MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2012

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2(1-3x+3x^2)=3(1+2x+2x^2)$

b) $|x|=1+x$

c) $1-x=\dfrac{1}{1-x}$

2. Sievennä lausekkeet

a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3}$

c) $\ln\dfrac{x}{2}+\ln\dfrac{e^x}{x}+\ln 2$

3. **a)** Määritä funktion

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$

derivaatan arvo kohdassa $x=0$.

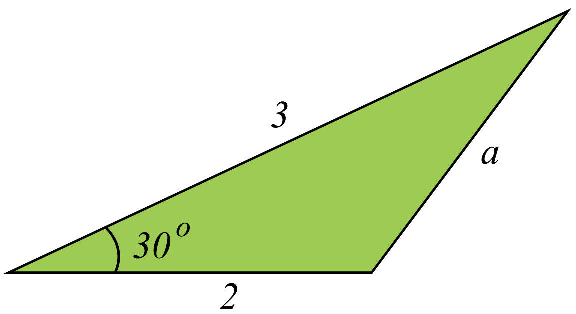
b) Laske integraalin

$$\int_0^{\pi}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)dx$$

tarkka arvo.

4. **a)** Olkoon $\alpha\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ sellainen kulma, että $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$. Määritä lukujen $\sin\alpha$ ja $\tan\alpha$ tarkat arvot.

b) Laske oheisessa kuvassa olevan kolmion sivun pituuden a tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



5. Määritä polynomin $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2,6]$.

6. Laske paraabelin $y^2=4x$ ja suoran $4x-3y=4$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. Piirrä kuvio.

7. Erään mallin (R. MacArthur & E. O. Wilson, 1967) mukaan saarella pesivien lintulajien lukumäärä n riippuu saaren pinta-alasta A likimain kaavan $n=kA^b$ mukaisesti, missä k ja b ovat saaresta riippumattomia positiivisia vakioita.

a) Havaintojen perusteella kahdella Kanariansaarella on saatu seuraavat arvot:

$n_1=20,\ A_1=10{,}2\ \text{km}^2$ (Alegranza),

$n_2=6,\ \ A_2=0{,}0158\ \text{km}^2$ (Roque del Oeste).

Määritä näiden tietojen perusteella vakiot k ja b kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Arvioi mallin avulla La Palman saarella $(A=708\ \text{km}^2)$ pesivien lintulajien lukumäärää.

Alegranza <http://www.lanzarote.org/blog/?p=629>. Luettu 31.3.2011.

Roque del Oeste <http://www.reptilesdecanariastjorge.com>. Luettu 31.3.2011.

La Palma <http://mappery.com/map-of/La-Palma-Physical-Map>. Luettu 29.3.2011.

8. Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.

a) Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot?

b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?

c) Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo.

9. Olkoot

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (\cos\varphi - 2\sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)\overline{k},\\ \overline{b} &= (\cos\varphi + \sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi - \cos\varphi)\overline{k}.\end{aligned}$$

a) Osoita, että vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla $\varphi \in \mathbf{R}$.

b) Olkoon $\varphi = 0$. Onko olemassa sellaisia kertoimia $s, t \in \mathbf{R}$, että $\overline{i} - \overline{j} = s\overline{a} + t\overline{b}$?

10. Tutki, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $e^{x+a} = x$ on vakion $a \in \mathbf{R}$ eri arvoilla.

11. **a)** Geometrisen jonon kaksi peräkkäistä termiä ovat rationaalilukuja. Osoita, että jonon kaikki termit ovat rationaalilukuja.

b) Geometrisessa jonossa on ainakin kaksi rationaalista termiä. Osoita, että rationaalisia termejä on äärettömän monta.

12. Erään vuorokauden lämpötilaa $f(t)$ tutkittiin ajan t funktiona mittaamalla lämpötila Celsius-asteina kolmen tunnin välein keskiyöstä alkaen. Tuloksena saatiin seuraava taulukko:

t	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00	24.00
$f(t)$	10,2	10,7	12,3	13,8	15,8	17,9	17,0	15,5	14,2

Arvioi vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$

laskemalla siinä esiintyvä integraali puolisuunnikassäännön avulla.

13. Määritä raja-arvo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(4x+3) - \ln(3x+4)\right)$.

***14.** Sijoittaja käytti osakkeen kurssikehityksen arvioimiseen todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktion maksimi saavutetaan markkina-arvolla $20{,}50$ € ja joka on nolla yli viiden euron poikkeamilla markkina-arvosta $20{,}50$ €. Tiheysfunktio on jatkuva, ja sen kuvaaja koostuu kahdesta lineaarisesta osasta välillä $15{,}50-25{,}50$ €.

a) Määritä tiheysfunktion lauseke. (3 p.)

b) Millä todennäköisyydellä osakkeen markkina-arvo on alle 19 €? (2 p.)

c) Muiden kurssien nousu sai sijoittajan muuttamaan jakaumaa epäsymmetriseksi niin, että maksimi saavutettiin edelleen arvolla $20{,}50$ €, mutta nollakohta $25{,}50$ € siirtyi pisteeseen $30{,}50$ €. Muilta ominaisuuksiltaan jakauma pysyi samantyyppisenä kuin aikaisemmin. Määritä tämän uuden jakauman odotusarvo. (4 p.)

