Lääkiskurssi

- 5-8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa **1.10., 3.11., 7.1., 16.2.** tai **30.3.** Opetusajaksi voi yleensä valita joko 9.30-12.30 tai 13-16 tai 17-20.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta ja pitkällä kurssilla lisäksi 6 yo-koetta
- Pitkä kurssi **16.2.-22.5.** ja kevätkurssi **30.3.-22.5.**

Pitkä matematiikka, syksy 2014

Mallivastaukset, 24.9.2014

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään he opettavat MAFY:n kursseilla ympäri vuoden ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen ja Viljami Suominen. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Ratkaise yhtälö $(x-2)(x-3)=6$.
   b) Missä pisteessä paraabelit $y=x^2+x+1$ ja x^2+2x+3 leikkaavat?
   c) Määritä kaikki luvut, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: Luvun ja sen käänteisluvun keskiarvo on 4.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned}(x-2)(x-3)&=6\\ x^2-3x-2x+6&=6\\ x^2-5x&=0\\ x(x-5)&=0 \quad \text{1p}\\ \underline{\underline{x=0}} \text{ tai } x-5&=0\\ \underline{\underline{x=5}} &\quad \text{1p (2p)}\end{aligned}$$

Huom! Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

b) Ratkaistaan paraabelien leikkauspiste yhtälöparista.

$$\begin{cases} y=x^2+x+1 & (1)\\ y=x^2+2x+3 & (2)\end{cases}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned}\cancel{x^2}+x+1&=\cancel{x^2}+2x+3\\ -x&=2 \quad \| \cdot(-1)\\ x&=-2 \quad \text{1p (3p)}\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x=-2$ yhtälöön (1).

$$\begin{aligned}y&=(-2)^2+(-2)+1\\ y&=3\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Leikkauspiste on } (-2,3).}}$ 1p (4p)

Huom! Yhtälöparin voi ratkaista myös laskimella.

c) Kirjoitetaan tehtävänannon ehto yhtälön muotoon ja ratkaistaan yhtälö.

1p (5p)

$$\begin{aligned}
\frac{x+\frac{1}{x}}{2} &= 4 \quad \| \cdot 2, \quad x \neq 0 \\
x + \frac{1}{x} &= 8 \quad \| \cdot x \\
x^2 + 1 &= 8x \\
x^2 - 8x + 1 &= 0 \\
x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \\
x &= 4 \pm \frac{\sqrt{60}}{2} \\
x &= 4 \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 15}}{2} \\
x &= 4 \pm \frac{\cancelto{1}{2}\sqrt{15}}{\cancelto{1}{2}} \\
x &= 4 + \sqrt{15} \text{ tai } x = 4 - \sqrt{15}
\end{aligned}$$

Vastaus: Luvut ovat $4 + \sqrt{15}$ ja $4 - \sqrt{15}$. 1p (6p)

Huom! Ensimmäisen yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

2. a) Määritä suorien $2x + 3y = 7$ ja $3x - 2y = 4$ leikkauspiste.
   b) Luku on yhtä suuri kuin puolet sen neliöjuuresta. Määritä kaikki tällaiset luvut.
   c) Sievennä lauseke $\ln\left(\dfrac{1}{3x^2}\right) + \ln 3 + 2\ln x$, kun $x > 0$.

Ratkaisu.

a) Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparista.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & \| \cdot 2 \\ 3x - 2y = 4 & \| \cdot 3 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 4x + \cancel{6y} = 14 \\ 9x - \cancel{6y} = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 13x &= 26 \quad \| : 13 \\ x &= 2 \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + 3y &= 7 \\ 3y &= 3 \quad \| : 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Leikkauspiste on $(2, 1)$.</u> 1p (2p)

b) Muodostetaan tehtävänannon mukainen yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{x}}{2} \quad \| \cdot 2, \quad x \geq 0 \\ 2x &= \sqrt{x} \quad \| (\ )^2, \quad 2x \geq 0 \text{ ja } \sqrt{x} \geq 0 \\ 4x^2 &= x \quad \text{1p (3p)} \\ 4x^2 - x &= 0 \\ x(4x - 1) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } 4x - 1 &= 0 \\ 4x &= 1 \quad \| : 4 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vastaus: <u>Luvut ovat 0 ja $\frac{1}{4}$.</u> 1p (4p) c)

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right) + \ln 3 + 2\ln x \\
&= \ln\left(\frac{1}{3x^2}\cdot 3\right) + \ln x^2 \\
&= \ln\left(\frac{1}{x^2}\cdot x^2\right) \qquad \text{1p (5p)} \\
&= \ln 1 \\
&= \underline{\underline{0}} \qquad \text{1p (6p)}
\end{aligned}
$$

3. a) Pekka aloittaa kuumeen mittaamisen ajanhetkellä $t = 0$. Pekan käyttämän mittarin lukema $f(t)$ hetkellä t minuuttia saadaan kaavasta $f(t) = 38 - 2e^{-0,6t}$ celsiusastetta. Kuinka kauan mittausta pitää jatkaa, jotta tulos poikkeaa enintään asteen kymmenesosan arvosta 38,0 celsiusastetta? Anna vastaus minuutin tarkkuudella.

   b) Määritä lämpötilan muutosnopeus $f'(3)$. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu.

TAPA 1

a) Tutkitaan, millä t:n arvoilla $f(t)$ poikkeaa arvosta 38 enintään 0,1.

$$\begin{aligned}
|f(t) - 38| &\leq 0{,}1 && \text{1p} \\
|38 - 2e^{-0,6t} - 38| &\leq 0{,}1 \\
|-2e^{-0,6t}| &\leq 0{,}1 \\
2e^{-0,6t} &\leq 0{,}1 \quad \| :2 && \text{1p (2p)} \\
e^{-0,6t} &\leq 0{,}05 \quad \| \ln() \\
-0{,}6t &\leq \ln 0{,}05 \\
t &\geq \frac{\ln 0{,}05}{-0{,}6} \\
t &\geq 4{,}992\ldots
\end{aligned}$$

Ensimmäinen tasaminuutti, jolla poikkeama on enintään 0,1 on 5 minuuttia.

