})\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=5)&=P(D)\\&=P(\text{I ja III})\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

2 p (5 p)

Pistemäärän odotusarvo

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_i p_iX_i\\&=\frac{5}{18}\cdot 40+\frac{1}{9}\cdot 30+\frac{1}{2}\cdot 20+\frac{1}{9}\cdot 5\\&=25\end{aligned}$$

Vastaus: Pistemäärän odotusarvo on 25.

1 p (6 p)

9. a) $f(x) = x^2 - 2x$
Funktiolla f on käänteisfunktio, kun $x \geq 1$, mikäli se on aidosti monotoninen, kun $x \geq 1$. Tutkitaan funktion f monotonisuutta derivaatan avulla

$$f'(x) = 2x - 2$$ 1 p

Derivaatta on positiivinen, kun

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 2x - 2 &\geq 0 \\ 2x &\geq 2 \quad \| : 2 \\ x &\geq 1. \end{aligned}$$

Derivaatta $f'(x) = 0$ yhdessä kohdassa ($x = 1$) ja $f'(x) > 0$, kun $x > 1$. Näin ollen funktio f on aidosti kasvava, kun $x \geq 1$ ja sillä on käänteisfunktio, kun $x \geq 1$. 1 p (2 p)

b) Merkitään y:llä funktion f arvoa kohdassa x eli

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= x^2 - 2x \qquad (1) \end{aligned}$$

Ratkaistaan x yhtälöstä (1).

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \\ x^2 - 2x - y &= 0 \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 1 \cdot y}}{2} \\ x &= 1 \pm \frac{\sqrt{4 + 4y}}{2} \\ x &= 1 \pm \frac{\sqrt{4(1 + y)}}{2} \\ x &= 1 \pm \sqrt{1 + y} \end{aligned}$$ 1 p (3 p)

Käänteisfunktion lauseke on siis joko

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x} \quad \text{tai} \quad f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 + x},$$

missä $1 + x \geq 0$
$x \geq -1.$
Käänteisfunktion arvojoukko on

$$A_{f^{-1}} = M_f = [1, \infty].$$

f^{-1} saa siis vain arvoja, jotka ovat suurempia tai yhtäsuuria kuin 1. Tällöin

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}.$$

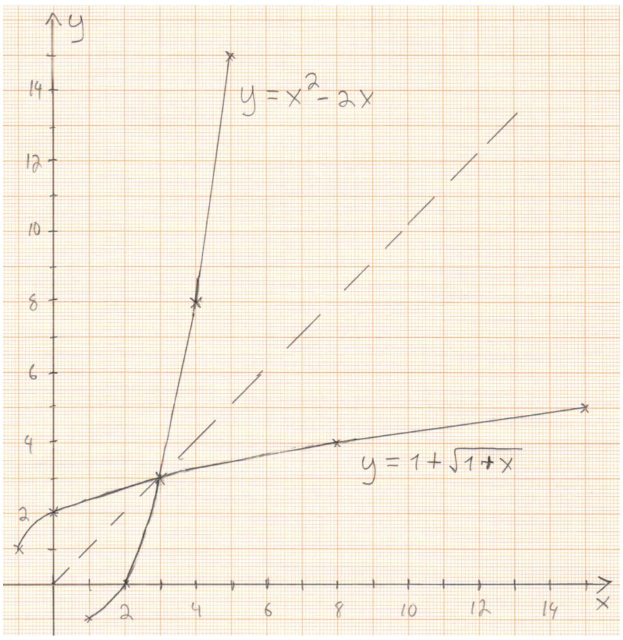
Vastaus: Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$. 1 p (4 p)

c) Lasketaan pisteitä funktioiden kuvaajien piirtämiseksi.

$$f(x) = x^2 - 2x$$

x	$f(x)$
1	-1
2	0
3	3
4	8
5	15
$f^{-1}(x)$	x

Funktion f^{-1} kuvaaja saadaan peilaamalla funktion f kuvaaja suoran $y = x$ suhteen. Piirretään kuvaajat koordinaatistoon.



