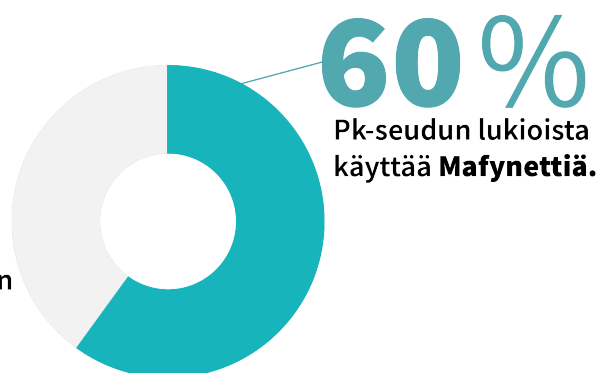
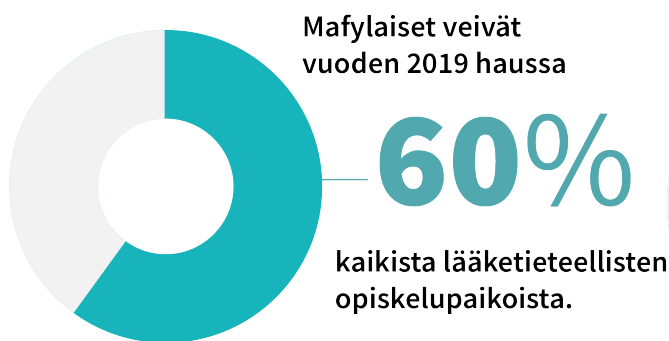




YO-MALLIVASTAUKSET
LYHYT MATEMATIIKKA
SYKSY 2019

Tiesitkö tämän?



60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös
lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana laadinnassa olivat Timo Kalinainen ja Katja Niemistö. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala, Viljami Suominen ja Matti Virolainen.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

KÄYTTÖEHDOT

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata osoitteesta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseillasi. **Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.**

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

<https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto>

Koetehtävät

[Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.](#)

Linkit malliratkaisuihin

Ratkaisu tehtävään 1	2
Ratkaisu tehtävään 2	5
Ratkaisu tehtävään 3	12
Ratkaisu tehtävään 4	14
Ratkaisu tehtävään 5	16
Ratkaisu tehtävään 6	18
Ratkaisu tehtävään 7	20
Ratkaisu tehtävään 8	22
Ratkaisu tehtävään 9.1	24
Ratkaisu tehtävään 9.2	26
Ratkaisu tehtävään 10	27
Ratkaisu tehtävään 11	29
Ratkaisu tehtävään 12	31
Ratkaisu tehtävään 13	35

1. Lukujonot (12 p.)

Alla on annettu eräiden lukujonojen yleisten termien lausekkeet. Kerro kunkin jonon kohdalla, onko jono aritmeettinen, geometrinen, kumpaakin vai ei kumpaakaan tyyppiä.

1.1. $a_n = 3 \cdot 2^n$ (2 p.)

1.2. $b_n = n \cdot 3^n$ (2 p.)

1.3. $c_n = 7^{n+1}$ (2 p.)

1.4. $d_n = 5$ (2 p.)

1.5. $e_n = 2019 - 1/n$ (2 p.)

1.6. $f_n = 3 - 9n$ (2 p.)

Ratkaisu.

1.1 geometrinen	2p
1.2 ei kumpikaan	2p(4p)
1.3 geometrinen	2p(6p)
1.4 kumpikin	2p(8p)
1.5 ei kumpikaan	2p(10p)
1.6 aritmeettinen	2p(12p)

Aritmeettisen jonon yleinen jäsen voidaan ilmoittaa muodossa $a_n = a_1 + (n - 1)d$, missä d on erotusluku. Geometrisen lukujonon yleinen jäsen voidaan ilmoittaa muodossa $a_n = a_1 q^{n-1}$, missä q on jonon suhdeluku. Jos lukujonon peräkkäisten jäsenien erotus ei ole vakio, lukujono ei ole aritmeettinen. Vastaavasti, jos lukujonon peräkkäisten jäsenien suhde ei ole vakio, lukujono ei ole geometrinen.