Vastaus: Kysytty aika on 5 minuuttia. 1p (3p)

b)

$$f'(t) = -2 \cdot (-0{,}6)e^{-0,6t} = 1{,}2e^{-0,6t} \quad \text{2p (5p)}$$
$$f'(3) = (-2 \cdot (-0{,}6)e^{-0,6\cdot 3} =)1{,}2e^{-0,6\cdot 3} = 0{,}198\ldots \approx 0{,}2\,^\circ\text{C/min}$$

Vastaus: Kysytty muutosnopeus on 0,2 °C/min. 1p (6p)

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

a) Alussa mittarin lukema on

$$f(0) = 38 - 2e^{-0{,}6\cdot 0} = 36.$$

Edelleen

$$f'(t) = -2 \cdot (-0{,}6) \cdot e^{-0{,}6t} = 1{,}2e^{-0{,}6t} > 0,$$

joten f on kasvava. Tutkitaan, millä t:n arvolla f saavuttaa arvon $38 - 0{,}1$. Se on ensimmäinen hetki, jolloin poikkeama on enintään 0,1.

$$\begin{aligned} f(t) &\geq 38 - 0{,}1 \\ \cancel{38} - 2e^{-0{,}6t} &\geq \cancel{38} - 0{,}1 \quad \| : (-2) \quad \text{1p} \\ e^{-0{,}6t} &\leq 0{,}05 \quad \| \ln \quad \text{1p (2p)} \\ -0{,}6t &\leq \ln 0{,}05 \quad \| : (-0{,}6) \\ t &\geq \frac{\ln 0{,}05}{-0{,}6} \\ t &\geq 4{,}992\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Ensimmäinen tasaminuutti, joka toteuttaa ehdon (1) on 5.

$$f(5) = 38 - 2e^{-0{,}6\cdot 5} = 37{,}9004,$$

joka poikkeaa arvosta 38 vähemmän kuin 0,1.

Vastaus: Kysytty aika on 5 minuuttia. 1p (3p)

b) a-kohdan mukaan $f'(t) = 1{,}2e^{-0{,}6t}$.

$$f'(3) = 1{,}2e^{-0{,}6\cdot 3} = 0{,}198\ldots \approx 0{,}2\,°\text{C/min}$$

Vastaus: Kysytty muutosnopeus on 0,2 °C/min. 3p (6p)

4. Paraabelin $y = x^2$ jokaista pistettä siirretään vektorin $\bar{v}$ verran. Määritä näin syntyvän käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$, kun

a) $\bar{v} = 2\bar{j}$
b) $\bar{v} = 3\bar{i}$
c) $\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.

Ratkaisu. $y = x^2$ kuvaajan siirto vektorin $\bar{v}$ verran.

a) $\bar{v} = 2\bar{j}$
Siten jokainen käyrän $y = f(x)$ piste on kaksi yksikköä ylempänä kuin paraabelin $y = x^2$ vastaava piste. Siis
1p

$$y = f(x) = x^2 + 2.$$

Vastaus: $\underline{\underline{y = x^2 + 2.}}$ 1p (2p)

b) $\bar{v} = 3\bar{i}$
Nyt jokainen käyrän $y = f(x)$ piste on kolme yksikköä oikealla paraabelin $y = x^2$ vastaaviin pisteisiin nähden. Merkitään
1p (3p)

$$g(x) = x^2.$$

Siten

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x-3) \\ f(x) &= (x-3)^2 \\ f(x) &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

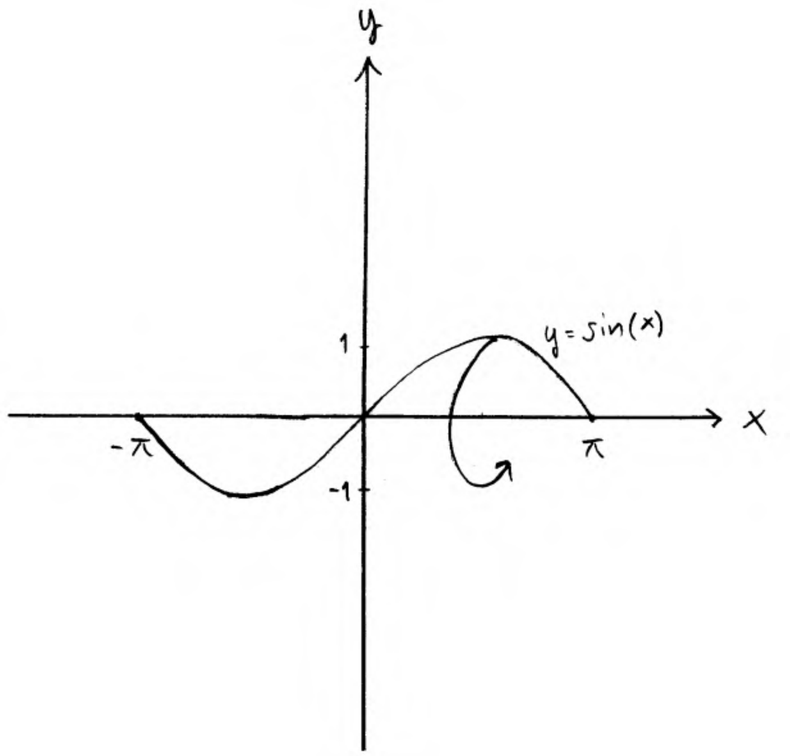
Vastaus: $\underline{\underline{y = x^2 - 6x + 9}}$ 1p (4p)

c) $\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$
Nyt paraabeli $y = x^2$ on siirtynyt kaksi ylös ja kolme oikealle. Siirtämällä b-kohdan paraabelia 2 yksikköä ylöspäin saadaan tällainen paraabeli, eli 1p (5p)

$$\begin{aligned} y &= (x-3)^2 + 2 \\ y &= x^2 - 6x + 9 + 2 \\ &\underline{\underline{y = x^2 - 6x + 11}} \end{aligned}$$ 1p (6p)

5. Käyrä $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske näin syntyvän tiimalasia muistuttavan kappaleen tilavuuden tarkka arvo.

Ratkaisu.



Syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx. \quad \text{1p} \tag{1}$$

Muokataan $\sin^2(x)$ helpommin integroitavaan muotoon. Kaksinkertaisen kulman kaavalla

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - \cos(2x) &= 1 - \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ 1 - \cos(2x) &= 2\sin^2(x) \quad \| : 2 \\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x). \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä tilavuuden lausekkeeseen (1).

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx \quad \text{2p (3p)} \\
&= \pi \Big/_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) \quad \text{2p (5p)} \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\right) - \left(\frac{1}{2}(-\pi) - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(-2\pi)}_{=0}\right)\right] \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) \\
&= \pi^2.
\end{aligned}
$$

Vastaus: Pyörähdyskappaleen tilavuus on π^2. 1p (6p)

6. Tarkastellaan paraabelin kaarta $y = 3x - 5x^2$, kun $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Mikä kaaren piste on kauimpana origosta? Perustele vastauksesi myös muulla tavalla kuin laskimella, esim. derivaatan avulla.

Ratkaisu.

$$y = 3x - 5x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Paraabelin pisteen (x, y) etäisyys origosta on

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

Sijoitetaan $y = 3x - 5x^2$ yhtälöön (1).