***15.** Suora ympyrälieriö on pallon sisällä niin, että sen molempien pohjien reunat sivuavat pallon pintaa. Pallon pinta-alan suhdetta lieriön koko pinta-alaan merkitään symbolilla t. Lieriön koko pinta-alalla tarkoitetaan sen vaipan ja pohjien yhteenlaskettuja pinta-aloja.

a) Määritä lieriön korkeuden suhde lieriön pohjan säteeseen parametrin t avulla lausuttuna. (2 p.)

Millä parametrin t arvoilla

b) tällaista lieriötä ei ole olemassa (2 p.)

c) on täsmälleen yksi tällainen lieriö (3 p.)

d) on kaksi tällaista lieriötä? (2 p.)

Pitkä matematiikka, syksy 2012

Mallivastaukset, 28.9.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a)

$$\begin{aligned}2(1-3x+3x^2) &= 3(1+2x+2x^2)\\ 2-6x+6x^2 &= 3+6x+6x^2 \qquad \text{1 p}\\ -12x &= 1 \quad \| : (-12)\\ x &= \underline{\underline{-\frac{1}{12}}} \qquad \text{1 p (2 p)}\end{aligned}$$

b) $|x| = 1+x$

Täytyy olla $1+x \geq 0$, eli $x \geq -1$. Kun $x \geq -1$, niin itseisarvoyhtälö on yhtäpitävä alla olevan ehdon kanssa.

$$\begin{aligned} x = 1+x \quad &\text{tai} \quad x = -(1+x) \qquad \text{1 p (3 p)}\\ 0 = 1 \quad &\text{tai} \quad 2x = -1 \quad \| : 2\\ \text{aina epätosi} \quad &\text{tai} \quad x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$ 1 p (4 p)

c)

$$\begin{aligned}1-x &= \frac{1}{1-x} \quad \| \cdot (1-x), \text{ määrittelyehto } 1-x \neq 0\\ (1-x)(1-x) &= 1\\ x^2-2x+1 &= 1\\ x^2-2x &= 0 \qquad \text{1 p (5 p)}\\ x(x-2) &= 0\end{aligned}$$

Tulon nollasääntö

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\text{tai} \quad x-2 = 0\\ &\text{tai} \quad x = 2\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 2}}$ 1 p (6 p)

2. a)

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)$$ 1 p

$$= \cancel{x^2}+2+\cancel{\frac{1}{x^2}}-\cancel{x^2}+2-\cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \underline{\underline{4}}$$ 1 p (2 p)

b)

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-3)}{\underset{1}{\cancel{x+3}}}$$ 1 p (3 p) binomikaavan käytöstä

$$= \underline{\underline{x-3}}$$ 1 p (4 p)

c)

$$\ln\frac{x}{2}+\ln\frac{e^x}{x}+\ln 2 = \cancel{\ln x}-\cancel{\ln 2}+\ln e^x-\cancel{\ln x}+\cancel{\ln 2}$$ 1 p (5 p)

$$= \ln e^x$$

$$= \underline{\underline{x}}$$ 1 p (6 p)

3. a) $f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$

Derivoidaan f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) && \text{1 p} \\ &= \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \cos x - \frac{1}{2}e^x \sin x \\ &= e^x \cos x && \text{1 p (2 p)} \end{aligned}$$

Arvo nollassa on

$$f'(0) = e^0 \cos 0 = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}. \qquad \text{1 p (3 p)}$$

b)

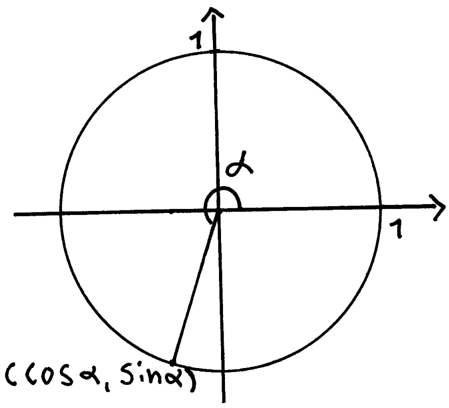
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(1 + \sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) dx &= \Big/_0^\pi \left(x - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right) && \text{2 p (5 p)} \\ &= \left(\pi - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(0 - 3\cos\left(\frac{0}{3}\right)\right) \\ &= \pi - 3 \cdot \frac{1}{2} - (-3 \cdot 1) \\ &= \pi - \frac{3}{2} + 3 \\ &= \underline{\underline{\pi + \frac{3}{2}}} && \text{1 p (6 p)} \end{aligned}$$

4. a)

$$\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
\sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha \\
\sin\alpha &= \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}
\end{aligned}$$

Päätellään $\sin\alpha$:n merkki yksikköympyrästä, kun $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.



$$\sin\alpha \leq 0,$$

joten

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \| \text{sij. } \cos\alpha = -\frac{1}{3} \qquad \text{1 p} \\
\sin\alpha &= -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} \\
\sin\alpha &= -\sqrt{1-\frac{1}{9}} \\
\sin\alpha &= -\sqrt{\frac{8}{9}} \\
\sin\alpha &= -\frac{\sqrt{4\cdot 2}}{\sqrt{9}} \\
\sin\alpha &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \text{1 p (2 p)}
\end{aligned}$$

Määritetään $\tan\alpha$.