2 p (6 p)

Huomautus lukijalle: Käänteisfunktion kuvaajan piirtämiseksi ei tarvitse erikseen laskea pisteitä $(x, f^{-1}(x))$. Käänteisfunktion kuvaaja saadaan peilaamalla funktion f kuvaaja suoran $y = x$ suhteen. Tästä seuraa, että käänteisfunktion kuvaajan pisteet $(x, f^{-1}(x))$ saadaan kääntämällä funktion f kuvaajan pisteiden x- ja y-koordinaatit, kuten taulukossa on tehty.

10. $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2$
Tiedetään, että

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

joten

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x. \qquad (1)$$

Sijoitetaan (1) funktion $f(x)$ lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2 \\ f(x) &= 4\cos^2 x - 3 \qquad \text{1 p} \end{aligned}$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 4\cos^2 x - 3 &= 0 \\ 4\cos^2 x &= 3 \quad \| : 4 \\ \cos^2 x &= \frac{3}{4} \\ \cos x &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \\ \cos x &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{1 p (2 p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\text{tai} \quad \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x &= \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad &\text{tai} \quad x &= \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \text{missä } n \in \mathbb{Z}. \qquad \text{1 p (3 p)} \end{aligned}$$

Määritetään seuraavaksi funktion suurin ja pienin arvo. Lausekkeen $\cos^2 x$ arvojoukko on $[0, 1]$, joten

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad \cos^2 x \quad &\leq 1 \quad \| \cdot 4 \qquad \text{1 p (4 p)} \\ 0 \leq \quad 4\cos^2 x \quad &\leq 4 \quad \| - 3 \\ -3 \leq 4\cos^2 x - 3 &\leq 1 \qquad \text{1 p (5 p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Nollakohdat ovat $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ja $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, missä $n \in \mathbb{Z}$.
Funktion suurin arvo on 1 ja pienin arvo on -3. 1 p (6 p)

Huomautus lukijalle! Saatu trigonometrisen yhtälön ratkaisu voidaan esittää yksinkertaisemmassa muodossa. Emme kuitenkaan usko, että seuraavaa vaaditaan täysien pisteiden saamiseksi.

$$x = \pm\frac{5\pi}{6}\pi + 2\pi n \qquad \text{tai} \qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

eli

$$\begin{aligned} & x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n && \text{tai} && x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \text{tai} \quad & x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n && \text{tai} && x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} & x = -\frac{\pi}{6}\pi + \pi + 2\pi n && \text{tai} && x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \text{tai} \quad & x = \frac{\pi}{6} - \pi + 2\pi n && \text{tai} && x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} & x = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) && \text{tai} && x = -\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2n \\ \text{tai} \quad & x = \frac{\pi}{6} + \pi(2n-1) && \text{tai} && x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2n \end{aligned}$$

$\pi(2n+1)$ sisältää kaikki π:n parittomat monikerrat ja $\pi \cdot 2n$ parilliset monikerrat, joten ne sisältävät kaikki π:n kokonaislukumonikerrat. Sama pätee lausekkeille $\pi(2n-1)$ ja $\pi \cdot 2n$. Näin ratkaisu yksinkertaistuu muotoon

$$x = -\frac{\pi}{6} + n\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{\pi}{6} + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

eli

Vastaus: Nollakohdat ovat $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

11. $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ eli

$$\frac{n}{2n+1} > 0 \tag{1}$$

ja

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} \tag{2}$$

Epäyhtälö (1) on tosi kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$, sillä $n > 0$ ja $2n+1 > 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ratkaistaan epäyhtälö (2).

1 p

$$\begin{aligned} \frac{n}{2n+1} &< \frac{1}{2} \quad \| \cdot 2(2n+1) \quad (2n+1 > 0, \text{ kun } n = 1, 2, 3, \ldots) \\ 2n &< 2n+1 \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

Epäyhtälö on tosi kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Epäyhtälöt (1) ja (2) ovat tosia, joten kaksoisepäyhtälö

$$0 < a_n < \frac{1}{2}$$

on tosi kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ \frac{n+1}{2(n+1)+1} &> \frac{n}{2n+1} \\ \frac{n+1}{2n+3} &> \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

Huomataan, että $2n+3 > 0$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja $2n+1 > 0$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tällöin epäyhtälö voidaan kertoa ristiin ja saadaan

$$\begin{aligned} (n+1)(2n+1) &> n(2n+3) \qquad \text{1 p (3 p)} \\ \cancel{2n^2} + \cancel{n} + \cancel{2n} + 1 &> \cancel{2n^2} + \cancel{3n} \\ 1 &> 0, \quad \text{tosi} \end{aligned}$$