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (3x - 5x^2)^2}$$

$d(x) \geq 0$ kaikilla x:n reaaliarvoilla. Täten etsittäessä d:n suurinta arvoa voidaan tutkia funktiota

$$\begin{aligned} f(x) &= d(x)^2 \\ f(x) &= x^2 + (3x - 5x^2)^2 \\ f(x) &= x^2 + 9x^2 - 30x^3 + 25x^4 \\ f(x) &= 25x^4 - 30x^3 + 10x^2. \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Etsitään $f(x)$:n suurin arvo välillä $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ derivaatan avulla.

$$f'(x) = 100x^3 - 90x^2 + 20x. \qquad \text{1p (2p)}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 100x^3 - 90x^2 + 20x &= 0 \quad \| : 10 \\ x \cdot (10x^2 - 9x + 2) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } 10x^2 - 9x + 2 &= 0 \quad \text{1p (3p)} \end{aligned}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2}}{2 \cdot 10}$$
$$x = \frac{9 \pm 1}{20}$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{2}{5} \quad \text{1p (4p)}$$

Lasketaan f:n arvot derivaatan nollakohdissa ja välin $[0, \frac{1}{2}]$ päätepisteissä.

$$f(0) = 25 \cdot 0^4 - 30 \cdot 0^3 + 10 \cdot 0^2 = 0$$
$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{25}(= 0{,}32) \leftarrow \text{suurin arvo}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}(= 0{,}3125) \qquad \text{1p (5p)}$$

Lasketaan paraabelin piste, kun $x = \frac{2}{5}$.

$$y = 3 \cdot \frac{2}{5} - 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

Vastaus: Piste $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ on kauimpana origosta. 1p (6p)

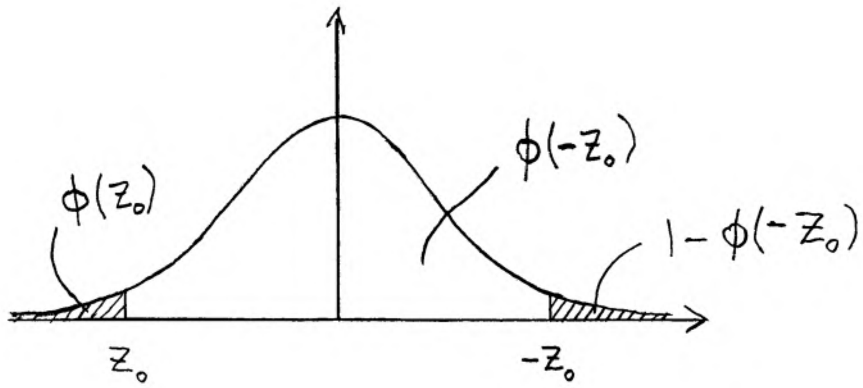
7. Pakkausautomaatti täyttää kahvipaketteja. Kahvin määrä on normaalijakautunut, keskihajonta on 10 grammaa, mutta odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää odotusarvoksi, kun tavoitteena on valmistaa paketteja, joista enintään 2,0 % sisältää alle 500 grammaa kahvia? Anna vastaus gramman tarkkuudella.

Ratkaisu. Kahvin määrä $X(g) \sim N(\mu, 10)$.
Vaaditaan, että

$$P(X < 500) = 0{,}02$$
$$P(Z < \frac{500-\mu}{10}) = 0{,}02.$$

Merkitään $Z_0 = \frac{500-\mu}{10}$, jolloin 1p

$$\phi(Z_0) = 0{,}02$$



$$1 - \phi(-Z_0) = 0{,}02$$
$$\phi(-Z_0) = 0{,}98$$ 2p (3p)

Normaalijakauman kertymäfunktion taulukosta nähdään, että

$$-Z_0 = 2{,}05$$
$$\frac{-500+\mu}{10} = 2{,}05$$ 1p (4p)
$$\mu = 20{,}5 + 500$$
$$\mu = 520{,}5 \approx 521\ (g)^*$$ 1p (5p)

Vastaus: Odotusarvoksi on säädettävä 521 g. 1p (6p)

*Huomautus lukijalle! Pyöristys pitää jo siksikin tehdä ylöspäin, koska vaatimuksena oli, ettei 2,0 % ylity.

8. Tarkastellaan lukujonoja (a_n) ja (b_n), joiden kaikki termit a_n ja b_n, $n = 1, 2, \ldots$, ovat positiivisia.

   a) Oletetaan, että jono (a_n) on geometrinen. Osoita, että $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ kaikilla $n = 2, 3, \ldots$.

   b) Oletetaan, että $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ kaikilla $n = 2, 3, \ldots$. Osoita, että jono (b_n) on geometrinen.

Ratkaisu.

a) (a_n) on geometrinen, eli peräkkäisten termien suhde on vakio. Olkoon $n = 2, 3, \ldots$. Nyt siis

1p

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \| \cdot (a_n \cdot a_{n+1})$$

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}, \quad \text{1p (2p)}$$

Nyt koska termit ovat positiivisia,

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}. \quad \text{1p (3p)}$$

□

b) Oletetaan, että kaikilla $n = 2, 3, \ldots$ pätee $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. Täten

1p (4p)

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} \quad \| : b_{n+1} \quad (> 0)$$

$$\frac{b_n^2}{b_{n+1}} = b_{n-1} \quad \| : b_n \quad (> 0)$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_{n-1}}{b_n}. \quad \text{1p (5p)}$$

Täten peräkkäisten termien suhde on vakio kaikilla $n = 2, 3, \ldots$, joten jono (b_n) on geometrinen. 1p (6p)

□

9. Oheisessa kuvassa on rakenteilla arkkitehti Eero Saarisen suunnittelema Gateway Arch Saint Louisissa USA:ssa. Se rakennettiin vuosina 1963–1965. Kaaren muotoa kuvaa yhtälö

$$y = -39f(\frac{x}{39}) + 231.$$

Tässä $f(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, x-akseli kulkee maan pinnalla kaaren tyvien kautta ja y-akseli on kaaren symmetria-akseli. Mittayksikkönä on metri.

a) Määritä kaaren korkeus metrin tarkkuudella.
b) Määritä kaaren leveys metrin tarkkuudella.
c) Kuinka suuressa terävässä kulmassa kaari kohtaa maanpinnan? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

<http://rememberingletters.wordpress.com/2012/01/12/gateway-arch/>. Luettu 24.9.2014.

Ratkaisu.