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \| \text{sij. } \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3} \\
\tan\alpha &= \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \\
\tan\alpha &= \frac{\cancel{-}2\sqrt{2}}{\cancel{3}_{1}} \cdot (\cancel{-}\cancel{3}^{1}) \\
\tan\alpha &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ ja } \tan\alpha = 2\sqrt{2}.}}$ 1 p (3 p)

b) Ratkaistaan sivu a kosinilauseella.

$$\begin{aligned}
a^2 &= 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(30^\circ) && \text{1 p (4 p)} \\
a^2 &= 9 + 4 - \cancel{12}^{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} \\
a^2 &= 13 - 6\sqrt{3} \\
a &= \underset{(-)}{(+)} \sqrt{13 - 6\sqrt{3}} && \text{1 p (5 p)} \\
a &= 1{,}6148\ldots \\
&\approx 1{,}61
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Sivun pituus on } \sqrt{13 - 6\sqrt{3}} \approx 1{,}61.}}$ 1 p (6 p)

5. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2,\ x \in [2, 6]$

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$$ 1 p

Etsitään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 12x - 15 &= 0 \quad \| : 3 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 6}{2} \end{aligned}$$ 1 p (2 p)

$$x = 5 \quad (\text{tai } x = -1, \text{ ei kuulu tarkasteluvälille})$$ 1 p (3 p)

f on polynomifunktiona jatkuva välillä $[2, 6]$ ja derivoituva välillä $]2, 6[$, joten se saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. 1 p (4 p)

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 2 = -44 && \text{(suurin arvo)} \\ f(5) &= 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = -98 && \text{(pienin arvo)} \\ f(2) &= 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 + 2 = -88 \end{aligned}$$

Vastaus: f:n suurin arvo välillä $[2, 6]$ on -44 ja pienin -98. 2 p (6 p)

(1 p, suurin arvo)
(1 p, pienin arvo)

6.

$$y^2 = 4x$$
$$4x - 3y = 4$$

Määritetään paraabelin ja suoran leikkauspisteet

1°

$$\begin{cases} y^2 = 4x & (1) \\ 4x - 3y = 4 & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2)

$$\begin{aligned} y^2 - 3y &= 4 \\ y^2 - 3y - 4 &= 0 \\ y &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\ y &= \frac{3 \pm 5}{2} \\ y &= \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

kun $y = 4$, $\quad x = \frac{3}{4} \cdot 1 + 1 = 4$, $\quad$ piste $(4, 4)$

kun $y = -1$, $\quad x = \frac{3}{4} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{4}$, $\quad$ piste $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ 1 p

2° Piirretään paraabeli ja suora (x, y)-koordinaatistoon.
Paraabeli:

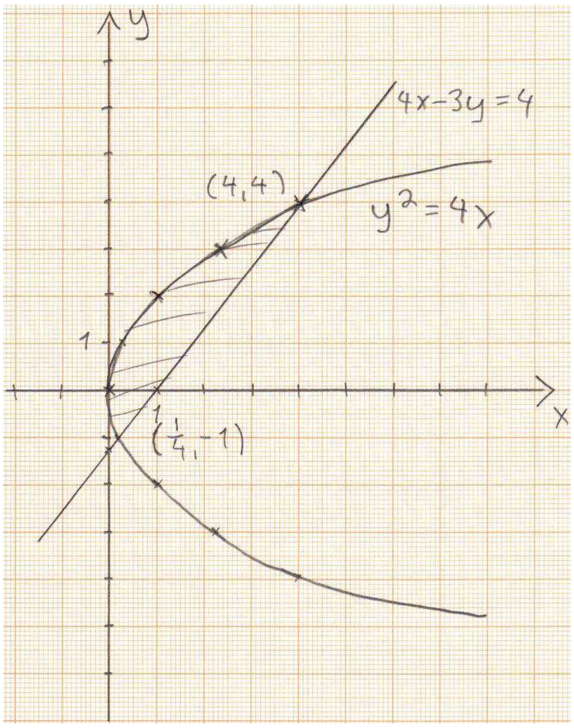
$$y^2 = 4x \quad \| : 4$$
$$x = \frac{1}{4}y^2$$

y	$x = \frac{1}{4}y^2$
-3	$\frac{1}{4} \cdot (-3)^2 = \frac{9}{4}$
-2	1
-1	$\frac{1}{4}$
0	0
1	$\frac{1}{4}$
2	1
3	$\frac{9}{4}$

Ratkaistaan kuvaajan piirtämistä varten suora muodossa $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 4 \\ 3y &= 4x - 4 \quad \| : 3 \\ y &= \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

1 p (2 p)



1 p (3 p)

Ratkaistaan yhtälö (2) x:n suhteen.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 4 \\ 4x &= 3y + 4 \quad \| : 4 \\ x &= \frac{3}{4}y + 1 \end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{3}{4}y + 1 \\ g(y) &= \frac{1}{4}y^2. \end{aligned}$$

Välillä $y \in [-1, 4]$ $f(y) \geq g(y)$. 1 p (4 p)

Nyt voidaan laskea kysytty pinta-ala määrättynä integraalina.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{4} [f(y) - g(y)]dy \\
&= \int_{-1}^{4} \left(\frac{3}{4}y + 1 - \frac{1}{4}y^2\right) dy \\
&= \Big/_{-1}^{4} \left(\frac{3}{2\cdot 4}y^2 + y - \frac{1}{3\cdot 4}y^3\right) \\
&= \Big/_{-1}^{4} \left(\frac{3}{8}y^2 + y - \frac{1}{12}y^3\right) \\
&= \left(\frac{3}{8}\cdot 4^2 + 4 - \frac{1}{12}\cdot 4^3\right) - \left(\frac{3}{8}\cdot(-1)^2 - 1 - \frac{1}{12}\cdot(-1)^3\right) \\
&= \frac{125}{24} = 5{,}20832\ldots \approx 5{,}21
\end{aligned}
$$

1 p (5 p)

Vastaus: Kysytty pinta-ala on $\frac{125}{24} \approx 5{,}21$.