1.1

$$\begin{aligned}
 a_n &= 3 \cdot 2^n \\
 &= 3 \cdot 2^{n-1+1} \\
 &= 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^1 \\
 &= 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 \\
 &= 6 \cdot 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

Lukujono a_n on siis geometrinen.

1.2 Lasketaan lukujonon jäsenet $b_1, \dots, b_4$:

$$b_1 = 1 \cdot 3^1$$

$$= 3$$

$$b_2 = 2 \cdot 3^2$$

$$= 18$$

$$b_3 = 3 \cdot 3^3$$

$$= 81$$

$$b_4 = 4 \cdot 3^4$$

$$= 324$$

Jäsenten välinen erotus ei ole vakio, lukujono ei siis ole aritmeettinen. Lasketaan jäsenten väliset suhteet:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{81}{18} = 4,5$$

$$\frac{b_4}{b_3} = \frac{324}{81} = 4$$

Suhde ei ole vakio, joten lukujono b_n ei ole myöskään geometrinen.

1.3

$$c_n = 7^{n+1}$$

$$= 7^{n-1+2}$$

$$= 7^{n-1} \cdot 7^2$$

$$= 7^{n-1} \cdot 49$$

$$= 49 \cdot 7^{n-1}$$

Lukujono c_n on siis geometrinen.

1.4

$$d_n = 5$$

$$= 5 \cdot 1$$

$$= 5 \cdot 1^{n-1}$$

(millä tahansa n)

Lukujono d_n on siis geometrinen kun $q = 1$. Toisaalta myös

$$\begin{aligned} d_n &= 5 \\ &= 5 + 0 \\ &= 5 + 0 \cdot (n - 1) \quad (\text{millä tahansa } n) \end{aligned}$$

Lukujono d_n on siis myös aritmeettinen kun $d = 0$.

1.5 Lasketaan lukujonon jäsenet $e_1, \dots, e_4$:

$$\begin{aligned} e_1 &= 2019 - \frac{1}{1} \\ &= 2018 \\ e_2 &= 2019 - \frac{1}{2} \\ &= 2018,5 \\ e_3 &= 2019 - \frac{1}{3} \\ &= 2018,666\dots \\ e_4 &= 2019 - \frac{1}{4} \\ &= 2018,75 \end{aligned}$$

Jäsenten välinen erotus ei ole vakio, lukujono ei siis ole aritmeettinen. Lasketaan jäsenten väliset suhteet:

$$\begin{aligned} \frac{e_2}{e_1} &= \frac{2018,5}{2018} = 1,00024777\dots \\ \frac{e_3}{e_2} &= \frac{2018,666\dots}{2018,5} = 1,00008257\dots \\ \frac{e_4}{e_3} &= \frac{2018,75}{2018,666\dots} = 1,000041281\dots \end{aligned}$$

Suhde ei ole vakio, joten lukujono e_n ei ole myöskään geometrinen.

1.6

$$\begin{aligned} f_n &= 3 - 9n \\ &= 3 - 9 \cdot (n - 1 + 1) \\ &= 3 - 9 \cdot (n - 1) - 9 \\ &= -6 - 9 \cdot (n - 1) \end{aligned}$$

Lukujono f_n on siis aritmeettinen.

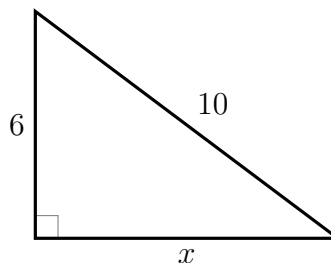
Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2. Kuusi kolmiota

Alla on esitetty kuusi kolmiota, joista on annettu joitakin tietoja. Tarkoituksena on ratkaista sivu x tai kulma θ .

Valitse kunkin kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauksentään sivun x pituus tai kulman θ suuruus asteen tarkkuudella. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä.

2.1. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauksentään sivun x pituus. (1 p.)



- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- ☐ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- ☐ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- ☐ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Ratkaisu.

$a^2 + b^2 = c^2$ _____ 1p
 Kyseessä on suorakulmainen kolmio, joten Pythagoraan lause pätee.

2.2. Kohdan 2.1. kolmiossa pätee sivun pituudelle $x =$ _____ yksikköä. (1 p.)

Ratkaisu.