$\boxed{\text{Tapa 1}}$

a) Huomataan, että

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-(-t)}\right) = f(-t),$$

eli $f(t)$ on parillinen funktio. Täten myös funktio

$$h(x) = -39f\left(\frac{x}{39}\right) + 231$$

on parillinen ja kaaren huippu on kohdassa $x = 0$. Lasketaan korkeus

1p

$$\begin{aligned} h(0) &= -39f(0) + 231 \\ &= -39 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{0}{39}} + e^{-\frac{0}{39}}\right) + 231 \\ &= 192 \quad (\text{m}). \end{aligned}$$

Vastaus: Kaari on 192 metriä korkea. 1p (2p)

b) Ratkaistaan, missä kaari kohtaa maanpinnan.

Huom! Tämän yhtälön voi ratkaista laskimella ja säästää paljon aikaa.

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ -39f\left(\frac{x}{39}\right)+231 &= 0 \quad \| :(-39) \\ f\left(\frac{x}{39}\right)-\frac{231}{39} &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}}+e^{-\frac{x}{39}}\right)-\frac{77}{13} &= 0 \\ e^{\frac{x}{39}}+e^{-\frac{x}{39}}-2\cdot\frac{77}{13} &= 0 \quad \| \cdot e^{\frac{x}{39}} \\ \left(e^{\frac{x}{39}}\right)^2-2\cdot\frac{77}{13}e^{\frac{x}{39}}+1 &= 0 \end{aligned}$$

Merkitään $e^{\frac{x}{39}}=z$.

$$z^2-2\cdot\frac{77}{13}z+1=0 \qquad \text{1p (3p)}$$

Toisen asteen ratkaisukaavalla saadaan:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\cdot\frac{77}{13}\pm\sqrt{\left(-2\cdot\frac{77}{13}\right)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \\ e^{\frac{x}{39}} &= \frac{77}{13}\pm\sqrt{\left(\frac{77}{13}\right)^2-1} \\ \frac{x}{39} &= \ln\left(\frac{77}{13}\pm\sqrt{\left(\frac{77}{13}\right)^2-1}\right) \\ x &= 39\ln\left(\frac{77}{13}\pm\sqrt{\left(\frac{77}{13}\right)^2-1}\right) \\ x &= -96{,}1271\ldots \quad \text{tai} \quad x=96{,}1271\ldots \end{aligned}$$

Täten kaaren leveys on

$$\begin{aligned} 96{,}1271\ldots-(-96{,}1271\ldots) &= 192{,}2543\ldots \\ &\approx 192\,(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

Vastaus: Kaaren leveys on 192 m. 1p (4p)

c) Lasketaan funktion $h(x)$ derivaatta kohdassa $x = -96{,}1271\ldots$, eli kun kaari kohtaa maanpinnan.

$$\begin{aligned} h'(x) &= -f'\left(\frac{x}{39}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}} - e^{-\frac{x}{39}}\right) \quad \text{1p (5p)} \\ h'(-96{,}1271\ldots) &= -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{-96{,}1271\ldots}{39}} - e^{\frac{96{,}1271\ldots}{39}}\right) \\ &= 5{,}8380\ldots \end{aligned}$$

Kaaren ja maan välinen terävä kulma ϕ on kuvaajan $y = h(x)$ tangentin suuntakulma näissä pisteissä, joten

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= h'(-96{,}1271\ldots) \\ \tan(\phi) &= 5{,}8380\ldots \\ \phi &= 80{,}2801\ldots^\circ \\ \phi &\approx 80^\circ. \end{aligned}$$

Vastaus: Kaaren ja maanpinnan välinen terävä kulma on 80°. 1p (6p)

TAPA 2

a)

$$y = h(x) = -39f\left(\frac{x}{39}\right) + 231.$$

Derivoidaan $f(t)$.

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right).$$

Kaaren korkeimmassa pisteessä $h'(x) = 0$. Derivoidaan:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\cancel{39} \cdot f'\left(\frac{x}{39}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{39}} \\ &= -f'\left(\frac{x}{39}\right). \end{aligned}$$

Ratkaistaan $h'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-f\left(\frac{x}{39}\right) &= 0 \\
-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}} - e^{-\frac{x}{39}}\right) &= 0 \quad \| \cdot (-2) \\
e^{\frac{x}{39}} - e^{-\frac{x}{39}} &= 0 \\
e^{\frac{x}{39}} &= e^{-\frac{x}{39}} \quad \| \cdot e^{\frac{x}{39}} \\
e^{\frac{2x}{39}} &= 1 \\
\frac{2x}{39} &= 0 \\
x &= 0. \qquad \text{1p}
\end{aligned}
$$

Lasketaan korkeus.

$$
\begin{aligned}
h(0) &= -39f(0) + 231 \\
&= -39 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{0}{39}} + e^{-\frac{0}{39}}\right) + 231 \\
&= 192 \quad (\mathrm{m}).
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kaari on 192 metriä korkea. 1p (2p)

b) Tehdään samoin kuin tavassa 1. 2p (4p)

c) Lasketaan funktion $h(x)$ derivaatta kohdissa $-96{,}1271\ldots$ ja $96{,}1271\ldots$, eli kun kaari kohtaa maanpinnan.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= -f'\left(\frac{x}{39}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}} - e^{-\frac{x}{39}}\right) \qquad \text{1p (5p)} \\
h'(-96{,}1271\ldots) &= -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{-96{,}1271\ldots}{39}} - e^{\frac{96{,}1271\ldots}{39}}\right) \\
&= 5{,}8380\ldots \\
h'(96{,}1271\ldots) &= -5{,}8380\ldots
\end{aligned}
$$

Kaaren ja maan välinen terävä kulma ϕ on kuvaajan $y = h(x)$ tangentin suuntakulma näissä pisteissä, joten

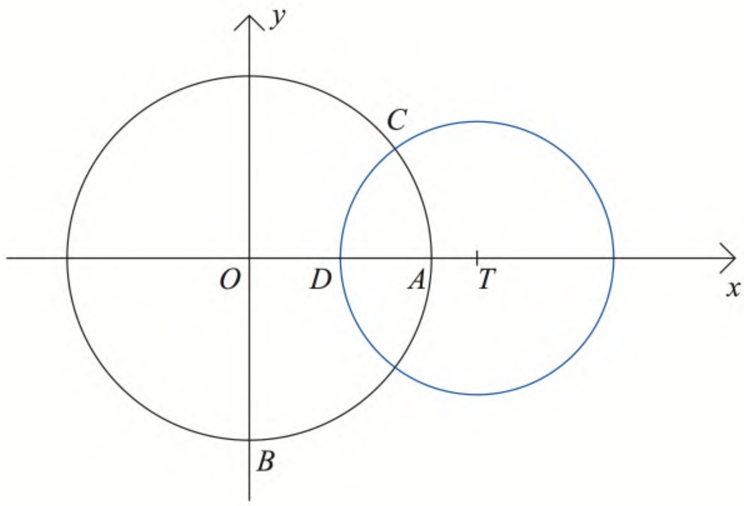
$$
\begin{aligned}
\tan(\phi) &= h'(-96{,}1271\ldots) \\
\tan(\phi) &= 5{,}8380\ldots \\
\phi &= 80{,}2801\ldots^\circ \\
\phi &\approx 80^\circ.
\end{aligned}
$$

Derivaatan suuruuden itseisarvo on sama molemmissa pisteissä, joten kulma on niissä sama.