1 p (6 p)

7. Lintulajien lukumäärä n riippuu saaren pinta-alasta A kaavan

$$n = kA^b$$

mukaisesti, missä k ja b ovat vakioita.

a) Tiedetään, että

$$20 = k \cdot 10{,}2^b \tag{1}$$

ja

$$6 = k \cdot 0{,}0158^b \qquad \text{1 p} \tag{2}$$

Ratkaistaan yhtälö (1) k:n suhteen.

$$\begin{aligned} 20 &= k \cdot 10{,}2^b \quad \| : 10{,}2^b \\ k &= \frac{20}{10{,}2^b} \end{aligned} \tag{3}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{20}{10{,}2^b} \cdot 0{,}0158^b \quad \| : 20 \\ \frac{6}{20} &= \left(\frac{0{,}0158}{10{,}2}\right)^b \quad \| \ln() \\ \ln\frac{6}{20} &= b\ln\frac{0{,}0158}{10{,}2} \quad \| : \ln\tfrac{0{,}0158}{10{,}2} \\ b &= \frac{\ln\frac{6}{20}}{\ln\frac{0{,}0158}{10{,}2}} \\ &= 0{,}18608\ldots \\ &\approx 0{,}186 \qquad \text{1 p (2 p)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu b:n arvo yhtälöön (1)

$$\begin{aligned} 20 &= k \cdot 10{,}2^{0{,}18608\ldots} \quad \| : 10{,}2^{0{,}18608\ldots} \\ k &= \frac{20}{10^{0{,}18608\ldots}} \\ &= 12{,}982\ldots \\ &\approx 13{,}0 \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{k = 13{,}0 \text{ ja } b = 0{,}186.}}$ 1 p (3 p)

b) Nyt $A = 708\,\mathrm{km}^2$, joten

$$\begin{aligned} n &= kA^b \\ &= 12{,}982\ldots \cdot 708^{0{,}18608\ldots} \\ &= 44{,}0237\ldots \\ &\approx 44. \end{aligned}$$

1 p (4 p)

Vastaus: $\underline{\underline{\text{La Palman saarella pesii 44 lintulajia.}}}$ 2 p (6 p)

8. Merkitään

$$P(\text{"ehtii pitämään päivittäisen luennon"}) = p$$

ja

$$P(\text{"ei ehdi pitämään päivittäistä luentoa"}) = q$$

Tehtävänannon mukaan

$$p = 0{,}8$$

ja

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

a) A: "ehtii pitämään kaikki luennot"

$$P(A) = p^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768 \approx \underline{\underline{32{,}8\,\%}}$$

2 p (2 p)
Puutteellisista merkinnöistä -1 p

b) B: "yksi viidestä luennosta jää pitämättä"
Kyseessä on binomitodennäköisyys, jossa $n = 5$ ja $k = 4$.

$$\begin{aligned} P(B) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{5-4} \\ &= 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 \\ &= 0{,}4096 \\ &\approx \underline{\underline{41{,}0\,\%}} \end{aligned}$$

1 p (3 p)

1 p (4 p)

c) Lasketaan ensin yksittäisten tapahtumien todennäköisyydet.

$$\begin{aligned} p_0 &= P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032 \\ p_1 &= P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064 \\ p_2 &= P(X=2) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512 \\ p_3 &= P(X=3) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048 \\ p_4 &= P(X=4) = P(B) = 0{,}4096 \\ p_5 &= P(X=5) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}8^5 = 0{,}32768 \end{aligned}$$

1 p (5 p)

Viikossa pidettyjen luentojen odotusarvo on

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_i p_i X_i \\ &= 0{,}00032 \cdot 0 + 0{,}0064 \cdot 1 + 0{,}0512 \cdot 2 \\ &\quad + 0{,}2048 \cdot 3 + 0{,}4096 \cdot 4 + 0{,}32768 \cdot 5 \\ &= 4\end{aligned}$$

Vastaus: Odotusarvo on 4. 1 p (6 p)

9. Olkoot

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (\cos\varphi - 2\sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)\overline{k}\\ \overline{b} &= (\cos\varphi + \sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi - \cos\varphi)\overline{k}\end{aligned}$$

a) Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden välinen pistetulo on nolla.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= \Big[(\cos\varphi - 2\sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)\overline{k}\Big]\\ &\quad\cdot\Big[(\cos\varphi + \sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi - \cos\varphi)\overline{k}\Big]\\ &= (\cos\varphi - 2\sin\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1 + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)(\sin\varphi - \cos\varphi) \qquad \text{1 p}\\ &= \cos^2\varphi + \cancel{\cos\varphi\sin\varphi} - \cancel{2\sin\varphi\cos\varphi} - 2\sin^2\varphi + 1 + \sin^2\varphi\\ &\quad - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{2\cos\varphi\sin\varphi} - 2\cos^2\varphi\\ &= 1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\\ &= 1 - \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}\\ &= 0 \qquad \text{1 p (2 p)}\end{aligned}$$