$x = 8$ _____ 1p(2p)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$6^2 + x^2 = 10^2$$

$$36 + x^2 = 100$$

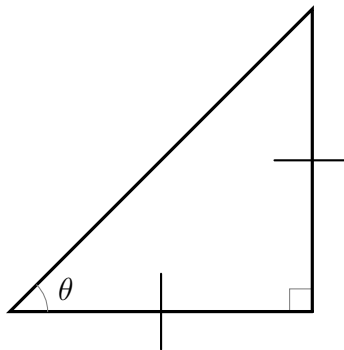
$$x^2 = 100 - 36$$

$$x^2 = 64$$

$$x = (\pm) \sqrt{64}$$

$$x = 8$$

2.3. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauksenttään kulman θ suuruus. (1 p.)



☐ $a^2 + b^2 = c^2$

☐ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

☐ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

☐ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

☐ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Ratkaisu.

$\tan \alpha = \frac{a}{b}$ TAI $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

1p(3p)

Kuvan perusteella kolmio on suorakulmainen ja sen kateetit ovat yhtä pitkät.

2.4. Kohdan 2.3. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$. (1 p.)

Ratkaisu.

$\theta = 45^\circ$

1p(4p)

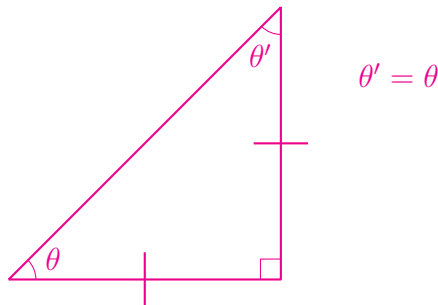
TAPA 1

Käytetään hyväksi tietoa, että kolmion kateetit ovat yhtä pitkiä. Eli $a = b$, joten:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{a}{b} \\ &= \frac{a}{a} \\ \tan \theta &= 1 \\ \theta &= 45^\circ\end{aligned}$$

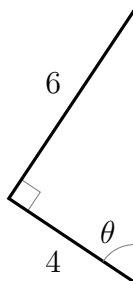
TAPA 2

Koska kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, se on tasakylkinen kolmio. Tällä perusteella kulma θ ja kolmion toinen terävä kulma (merkitään θ') ovat yhtä suuret.



$$\begin{aligned}\theta + \theta' + 90^\circ &= 180^\circ \\ 2\theta + 90^\circ &= 180^\circ \\ 2\theta &= 90^\circ \\ \theta &= 45^\circ\end{aligned}$$

- 2.5. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään kulman θ suuruus asteen tarkkuudella. (1 p.)



☐ $a^2 + b^2 = c^2$

☐ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

☐ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

☐ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

☐ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Ratkaisu.

$\tan \alpha = \frac{a}{b}$ _____ 1p(5p)

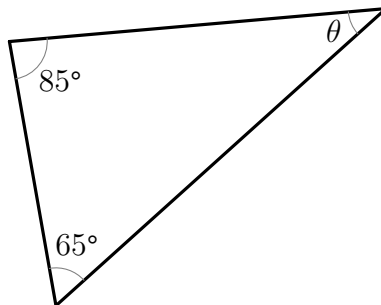
2.6. Kohdan 2.5. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta \approx$ ____°. (1 p.)

Ratkaisu.

$\theta \approx 56^\circ$ _____ 1p(6p)

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2} \\ \theta &= 56,3099 \dots^\circ \\ \theta &\approx 56^\circ\end{aligned}$$

2.7. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään kulman θ suuruus. (1 p.)



- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- ☐ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- ☐ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- ☐ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Ratkaisu.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{1p(7p)}$$

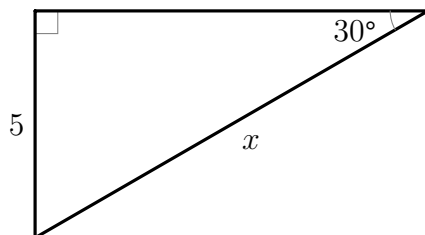
2.8. Kohdan 2.7. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$. (1 p.)

Ratkaisu.

$$\theta = 30^\circ \quad \text{1p(8p)}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ 85^\circ + 65^\circ + \theta &= 180^\circ \\ \theta &= 180^\circ - 85^\circ - 65^\circ \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

2.9. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauksentään sivun x pituus. (1 p.)



- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- ☐ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- ☐ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- ☐ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Ratkaisu.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{1p(9p)}$$

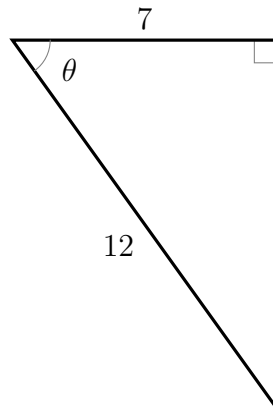
2.10. Kohdan 2.9. kolmiossa pätee sivun pituudelle $x = \underline{\hspace{2cm}}$ yksikköä. (1 p.)

Ratkaisu.

$$x = 10 \quad \text{1p (10p)}$$

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{5}{x} \\ x &= \frac{5}{\sin 30^\circ} \\ &= \frac{5}{\frac{1}{2}} \\ &= 10 \end{aligned}$$

2.11. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauksenttään kulman θ suuruus asteen tarkkuudella. (1 p.)



- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- ☐ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- ☐ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- ☐ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Ratkaisu.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

1p
(11p)

2.12. Kohdan 2.11. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta \approx$ ____°. (1 p.)

Ratkaisu.

$$\theta \approx 54^\circ$$

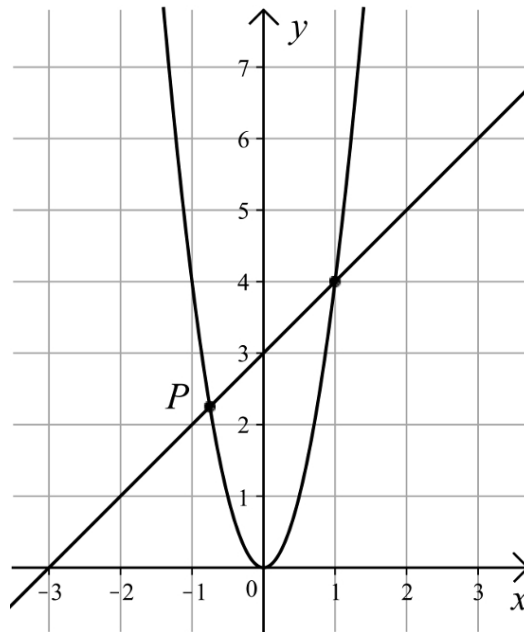
1p
(12p)

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{7}{12} \\ \theta &= 54,3146 \dots^\circ \\ \theta &\approx 54^\circ\end{aligned}$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

3. Paraabeli ja suora (12 p.)

Aineisto:

3.A [Kuva: Leikkauspisteet](#)

Kuvassa 3.A on paraabeli $y = 4x^2$ ja eräs suora. Määritä graafisesti suoran yhtälö. Määritä laskemalla leikkauspiste P suoran ja paraabelin yhtälöiden avulla.

Ratkaisu.

Kuvasta havaitaan, että suoran kulmakerroin on $k = 1$ ja vakiotermi $b = 3$. 2p

Suora on siis

$$y = x + 3. \quad \text{1p(3p)}$$

Kulmakerroin on y :n muutoksen suhde x :n muutokseen eli $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$. Vakiotermi b on suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti.

Kahden käyrän leikkauspisteet saadaan yhtälöparin ratkaisuna.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 4x^2 \end{cases} \quad \text{1p(4p)}$$

$$4x^2 = x + 3 \quad \underline{\hspace{10cm}} \parallel -x - 3 \quad \text{1p(5p)}$$

$$4x^2 - x - 3 = 0 \quad \underline{\hspace{10cm}} \parallel \text{ratkaisukaava} \quad \text{1p(6p)}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \quad \text{1p(7p)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} \quad \text{1p(8p)}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{8}$$

$$x = \frac{8}{8} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6}{8}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{3}{4} \quad \text{1p(9p)}$$

Pisteen P x -koordinaatti on siis $x = -\frac{3}{4}$. 1p (10p)

Lasketaan pisteen P y -koordinaatti.

$$y = x + 3 = -\frac{3}{4} + 3 = -\frac{3}{4} + \frac{12}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{1p (11p)}$$