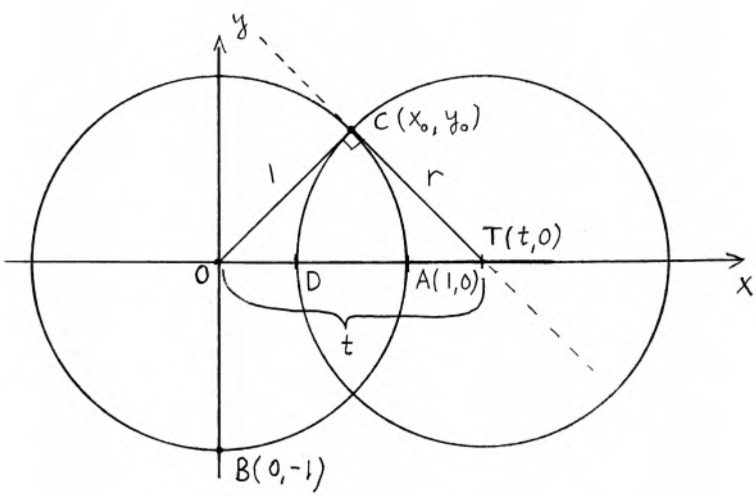
Vastaus: Kaaren ja maanpinnan välinen terävä kulma on 80°. 1p (6p)

10. Olkoon $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ ja $t > 1$. Piste $T = (t, 0)$ keskipisteenä piirretään ympyrä, joka leikkaa yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kohtisuorasti kuvion mukaisessa pisteessä C sekä janan OA pisteessä D.

a) Määritä pisteen C koordinaatit parametrin t avulla lausuttuna.
b) Osoita, että pisteet B, D ja C ovat samalla suoralla.



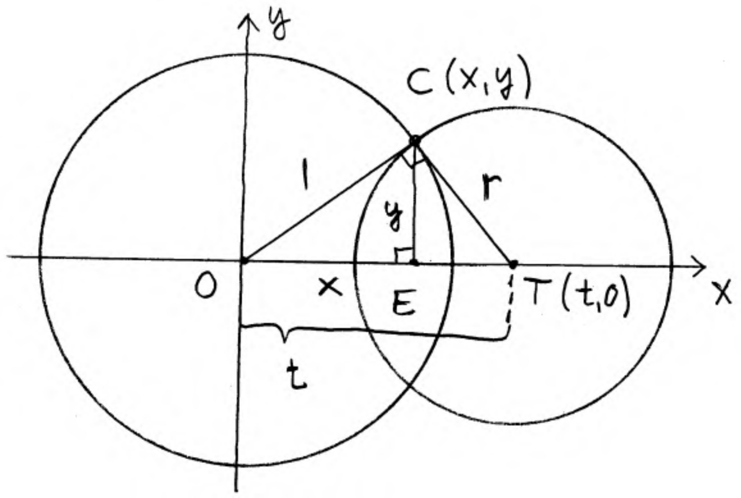
Ratkaisu. Merkitään pisteen C koordinaatteja x_0:lla ja y_0:lla, sekä yksikköympyrää leikkaavan ympyrän sädettä r:llä. Saadaan kuva



Kolmio OTC on suorakulmainen, koska ympyrät leikkaavat kohtisuorasti, jolloin yksikköympyrälle pisteeseen C piirretty tangentti kulkee ympyrän T keskipisteen kautta, eli ympyrän T säde TC on osa tätä tangenttia. Ja sama toisin päin ympyröiden T ja O suhteen.

a)

TAPA 1



ΔTOC on yhtenevä ΔCOE kanssa (kk). Vastinsivujen suhteet ovat samat, joten

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{t}$$
$$x = \frac{1}{t} \quad \text{1p} \tag{1}$$

Yksikköympyrälle pätee

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \underset{(-)}{\pm} \sqrt{1 - x^2} \quad \| \text{ sij. } (1) \qquad \text{1p (2p)}$$
$$y = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$$

Vastaus: $\underline{\underline{C = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right)}}$ 1p (3p)

Tapa 2

Pythagoraan lauseesta kolmiolle OTC seuraa

$$\begin{aligned} r^2 + 1^2 &= t^2 \\ r &= \sqrt{t^2 - 1} \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Lasketaan kolmion OTC pinta-ala valiten kanta ja korkeus kahdella eri tavalla ja merkitään alat yhtä suuriksi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t \cdot y &= \frac{1}{2}r \cdot 1 \quad \Big\| \cdot \tfrac{2}{t} \\ y &= \frac{r}{t} \\ y &= \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} \quad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

Pythagoraan lauseesta kolmiolle OEC seuraa

$$x^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{t^2 - t^2 + 1}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

Siten $x = \underset{(-)}{+} \frac{1}{t}$ ja $\underline{\underline{C = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right)}}$ 1p (3p)

TAPA 3

Ratkaistaan y_0 yksikköympyrän yhtälöstä

$$x_0^2 + y_0^2 = 1$$
$$y_0 = \underset{(-)}{+} \sqrt{1 - x_0^2}\ {}^{*} \quad \text{1p}$$

Piste $C = (x_0, \sqrt{1 - x_0^2})$, joten ympyrän T säteen neliö on

$$\begin{aligned} r^2 &= |TC|^2 \\ r^2 &= (x_0 - t)^2 + (\sqrt{1 - x_0^2} - 0)^2 \\ r^2 &= x_0^2 - 2tx_0 + t^2 + 1 - x_0^2 \\ r^2 &= t^2 - 2tx_0 + 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Pythagoraan lauseella kolmiosta OTC

$$t^2 = 1^2 + r^2$$

Sijoitetaan (2), saadaan

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 + t^2 - 2tx_0 + 1 \\ 2tx_0 &= 2 \quad \| : (2t) \\ x_0 &= \frac{1}{t} \qquad \text{1p (2p)} \end{aligned} \tag{3}$$