Eli $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathbb{R}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis toisiaan vastaan kohtisuorassa. 1 p (3 p)

b) Olkoon $\varphi = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (\cos 0 - 2\sin 0)\overline{i} + \overline{j} + (\sin 0 + 2\cos 0)\overline{k}\\ &= \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}\\ \overline{b} &= (\cos 0 + \sin 0)\overline{i} + \overline{j} + (\sin 0 - \cos 0)\overline{k}\\ &= \overline{i} + \overline{j} - \overline{k} \qquad \text{1 p (4 p)}\end{aligned}$$

Olkoot $s, t \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}s\overline{a} + t\overline{b} &= s(\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}) + t(\overline{i} + \overline{j} - \overline{k})\\ &= s\overline{i} + s\overline{j} + 2s\overline{k} + t\overline{i} + t\overline{j} - t\overline{k}\\ &= (s+t)\overline{i} + (s+t)\overline{j} + (2s-t)\overline{k}\end{aligned}$$

Jotta olisi

$$s\bar{a} + t\bar{b} = \bar{i} - \bar{j},$$

täytyisi siis vektorien yksikäsitteisyyden nojalla olla:

$$\begin{cases} s + t = 1 \\ s + t = -1 \\ 2s - t = 0 \end{cases}$$

1 p (5 p)

$s+t$ ei voi kuitenkaan samaan aikaan olla 1 ja -1, joten tällaisia kertoimia s ja t ei ole olemassa.

1 p (6 p)

10. Muokataan yhtälöä:

$$\begin{aligned} e^{x+a} &= x \\ e^{x+a} - x &= 0, \quad \text{jossa } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan erotusfunktiota

$$E(x) = e^{x+a} - x$$

$E(x)$:n nollakohdat ovat yhtälön ratkaisuja.
Derivoidaan E:

$$E'(x) = e^{x+a} - 1$$

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} E'(x) &= 0 \\ e^{x+a} - 1 &= 0 \\ e^{x+a} &= 1 \quad \| \ln(\,) \\ \ln e^{x+a} &= \ln 1 \\ x + a &= 0 \\ x &= -a \end{aligned}$$

1 p

Nyt koska

$$E''(x) = e^{x+a} > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

$E'(x)$ on aidosti kasvava, joten

$$\begin{aligned} E'(x) &< 0, \quad \text{kun } x < -a \quad \text{ja} \\ E'(x) &> 0, \quad \text{kun } x > -a \end{aligned}$$

Täten $x = -a$ on funktion $E(x)$ ainoa minimikohta. 1 p (2 p)
$E(x)$:n pienin arvo on

$$E(-a) = e^{-a+a} - (-a) = e^0 + a = a + 1.$$

$E(x)$:llä ei ole nollakohtia, kun pienin arvo on positiivinen, eli kun

$$a > -1$$

1 p (3 p)

$E(x)$:llä on yksi nollakohta, kun sen pienin arvo on nolla, eli

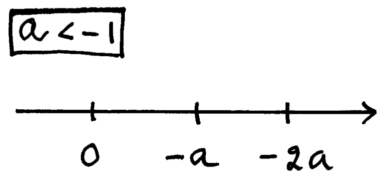
$$a = -1$$

1 p (4 p)

Tutkitaan jäljelle jäävä tapaus $a < -1$. Silloin pienin arvo on negatiivinen, koska

$$\begin{aligned} a &< -1 \\ a + 1 &< 0. \end{aligned}$$

Tutkitaan $E(x)$:n merkkiä minimikohdan molemmin puolin kohdissa $x = 0$ ja $x = -2a$. Ks. alla oleva kuva.



$$\begin{aligned} E(0) &= e^{0+a} - 0 = e^a > 0 \\ E(-2a) &= e^{-2a+a} - (-2a) = e^{-a} + 2a \end{aligned}$$

Merkitään

$$f(a) = E(-2a) = e^{-a} + 2a$$

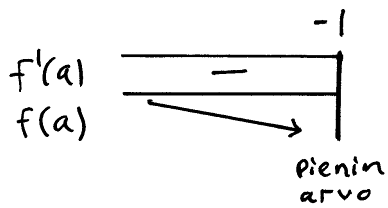
ja osoitetaan, että $f(a) > 0$, kun $a < -1$.

$$f'(a) = -e^{-a} + 2$$

Tutkitaan, millä a:n arvoilla derivaatta on negatiivinen

$$\begin{aligned} f'(a) &< 0 \\ -e^{-a} + 2 &< 0 \\ -e^{-a} &< -2 \quad \| \cdot (-1) \\ e^{-a} &> 2 \quad \| \ln() \\ -a &> \ln 2 \| \cdot (-1) \\ a &< -\ln 2 \approx -0{,}693 \end{aligned}$$

Näin ollen $f'(a) < 0$ kaikilla $a < -1$. Saadaan kulkukaavio



Pienin arvo on

$$f(-1) = e^{-(-1)} + 2 \cdot (-1) \approx 0{,}718 > 0.$$ 1 p (5 p)

Pienin arvo on positiivinen, joten $f(a)$ ja siten myös $E(-2a)$ on positiivinen kaikilla $a < -1$.