Näin ollen epäyhtälö

$$a_{n+1} > a_n$$

on tosi kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. 1 p (4 p)

c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^{1}}{\cancel{n}_{1}\left(2+\frac{1}{n}\right)} && \text{1 p (5 p)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2+0} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} && \text{1 p (6 p)}\end{aligned}$$

12. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

a) $\underline{\underline{f'(x) = 3x^2 - 2}}$ 2 p

b)

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 \\ &= -1 \\ f(3) &= 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 16 \end{aligned}$$

1 p (3 p)

Koska siis $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ ja $f(x)$ on polynomifunktiona kaikkialla jatkuva, on funktiolla f Bolzanon lauseen mukaan ainakin yksi nollakohta välillä $]2, 3[$ ja siten myös välillä $[2, 3]$. Näin ollen yhtälöllä

$$f(x) = 0$$

on ratkaisu välillä $[2, 3]$ 1 p (4 p) □

c) Newtonin menetelmällä saadaan jono

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Alkuarvauksella $x_0 = 2$ saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 2 - \frac{2^3 - 2 \cdot 2 - 5}{3 \cdot 2^2 - 2} \\ &= 2{,}1 \\ x_2 &= 2{,}1 - \frac{2{,}1^3 - 2 \cdot 2{,}1 - 5}{3 \cdot 2{,}1^2 - 2} \\ &= 2{,}094568\ldots \\ x_3 &= 2{,}094551\ldots \\ x_4 &= 2{,}094551\ldots \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{\approx 2{,}0946}} \end{aligned}$$

1 p (5 p)

1 p (6 p)

13. Tehdään vastaoletus: $\lg 50$ on rationaaliluku. Tällöin löytyy keskenään jaottomat kokonaisluvut a ja b, $b \neq 0$, siten, että

$$\lg 50 = \frac{a}{b}. \qquad \text{1 p}$$

Koska $10 < 50$ ja $\lg x$ on aidosti kasvava funktio, saadaan

$$\frac{a}{b} = \lg 50 > \lg 10 = 1.$$

Tästä epäyhtälöstä nähdään, että $\frac{a}{b}$ on positiivinen luku, joten voidaan olettaa, että a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja. Tällöin, kertomalla epäyhtälön molemmat puolet luvulla b, saadaan $a > b$. 1 p (2 p)
Nyt

$$\begin{aligned} \lg 50 &= \frac{a}{b} \quad \| \cdot b \\ b \cdot \lg 50 &= a \\ \lg 50^b &= a \quad \| 10^{()} \\ 50^b &= 10^a \end{aligned} \qquad \text{1 p (3 p)}$$

Koska a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, niin 50^b ja 10^a ovat kokonaislukuja. Näiden lukujen alkutekijähajotelmat ovat

$$10^a = (2 \cdot 5)^a = 2^a \cdot 5^a \quad \text{ja} \quad 50^b = (2 \cdot 5^2)^b = 2^b \cdot 5^{2b}. \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Koska $a > b$, niin alkutekijän 2 potenssit näissä alkutekijähajotelmissa eivät ole samat, joten alkutekijähajotelmat eivät ole samat. 1 p (5 p) Saatu ristiriita osoittaa, että vastaoletus on väärä. Siis $\lg 50$ ei ole rationaaliluku. $\square$ 1 p (6 p)

Huomautus lukijalle! Alussa osoitettiin, että $a > b$. Todistus on pätevä, vaikka osoitettaisiin vain, että $a \neq b$. Uskomme, että jälkimmäisen osoittamiseksi riittää todeta, että $\frac{a}{b} = \lg 50 = 1{,}698\ldots \neq 1$, josta seuraa, että $a \neq b$. Laskimella laskettu arvo 1,698... riittää luultavasti myös sen perustelemiseksi, että a ja b voidaan olettaa positiivisiksi.

Vaihtoehtoinen tapa ratkaista tehtävä on todeta alussa, että $\lg 50 = \lg(5 \cdot 10) = \lg 5 + \lg 10 = \lg 5 + 1$ ja osoittaa, että $\lg 5$ on irrationaaliluku. Tässä ratkaisutavassa ei tarvitse osoittaa, että $a \neq b$, joten silloin pisteytys voi olla erilainen.