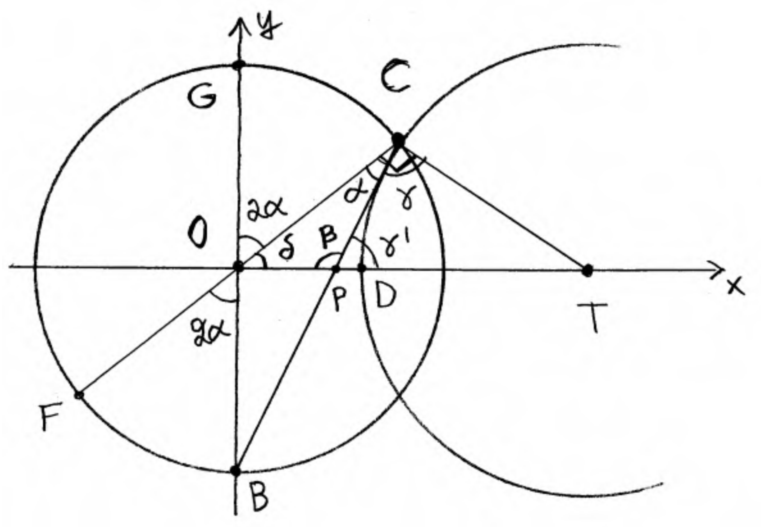
Saadaan

$$\underline{\underline{C = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right)}} \quad \text{1p (3p)}$$

*Symmetrian vuoksi tarkastellaan vain x-akselin yläpuolta.

b)

TAPA 1



Merkitään P:llä suoran BC ja x-akselin leikkauspistettä. Osoitetaan, että P ja D ovat sama piste.

Merkitään $\sphericalangle BCF = \alpha$. $\sphericalangle BCF$ on kehäkulma, joten samaa kaarta vastaava keskuskulma $\sphericalangle BOF = 2\alpha$ ja sen ristikulma $\sphericalangle GOC = \sphericalangle BOF = 2\alpha$. Edelleen $\delta = 90° - 2\alpha$, joten

$$\beta = 180° - \delta - \alpha = 180° - 90° + 2\alpha - \alpha = 90° + \alpha.$$ 1p (4p)

$\sphericalangle TCO = 90°$, joten $\gamma = 90° - \alpha$. Toisaalta $\gamma' = 180° - \beta = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Koska $\gamma = \gamma'$, ΔTCP on tasakylkinen, joten $PT = CT$.

CT ja DT ovat saman ympyrän säde, joten $DT = CT = PT$. Näin ollen P ja D ovat sama piste. P on suoralla BC, joten myös D on samalla suoralla B:n ja C:n kanssa. 2p (6p) □

TAPA 2

Pythagoraan lauseesta seuraa kolmiolle OTC

$$r^2 = t^2 - 1^2$$
$$r = \underset{(-)}{+} \sqrt{t^2 - 1}$$

Pisteen D koordinaatit

$$D = (t - r, 0)$$
$$D = (t - \sqrt{t^2 - 1}, 0)$$ 1p (4p)

Pisteet B, D ja C ovat samalla suoralla, jos pisteiden B ja D sekä B ja C avulla lasketut kulmakertoimet k_{BD} ja k_{BC} ovat yhtäsuuret.

$$\begin{aligned}
k_{BD} &= \frac{0-(-1)}{t-\sqrt{t^2-1}-0} \\
&= {}^{t+\sqrt{t^2-1})}\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}{}^{*} \\
&= \frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t^2-t^2+1} \\
&= t+\sqrt{t^2-1} \qquad \text{1p (5p)} \\
k_{BC} &= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}-(-1)}{\frac{1}{t}-0} \\
&= t\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2}}+t \\
&= \sqrt{t^2-1}+t \\
&= k_{BD}
\end{aligned}$$

Siten pisteet B, D ja C ovat samalla suoralla. 1p (6p) □

[*] $t-\sqrt{t^2-1}\neq 0$, koska $t^2\neq t^2-1$ ja siten $t\neq\sqrt{t^2-1}$

11. a) Osoita, että funktio $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ on aidosti kasvava, kun $x \in \mathbb{R}$.
b) Määritä funktion $f(x)$ raja-arvo, kun x kasvaa rajatta.
c) Päteekö kaikilla $x \geq 10$ epäyhtälö $f(x) \geq 0{,}999$?

Ratkaisu.

a) Derivoidaan $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x + \cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{2x}}}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2}. \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Eksponenttifunktio on positiivinen, joten osoittaja ja nimittäjä ovat positiiviset, eli $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten funktio on aidosti kasvava. 1p (2p) □

b)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \overset{(e^x}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{1}{0+1} = \underline{\underline{1}}. \quad \text{1p (4p)}$$

1p (3p)

c)

TAPA 1

Laskimella

$$f(10) = \frac{e^{10}}{1+e^{10}} = 0{,}99995\ldots > 0{,}999. \quad \text{1p (5p)}$$

Nyt koska $f(x)$ on aidosti kasvava, $\underline{\underline{\text{pätee } f(x) \geq 0{,}999 \text{ kaikilla } x \geq 10.}}$ 1p (6p)

TAPA 2

Tarkastellaan epäyhtälöä

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0{,}999 && (1) \\ \frac{e^x}{1+e^x} &\geq 0{,}999 \\ \frac{1}{e^{-x}+1} &\geq 0{,}999 \quad \| \cdot (e^{-x}+1) \\ 1 &\geq 0{,}999e^{-x} + 0{,}999 \\ 0{,}999e^{-x} &\leq 0{,}001 \\ e^{-x} &\leq \frac{0{,}001}{0{,}999} \quad \text{1p (5p)} && (2) \end{aligned}$$

Huomataan, että

$$e^{-10} < 2^{-10} = \frac{1}{1024} = \frac{0{,}001}{1{,}024} < \frac{0{,}001}{0{,}999}.$$

Täten yhtälön (2) nojalla $x = 10$ kuuluu epäyhtälön (1) ratkaisuun, ja koska $f(x)$ on aidosti kasvava, $\underline{\underline{\text{pätee epäyhtälö (1) kaikilla } x \geq 10.}}$ 1p (6p)

12. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko ja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ luonnollisten lukujen joukko. Onko seuraava väite tosi vai epätosi? Perustele vastauksesi.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$
b) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \leq y$
c) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$

Ratkaisu.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$
Väite on siis, että jokaista reaalilukua x kohti on olemassa sellainen reaaliluku y, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin x. Tämä pitää paikkansa, sillä annettua reaalilukua x kohti voidaan valita $y = x$, jolloin $x \leq y$.

Vastaus: Väite on tosi. 2p

b) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \leq y$
Väittämän nojalla olisi siis olemassa sellainen reaaliluku y, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin mikä tahansa muu reaaliluku. Tämä ei ole totta, sillä jos $y \in \mathbb{R}$ ja valitaan $x = y + 1$, niin tällöin $x \in \mathbb{R}$ mutta epäyhtälö $x \leq y$ ei päde.