$E(x)$ on monotoninen kohdan $x = -a$ molemmin puolin, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta molemmilla puolilla. Koska $E(x)$ vaihtaa merkkiään väleillä $[0, -a]$ ja $[-a, -2a]$, niin sillä on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun $a > -1$, on yksi ratkaisu, kun $a = -1$ ja on kaksi ratkaisua, kun $a < -1$. 1 p (6 p)

11. a) Koska jono on geometrinen, sen n:s ($n \in \mathbb{Z}_+$) jäsen on muotoa

$$a_n = aq^{n-1}, \quad a, q \in \mathbb{R},\ q \neq 0.$$

Jos $a = 0$, niin $a_n = 0$ kaikilla n, jolloin väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $a \neq 0$, jolloin $a_n \neq 0$ kaikilla n.
Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}_+$, että $a_k, a_{k+1} \in \mathbb{Q}$. Tällöin myös osamäärä

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{aq^k}{aq^{k-1}} = q \qquad \text{1 p}$$

on rationaaliluku.
Koska $q \in \mathbb{Q}$, niin q^k on rationaalilukujen tulo ja näin ollen rationaalinen. Luku a voidaan kirjoittaa rationaalilukujen osamääränä seuraavasti:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= aq^k \quad \| : q^k \\ a &= \frac{a_{k+1}}{q^k}. \end{aligned} \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Se on siis rationaaliluku. Nähdään, että jonon mielivaltainen jäsen $a_n = aq^{n-1}$ on rationaalilukujen tulo, joten jonon kaikki jäsenet ovat rationaalisia. 1 p (3 p)

b) Käytetään samoja merkintöjä jonon jäsenille kuin a-kohdassa. Oletuksen nojalla on olemassa $s, t \in \mathbb{Z}_+$ ($s < t$) siten, että jonon jäsenet $a_s = aq^{s-1}$ ja $a_t = aq^{t-1}$ ovat rationaalisia. Tällöin osamäärä

$$\frac{a_t}{a_s} = \frac{aq^{t-1}}{aq^{s-1}} = q^{t-s} \qquad \text{1 p (4 p)}$$

on rationaalinen. Merkitään

$$p = q^{t-s}.$$

Jonon jäsenet

$$a_{s+k(t-s)} = aq^{s+k(t-s)-1} = aq^{s-1} \cdot (q^{t-s})^k = a_s p^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

ovat rationaalilukujen tuloja, joten ne ovat rationaalilukuja. Koska tällaisia jäseniä on äärettömän monta, niin väite pätee. 2 p (6 p)

12. Taulukon t:n arvot vastaavat osavälien pisteitä. $f(t)$ on aina vastaava funktion arvo. Siten osavälin pituus on 3 tuntia ja puolisuunnikassäännöllä ($a = 0$, $b = 24$ ja $h = 3$). Saadaan: 1 p

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t &\approx \frac{1}{24}\cdot 3\cdot\Big[\frac{1}{2}\cdot 10{,}2 + 10{,}7 + 12{,}3 + 13{,}8 + 15{,}8 \\ &\qquad + 17{,}9 + 17{,}0 + 15{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 14{,}2\Big] \\ &= 14{,}4\end{aligned}$$

4 p (5 p)

Vastaus: Vuorokauden keskilämpötila on noin 14,4 °C. 1 p (6 p)

13.

1 p

$$\ln(4x+3)-\ln(3x+4)=\ln\frac{4x+3}{3x+4}=\ln\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}=\ln\frac{4+\frac{3}{x}}{3+\frac{4}{x}}$$

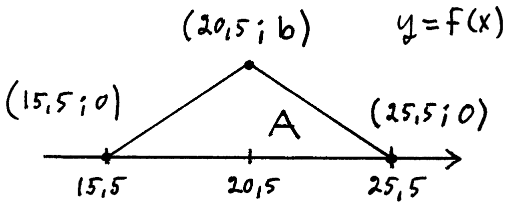
2 p (3 p)

Täten siis raja-arvo on

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\ln(4x+3)-\ln(3x+4)\Big)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{4+\frac{3}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\ln\frac{4+0}{3+0}=\underline{\underline{\ln\frac{4}{3}}}.$$

1 p (4 p) 2 p (6 p)

*14. a)



Ehdot toteuttavan tiheysfunktion kuvaaja on esitetty kuvassa 1. Tiheysfunktion ja x-akselin rajaama ala on 1, joten koordinaatti b saadaan ehdosta

$$\begin{aligned} A &= 1 \quad \| \text{Kolmiolle } A = \frac{1}{2}ah \\ \frac{1}{2}(25{,}5 - 15{,}5)b &= 1 \\ 5b &= 1 \quad \| : 5 \\ b &= 0{,}2 \end{aligned}$$

1 p

Kuvaaja muodostuu kahdesta suoran osasta. Määritetään suorien yhtälöt.

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{0{,}2 - 0}{20{,}5 - 15{,}5} = 0{,}04 \\ k_2 &= \frac{0 - 0{,}2}{25{,}5 - 20{,}5} = -0{,}04 \end{aligned}$$

Nousevan suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 0 &= 0{,}04 \cdot (x - 15{,}5) \\ y &= 0{,}04x - 0{,}62 \end{aligned}$$

1 p (2 p)

Laskevan suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 0 &= -0{,}04(x - 25{,}5) \\ y &= -0{,}04x + 1{,}02 \end{aligned}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}04x - 0{,}62 & \text{, kun } 15{,}5 \leq x \leq 20{,}5 \\ -0{,}04x + 1{,}02 & \text{, kun } 20{,}5 \leq x \leq 25{,}5 \\ 0 & \text{, kun } x < 15{,}5 \text{ tai } x > 25{,}5 \end{cases}$$