***14.** $f(x) = ax + b$.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (ax+b)\,dx \\ &= \Big/_0^1 \left(\frac{1}{2}ax^2 + bx\right) && \text{1 p} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}a + b.}} && \text{1 p (2 p)}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a\frac{i}{n} + b\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{n}i + b\right)\end{aligned}$$

Saatu lauseke on aritmeettinen summa, jolle

$$a_1 = \frac{a}{n} + b \quad \text{ja} \quad a_n = \frac{a}{n}n + b = a + b. \qquad \text{1 p (3 p)}$$

Aritmeettisen summan kaavasta saadaan

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{\cancel{n}_1} \cdot {}^{1}\cancel{n}\,\frac{a_1 + a_n}{2} \\ S_n &= \frac{\frac{a}{n} + b + a + b}{2} \\ \underline{\underline{S_n}} &\underline{\underline{= \frac{a}{2n} + \frac{a}{2} + b}} && \text{1 p (4 p)}\end{aligned}$$

Toinen summa

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}a+b\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ai-a}{n}+b\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{n}i-\frac{a}{n}+b\right) \end{aligned}$$

Saatu lauseke on aritmeettinen summa, jolle

$$a_1 = \frac{a}{n}-\frac{a}{n}+b = b \quad \text{ja} \quad a_n = \frac{a}{n}\cdot n - \frac{a}{n}+b = a-\frac{a}{n}+b.$$ 1 p (5 p)

Aritmeettisen summan kaavasta saadaan

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{\cancel{n}_1}\cdot {}^1\!\cancel{n}\frac{a_1+a_n}{2} \\ s_n &= \frac{b+a-\frac{a}{n}+b}{2} \\ s_n &= -\frac{a}{2n}+\frac{a}{2}+b \end{aligned}$$ 1 p (6 p)

c)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{a}{2}+b\right) \\ &= \frac{a}{2}\cdot 0+\frac{a}{2}+b \\ &= \frac{a}{2}+b. \end{aligned}$$ 1 p (7 p)

Lasketaan ensin raja-arvo

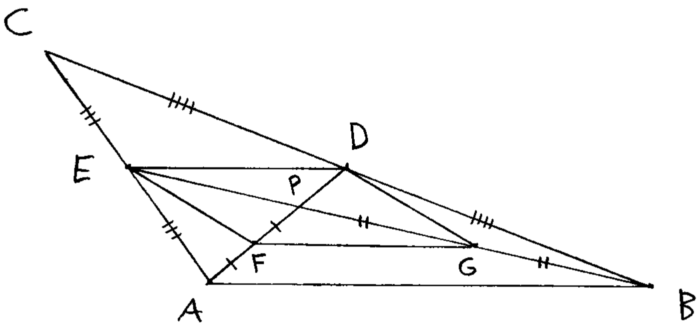
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{a}{2}+b\right) \\ &= -\frac{a}{2}\cdot 0+\frac{a}{2}+b \\ &= \frac{a}{2}+b \end{aligned}$$ 1 p (8 p)

Kysytty raja-arvo on

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \frac{a}{2} + b - \left(\frac{a}{2} + b\right) \\ &= \underline{\underline{0}}.\end{aligned}$$

1 p (9 p)

***15. a)**



Kolmioiden FGP ja ABP vastinsivujen suhteet ovat

$$\frac{GP}{BP} = \frac{GP}{2GP} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{FP}{AP} = \frac{FP}{2FP} = \frac{1}{2}.$$

Lisäksi kolmioilla FGP ja ABP on sama vastinkulma APB, joten $FGP \sim ABP$ (sks). Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että myös $\dfrac{FG}{AB} = \dfrac{1}{2}$. □ 1 p (2 p)

1 p

b) Kolmioilla CED ja CAB on sama kulma C ja vastinsivujen suhteet ovat

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2},$$

joten $\Delta CED \sim \Delta CAB$ (sks). Viimeisestä yhdenmuotoisuudesta seuraa, että samankohtaiset kulmat $\sphericalangle CED$ ja $\sphericalangle CAB$ ovat yhtäsuuret, joten $ED \parallel AB$. Toisaalta ΔFGP:n ja ΔABP:n yhdenmuotoisuudesta seuraa, että samankohtaiset kulmat $\sphericalangle PFG$ ja $\sphericalangle PAB$ ovat yhtäsuuret, joten $FG \parallel AB$. Tästä seuraa, että myös $ED \parallel FG$. 1 p (3 p)

Yhdensuuntaisuudesta $ED \parallel FG$ seuraa, että samankohtaiset kulmat $\sphericalangle DEG$ ja $\sphericalangle FGE$ ovat yhtäsuuret. Kolmioilla DEG ja FGE on yhteinen sivu EG, josta yhdessä edellisten kanssa seuraa, että $\Delta DEG \cong \Delta FGE$ (sks).