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = x + 3$. Piste $P = \left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$. 1p (12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

4. Numerotempu (12 p.)

Riikka on kehittänyt seuraavan numerotempun ja testaa sitä serkullaan Almallä. Alma on syntynyt 1.2.2000. Riikka esittää Almalle seuraavat askeleet:

- Valitse luku väliltä 1–9.
- Kerro valitsemasi luku luvulla 2.
- Lisää saamaasi lukuun 5.
- Kerro nyt saamasi luku luvulla 50.
- Jos olet jo viettänyt syntymäpäivääsi tänä vuonna, lisää lukuusi luku 1769.
 - Jos et ole vielä viettänyt syntymäpäivääsi tänä vuonna, lisää lukuusi luku 1768.
- Vähennä nyt tuloksesta syntymävuotesi.
- Kerro, minkä tuloksen olet saanut.

Kun Alma vastaa 319, niin Riikka tietää kertoa, että Alma on 19-vuotias ja että hän valitsi alussa luvun 3.

Selitä matemaattisesti, miksi Riikan numerotempu toimi Almalle, ja miksei se toimi Alman isisoäidille, joka on yli 100-vuotias.

Ratkaisu.

Merkitään askeleessa (a) valittua lukua tuntemattomalla x ja selvitettävää ikää tuntemattomalla y .

(b) askeleessa saadaan luku $2x$.

(c) askeleessa saadaan luku $2x + 5$.

(d) askeleessa saadaan luku $50(2x + 5) = 100x + 250$.

Tutkitaan erikseen tapaukset i) ja ii).

- Jos syntymäpäivä on vietetty, saadaan (e) askeleessa luku $100x + 250 + 1769 = 100x + 2019$.

Koska syntymäpäivä on jo ollut, syntymävuosi on $2019 - y$.

Tällöin (f) askeleessa saadaan luku $100x + 2019 - (2019 - y) = 100x + y$.

- Jos syntymäpäivää ei ole vielä vietetty, saadaan (e) askeleessa luku $100x + 250 + 1768 = 100x + 2018$.

Koska syntymäpäivä ei ole vielä ollut, syntymävuosi on $2019 - (y + 1) = 2018 - y$.

Tällöin (f) askeleessa saadaan luku $100x + 2018 - (2018 - y) = 100x + y$.

Molemmissa tapauksissa saatiin sama tulos $100x + y$. _____ 1p(9p)

Luku x on yksinumeroinen. Jos ikä y on korkeintaan kaksinumeroinen, niin luvusta $100x + y$ tulee sellainen, että satoja ilmaiseva numero on x ja kaksi viimeistä numeroa kertovat suoraan iän y arvon. _____ 1p (10p)

Jos ikä y on kolmenumeroinen, niin luvun $100x + y$ satoja ilmaiseva numero on summa luvusta x sekä iän y sadoista, jolloin satoja ilmaiseva numero ei suoraan ole luku x . _____ 2p (12p)

Tehtävän voi ratkaista myös ottamalla toiseksi tuntemattomaksi iän sijasta syntymävuoden.

Numerotemppu toimii vain vuonna 2019.

Askeleessa (a) valitun luvun on oltava kokonaisluku, jotta numerotemppu toimii.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

5. Akun varaus (12 p.)

Akun varausta kuvaa malli $a \cdot q^t$, kun t on aika tunneissa, $a = 100$ C ja $q = 0,877$. Mikä on akun varauksen puoliintumisaika?

Ratkaisu.

Puoliintumisaika on se aikaväli T , jonka kuluttua akun varaus on vähentynyt puoleen alkuperäisestä. Kun aika on $t = 0$, akun varaus on mallin mukaan

2p

$$a \cdot q^0 = a \cdot 1 = a$$

1p(3p)

Puoliintumisaajan jälkeen akun varaus on puolet tästä, eli

$$a \cdot q^T = \frac{1}{2}a = 0,5a$$

1p(4p)

Ratkaistaan tästä yhtälöstä puoliintumisaika T :

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

$$a \cdot q^T = 0,5a$$

$$0,877^T = 0,5 \quad || \log_{0,877}()$$

4p(8p)

$$T = \log_{0,877}(0,5)$$

2p

(10p)

$$T = 5,2811 \dots$$

1p
(11p)