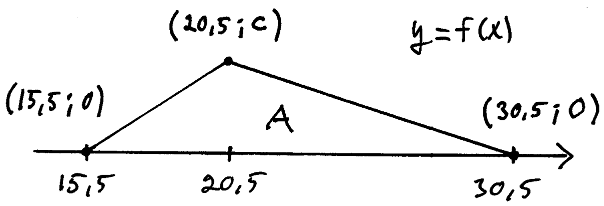
1 p (3 p)

b) Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
P(x < 19) &= \int_{-\infty}^{19} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{15,5}^{19} (0{,}04x - 0{,}62)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{15,5}^{19} (0{,}02x^2 - 0{,}62x) \qquad \text{1 p (4 p)} \\
&= (0{,}02 \cdot 19^2 - 0{,}62 \cdot 19) - (0{,}02 \cdot 15{,}5^2 - 0{,}62 \cdot 15{,}5) \\
&= 0{,}245 \approx 0{,}25
\end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 0,25. 1 p (5 p)

c)



Määritetään koordinaatti c kuten a-kohdassa.

$$\begin{aligned}
A &= 1 \quad \|\text{Kolmiolle } A = \frac{1}{2}ah \\
\frac{1}{2}(30{,}5 - 15{,}5)c &= 1 \\
\frac{15}{2}c &= 1 \quad \| \cdot \frac{2}{15} \\
c &= \frac{2}{15} \qquad \text{1 p (6 p)}
\end{aligned}$$

Kulmakertoimet ovat

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\frac{2}{15} - 0}{20{,}5 - 15{,}5} = \frac{2}{75} \\
k_2 &= \frac{0 - \frac{2}{15}}{30{,}5 - 20{,}5} = -\frac{1}{75}
\end{aligned}$$

Nousevan suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{2}{75}(x - 15{,}5) \\ y &= \frac{2}{75}x - \frac{31}{75} \end{aligned}$$

Laskevan suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{1}{75}(x - 30{,}5) \\ y &= -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150} \end{aligned}$$

Tiheysfunktio on nyt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{75}x - \frac{31}{75} & \text{, kun } 15{,}5 \leq x \leq 20{,}5 \\ -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150} & \text{, kun } 20{,}5 < x \leq 30{,}5 \\ 0 & \text{, kun } x < 15{,}5 \text{ tai } x > 30{,}5 \end{cases}$$ 1 p (7 p)

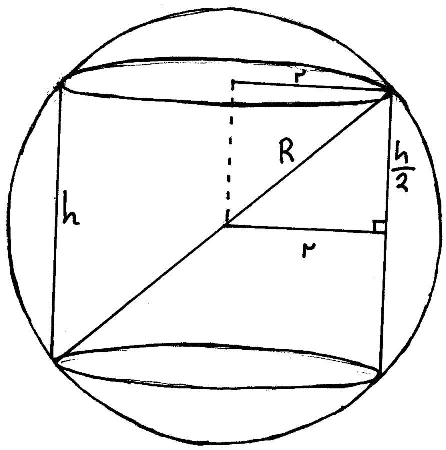
Odotusarvo on

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{15{,}5}^{20{,}5} x\left(\frac{2}{75}x - \frac{31}{75}\right)\mathrm{d}x + \int_{20{,}5}^{30{,}5} x\left(\frac{-1}{75}x + \frac{61}{150}\right)\mathrm{d}x \\ &= \Big/_{15{,}5}^{20{,}5} \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{75}x^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{31}{75}x^2\right) + \Big/_{20{,}5}^{30{,}5} \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{75}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{61}{150}x^2\right) \\ &= \Big/_{15{,}5}^{20{,}5} \left(\frac{2}{225}x^3 - \frac{31}{150}x^2\right) + \Big/_{20{,}5}^{30{,}5} \left(-\frac{1}{225}x^3 + \frac{61}{300}x^2\right) \\ &= \frac{2}{225}\cdot 20{,}5^3 - \frac{31}{150}\cdot 20{,}5^2 - \left(\frac{2}{225}\cdot 15{,}5^3 - \frac{31}{150}\cdot 15{,}5^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{225}\cdot 30{,}5^3 + \frac{61}{300}\cdot 30{,}5^2 - \left(-\frac{1}{225}\cdot 20{,}5^3 + \frac{61}{300}\cdot 20{,}5^2\right) \\ &= \frac{133}{6} = 22{,}166\ldots \approx 22{,}17\,(€) \end{aligned}$$

1 p (8 p)

Vastaus: Odotusarvo on 22,17 €. 1 p (9 p)

*15.



Kuvasta saadaan Pythagoraan lauseella ilmoitettua pallon säde lieriön säteen ja korkeuden avulla.

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$$

Pallon pinta-ala on tämän avulla:

$$\begin{aligned} A_p &= 4\pi R^2 \\ &= 4\pi\left(\frac{h^2}{4} + r^2\right) \\ &= \pi h^2 + 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Lieriön pinta-ala on

$$A_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Täten pinta-alojen suhde on

$$t = \frac{A_p}{A_l} = \frac{\cancel{\pi} h^2 + 4\cancel{\pi} r^2}{2\cancel{\pi} r^2 + 2\cancel{\pi} r h} = \frac{h^2 + 4r^2}{2r^2 + 2rh}$$ 1 p

a) Tästä saadaan lieriön korkeuden suhde säteeseen t:n avulla:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{h^2+4r^2}{2r^2+2rh} \\
2tr^2+2trh &= h^2+4r^2 \quad \| : r^2 \\
2t+2t\frac{h}{r} &= \frac{h^2}{r^2}+4 \quad \|\text{merkitään } z=\frac{h}{r} \\
2t+2tz &= z^2+4 \\
z^2-2tz+4-2t &= 0 \\
z &= \frac{2t\pm\sqrt{(-2t)^2-4\cdot 1\cdot(4-2t)}}{2} \\
&= \frac{\cancel{2}t\pm\sqrt{\cancel{4}t^2-\cancelto{4}{16}+\cancelto{2}{8}t}}{\cancel{2}} \\
&= t\pm\sqrt{t^2+2t-4}
\end{aligned}$$