Viimeisestä yhtenevyydestä seuraa, että samankohtaiset kulmat $\sphericalangle FEG$ ja $\sphericalangle DGE$ ovat yhtäsuuret, joten $EF \parallel DG$. On osoitettu, että nelikulmion $FGDE$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten $FGDE$ on suunnikas.

□ 1 p (4 p)

c) Samankohtaiset kulmat $\sphericalangle EDP$ ja $\sphericalangle PFG$ ovat yhtäsuuret, joten yhdessä edellisen kanssa seuraa, että $\Delta EDP \cong \Delta PFG$ (ksk). Viimeisestä yhtenevyydestä seuraa, että vastinsivuille DP ja FP pätee $DP = FP$. Näin ollen 1 p (5 p)

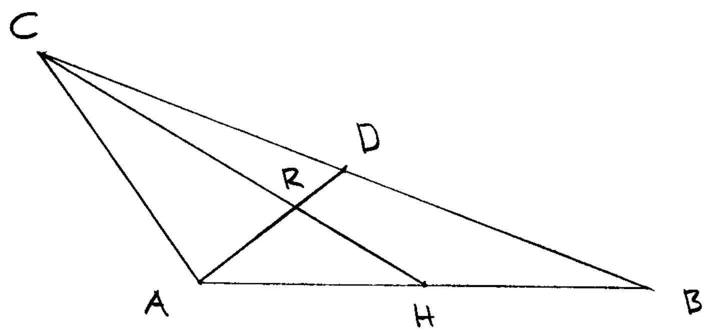
$$\frac{DP}{AD} = \frac{DP}{AF + FP + DP}$$

$$\frac{DP}{AD} = \frac{FP}{FP + FP + FP}$$

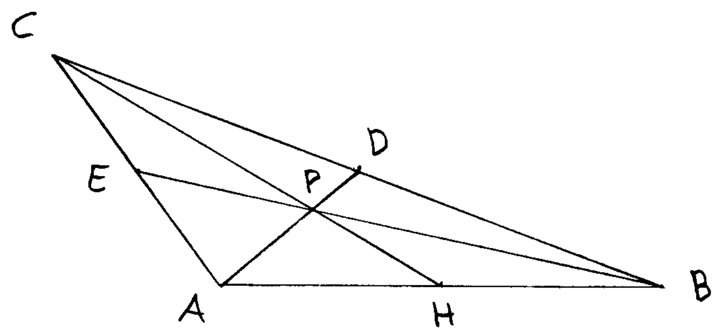
$$\frac{DP}{AD} = \frac{1}{3}$$

□ 1 p (6 p)

d)



Merkitään sivun AB keskipistettä H:lla. Voidaan osoittaa vastaavasti kuin kohdissa a–c, että $\frac{DR}{AD} = \frac{1}{3}$. Koska R ja P jakavat janan AD samassa suhteessa $2 : 1$, niin ne ovat sama piste. Näin ollen sekä pisteestä B että C piirretyt keskijanat jakavat keskijanan AD siten, että sivun BC puoleinen osa on kolmasosa keskijanan AD pituudesta. Saadaan kuva 1 p (7 p)



Koska missään edellä olevassa ei tehty oletuksia kulman A laadusta, voidaan osoittaa vastaavasti kuten edellä, että pisteistä B ja C lähteville keskijanoille pätee

$$\frac{EP}{BE} = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{HP}{CH} = \frac{1}{3}.$$ 1 p (8 p)

Näin ollen kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä P siten, että P jakaa jokaisen keskijanan siten, että sivun puoleisen osan pituus on kolmasosa koko keskijanan pituudesta. □ 1 p (9 p)