Vastaus: Väite on epätosi. 2p (4p)

c) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$
Väite on tosi, sillä 0 on pienin luonnollinen luku. Näin ollen kaikille luonnollisille luvuille y pätee $0 \leq y$.

Vastaus: Väite on tosi. 2p (6p)

13. Tarkastellaan yhtälöä $x^5 - x = 1$.

a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $1 \leq x \leq 2$.

b) Määritä a-kohdan ratkaisulle Newtonin menetelmän mukainen likiarvo x_4 käyttämällä alkuarvoa $x_0 = 1$. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} x^5 - x &= 1 \\ x^5 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Merkitään $f(x) = x^5 - x - 1$, jolloin f:n nollakohdat ovat tarkastellun yhtälön ratkaisuja.

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

a) Derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 5x^4 - 1 &= 0 \\ 5x^4 &= 1 \\ x^4 &= \frac{1}{5} \\ x &= \pm\sqrt[4]{\frac{1}{5}} (= \pm 0{,}6687\ldots) \end{aligned}$$

Derivaattafunktiolla $f'(x)$ ei siis ole nollakohtia välillä $1 \leq x \leq 2$, joten $f(x)$ on ko. välillä aidosti monotoninen. 1p

Toisaalta

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) &= 2^5 - 2 - 1 = 29 > 0, \quad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

joten polynomifunktiona jatkuvalla funktiolla $f(x)$ on Bolzanon lauseen mukaisesti ainakin yksi nollakohta välillä $1 < x < 2$. Koska $f(x)$ on siis lisäksi monotoninen, on sillä täsmälleen yksi nollakohta ko. välillä ja siten yhtälöllä $x^5 - x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $1 \leq x \leq 2$. 1p (3p) □

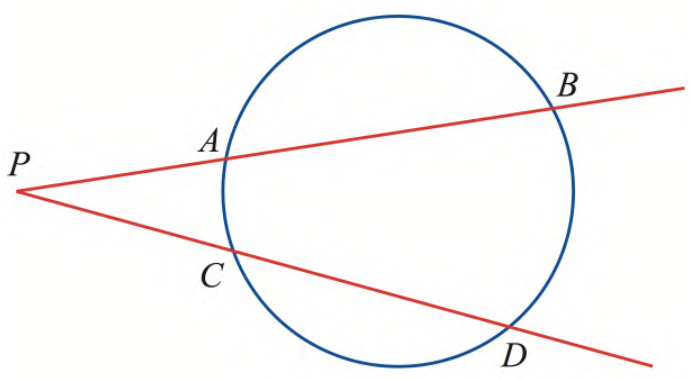
b)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^5 - x_n - 1}{5x_n^4 - 1} \quad \text{2p (5p)}\\
x_1 &= 1 - \frac{1^5 - 1 - 1}{5 \cdot 1^4 - 1} = \frac{5}{4}\\
x_2 &= \frac{5}{4} - \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^5 - \frac{5}{4} - 1}{5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 - 1} = 1{,}1784\ldots\\
x_3 &= 1{,}1784\ldots - \frac{1{,}1784\ldots^5 - 1{,}1784\ldots - 1}{5 \cdot 1{,}1784\ldots^4 - 1} = 1{,}1675\ldots\\
x_4 &= 1{,}1675\ldots - \frac{1{,}1675\ldots^5 - 1{,}1675\ldots - 1}{5 \cdot 1{,}1675\ldots^4 - 1}\\
&= 1{,}167304\ldots\\
&\approx 1{,}167
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{x_4 = 1{,}167}}$ 1p (6p)

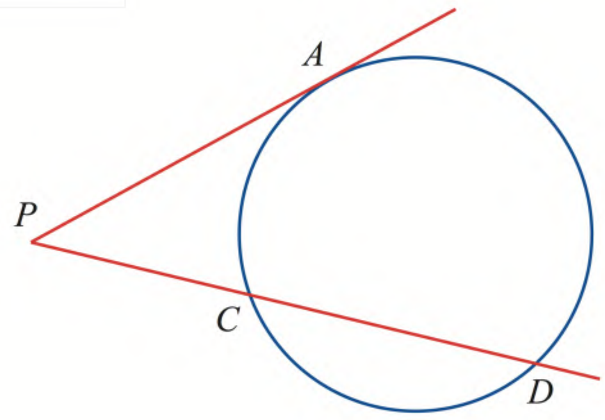
*14. Tarkastellaan ympyrää ja sen ulkopuolella olevaa pistettä P.

a) Pisteestä P piirretään kaksi suoraa, jotka leikkaavat ympyrän neljässä eri pisteessä A, B, C ja D kuvion mukaisesti. Osoita, että kolmiot PCB ja PAD ovat yhdenmuotoiset. (2 p.)

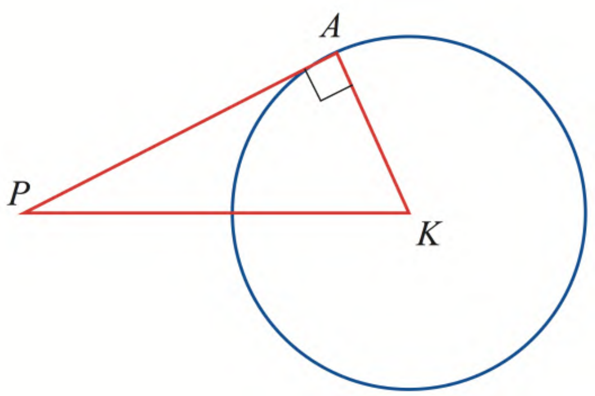


b) Osoita, että $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. (2 p.)

c) Erikoistapauksessa $A = B$ toinen suorista sivuaa ympyrää. Osoita, että tällöin pätee $(PA)^2 = PC \cdot PD$. (2 p.)

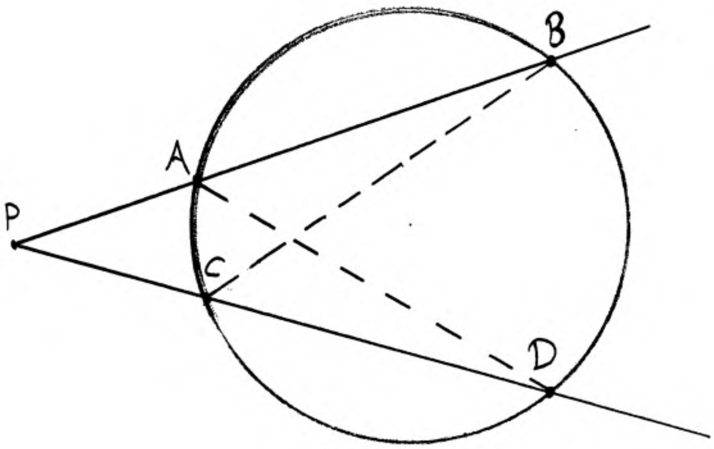


d) Todista edellisten kohtien avulla Pythagoraan lause tutkimalla alla olevan kuvion kolmiota, jonka kärki K on ympyrän keskipisteessä ja kärki A on ympyrän kehällä. (3 p.)