Eli

$$\underline{\underline{\frac{h}{r}=t\pm\sqrt{t^2+2t-4}}} \qquad (1)$$ 1 p (2 p)

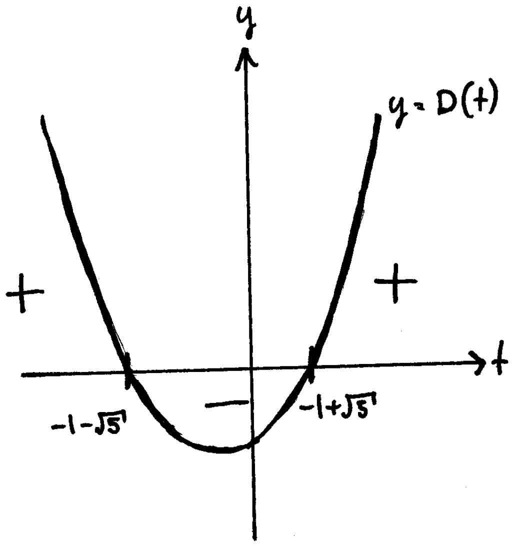
b) Lieriötä ei ole olemassa, kun $\frac{h}{r}$ ei ole määritelty yhtälössä (1), eli kun diskriminantti

$$D(t)=t^2+2t-4<0$$

Etsitään nollakohdat:

$$\begin{aligned}
t^2+2t-4 &= 0 \\
t &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2} \\
&= \frac{-2\pm\sqrt{20}}{2} \\
t &= -1+\sqrt{5} \quad \text{tai} \quad t=-1-\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$D(t)$ on ylöspäin aukeava paraabeli.



Täten $D(t) < 0$, kun

$$-1 - \sqrt{5} < t < -1 + \sqrt{5}$$ 1 p (3 p)

Lieriötä ei ole myöskään silloin, kun $t \leq 0$, koska suhde $\frac{A_p}{A_l}$ ei voi olla negatiivinen. Kaikilla muilla t:n arvoilla, eli kun

$$t \geq -1 + \sqrt{5},$$

lauseke (1) on määritelty. Lisäksi

$$t + \sqrt{t^2 + 2t - 4}$$

on positiivinen luku, koska $t > 0$, joten tällöin on olemassa ainakin yksi tehtävänannon mukainen lieriö. Täten siis tehtävänannon mukaista lieriötä ei ole olemassa, kun parametri

$$\underline{\underline{t < -1 + \sqrt{5}}}$$ 1 p (4 p)

c) Täsmälleen yksi lieriö on olemassa sellaisella t, jolla on olemassa vain yksi lieriön korkeuden ja säteen suhde (1). Näin on ainakin silloin, kun

$$D(t) = t^2 + 2t - 4 = 0$$

b-kohdan mukaan nollakohdat ovat $t_1 = -1 - \sqrt{5}$ ja $t_2 = -1 + \sqrt{5}$, joista vain $t_2 = -1 + \sqrt{5}$ kelpaa, koska $t > 0$. b-kohdan mukaan lauseke (1) on määritelty kaikilla $t \geq -1 + \sqrt{5}$. Suhteen $\frac{h}{r}$ on kuitenkin oltava 1 p (5 p) positiivinen, joten lausekkeen (1) negatiiviset arvot ja arvo nolla täytyy hylätä.

$$t + \sqrt{t^2 + 2t - 4}$$

on aina positiivinen, kun $t > 0$, mutta lauseke

$$t - \sqrt{t^2 + 2t - 4}$$

voi saada negatiivisiakin arvoja tai arvon nolla. Kun

$$t - \sqrt{t^2 + 2t - 4} \leq 0,$$

kaava (1) antaa vain yhden kelvollisen suhteen $\frac{h}{r}$ ja lieriöitä on vain yksi. Tutkitaan, milloin $t - \sqrt{t^2 + 2t - 4} \leq 0$, kun $t \geq -1 + \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} t - \sqrt{t^2 + 2t - 4} &\leq 0 \\ t &\leq \sqrt{t^2 + 2t - 4} \\ \cancel{t^2} &\leq \cancel{t^2} + 2t - 4 \\ 2t - 4 &\geq 0 \\ 2t &\geq 4 \\ t &\geq 2 \end{aligned}$$ 1 p (6 p)

Täten siis on vain yksi tehtävänannon mukainen lieriö, kun

$$\underline{\underline{t = -1 + \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad t \geq 2}}$$ 1 p (7 p)

d) Kaksi lieriötä löytyy, kun

$$D(t) = t^2 + 2t - 4 > 0 \quad \text{ja}$$
$$t - \sqrt{t^2 + 2t - 4} > 0$$

b- ja c-kohtien nojalla näin on, kun

$$\underline{\underline{-1 + \sqrt{5} < t < 2}}$$ 2 p (9 p)