Ratkaisu.

a)



Kolmioilla PCB ja PAD on yhteinen kulma BPD. Lisäksi kulmat CDA ja ABC ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ja täten kehäkulmalauseen nojalla yhtäsuuret. Näin ollen kolmioilla PCB ja PAD on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoiset. 2p □

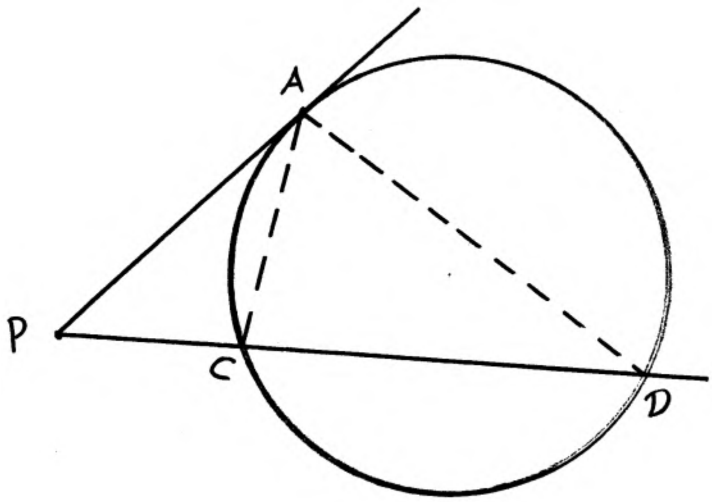
b) a-kohdan nojalla kolmiot PAD ja PCB ovat yhdenmuotoiset, joten vastinsivujen suhteet ovat samat; saadaan

1p (3p)

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \quad \| \cdot (PC \cdot PB)$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$ 1p (4p) □

c)



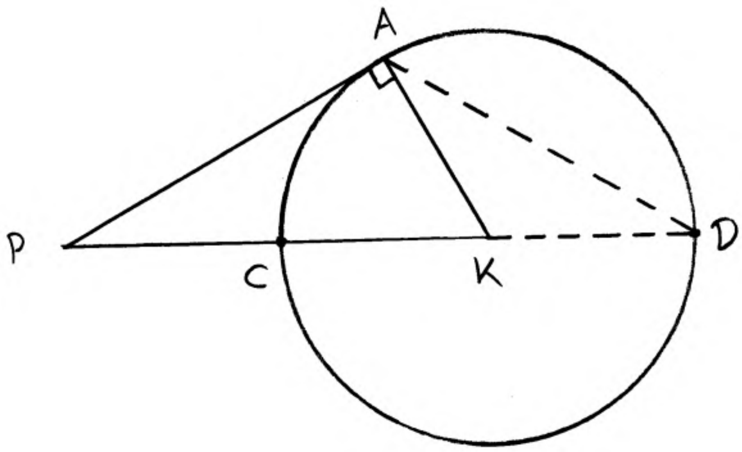
Kolmioilla PAD ja PCA on edelleen yksi yhteinen kulma APD. Kehäkulmalauseen nojalla samaa kaarta vastaavat kehäkulmat PAC ja PDA ovat yhtäsuuret, joten kolmioilla PAD ja PCA on kaksi yhtäsuurta kulmaa, ja ne ovat

täten yhdenmuotoiset. Näin ollen vastinsivujen suhteet ovat samat, eli
1p (5p)

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PA} \quad \| \cdot (PA \cdot PD) \tag{1}$$

$$(PA)^2 = PC \cdot PD \quad \text{1p (6p)} \tag{2}$$

d)



Huomataan, että $CK = KD = AK$, koska näistä jokainen on ympyrän säde. Näin ollen

$$PC = PK - CK = PK - AK$$
$$PD = PK + KD = PK + AK. \quad \text{1p (7p)}$$

Sijoitetaan nämä c-kohdassa johdettuun yhtälöön

$$(PA)^2 = PC \cdot PD \quad \text{1p (8p)}$$
$$(PA)^2 = (PK - AK) \cdot (PK + AK)$$
$$(PA)^2 = (PK)^2 - (AK)^2$$
$$(PA)^2 + (AK)^2 = (PK)^2,$$

mikä on Pythagoraan lauseen väittämä. 1p (9p) □

*15. a) Osoita, että $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ kaikille reaaliluvuille x ja y. (2 p.)

b) Olkoot $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ reaalilukuja. Oletetaan, että $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} > 0$, $B = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} > 0$, ja merkitään lisäksi $x_k = \dfrac{a_k}{A}$ ja $y_k = \dfrac{b_k}{B}$, kun $k = 1, \ldots, n$. Osoita a-kohdan avulla, että $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq 1$. (4 p.)

c) Johda b-kohdan avulla *Cauchyn epäyhtälö*

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}. \text{ (3 p.)}$$

Ratkaisu.

a) Luvun neliö on aina positiivinen tai nolla, joten

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x-y)^2 \\ 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{1p} \\ 2xy &\leq x^2 + y^2 \quad \Big\| \cdot \tfrac{1}{2} \\ xy &\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \text{1p (2p)} \end{aligned}$$

$\square$

b)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \quad \text{1p (3p)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{A}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{A}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b_1}{B}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b_n}{B}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{A^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b_1^2 + \cdots + b_n^2}{B^2}\right) \end{aligned}$$

Sijoitetaan viimeiseen $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = A^2$ ja $b_1^2 + \cdots + b_n^2 = B^2$, saadaan

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{A^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{B^2} = 1. \quad \text{1p (4p)} \tag{1}$$

a-kohdan perusteella

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2) \quad \text{1p (5p)}$$

Edelleen tuloksen (1) mukaan oikea puoli on 1, joten

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq 1 \quad \text{1p (6p)}$$

$\square$

c) b-kohdan mukaan

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq 1$$

$$\frac{a_1b_1}{AB} + \cdots + \frac{a_nb_n}{AB} \leq 1 \quad \| \cdot AB \qquad \text{1p (7p)}$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq AB \qquad \text{1p (8p)}$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} \qquad \text{1p (9p)} \qquad \square$$