Vastaus: Puoliintumisaika on 5,3 tuntia. **Myös vastaus 5 tuntia 17 minuuttia hyväksytään.**

1p

(12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

$$a \cdot q^T = 0,5a$$

$$0,877^T = 0,5 \quad || \log() \quad *$$

4p(8p)

$$\log(0,877^T) = \log(0,5)$$

1p(9p)

$$T \cdot \log(0,877) = \log(0,5)$$

1p

(10p)

$$T = \frac{\log(0,5)}{\log(0,877)}$$

$$T = 5,2811 \dots$$

1p
(11p)

*: Tässä voi käyttää mitä tahansa logaritmia.

Vastaus: Puoliintumisaika on 5,3 tuntia. Myös vastaus 5 tuntia 17 minuuttia hyväksytään. _____

1p
(12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Tehtävänannossa esiintyvä yksikkö C luvun a perässä on sähkövarauksen yksikkö Coulomb. Siitä tai sen fysikaalisesta tulkinnasta ei tarvitse tässä tehtävässä välittää.

$$100 \cdot q^T = 50 \quad || : 100$$

$$0,877^T = 0,5 \quad || \log_{0,877}()$$

$$T = \log_{0,877}(0,5)$$

$$T = 5,2811 \dots$$

4p(8p)

2p
(10p)

1p
(11p)

Vastaus: Puoliintumisaika on 5,3 tuntia. Myös vastaus 5 tuntia 17 minuuttia hyväksytään. _____

1p
(12p)

Minuutit saadaan ratkaistua seuraavasti: Otetaan tuntimäärän desimaaliosa ja kerrotaan se 60:llä: $0,2811 \cdot 60 = 16,871 \dots \approx 17$ minuuttia.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

6. Algoritmista ajattelua (12 p.)

Alakoulun oppilaat harjoittelevat algoritmista ajattelua ja ohjelmointia. Oppilaiden tehtävänä on ohjelmoida toisiaan toimimaan täsmälleen tarkasti annettujen ohjeiden mukaan. Eräs oppilas antaa luokkatoverilleen seuraavat ohjeet:

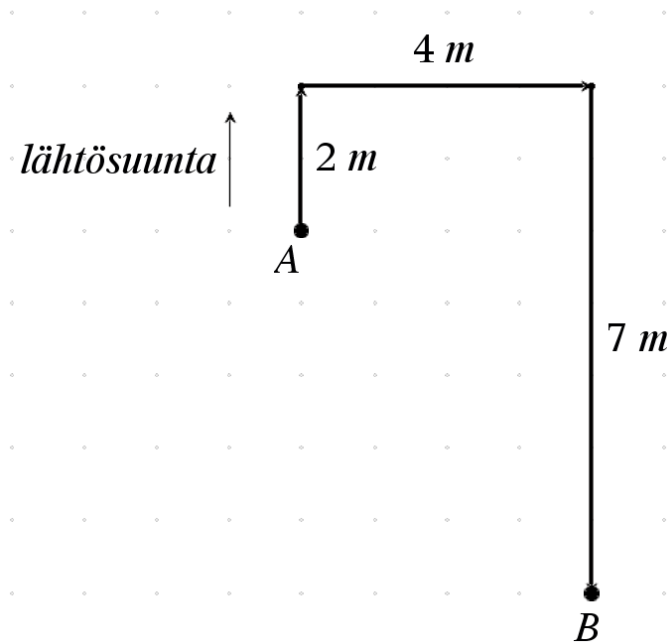
- Aloita pisteestä A.
- Kulje täsmälleen 2 metriä suoraan eteenpäin.
- Käänny 90 astetta oikealle.
- Kulje täsmälleen 4 metriä eteenpäin.
- Käänny 90 astetta oikealle.
- Kulje täsmälleen 7 metriä eteenpäin ja olet perillä pisteessä B.

6.1. Esitä oppilaan kulkema reitti käyttämällä sopivaa piirto-ohjelmaa ja kuvakaappaustyökalua. (6 p.)

6.2. Laske pisteiden A ja B välinen etäisyys. (6 p.)

Ratkaisu.

6.1

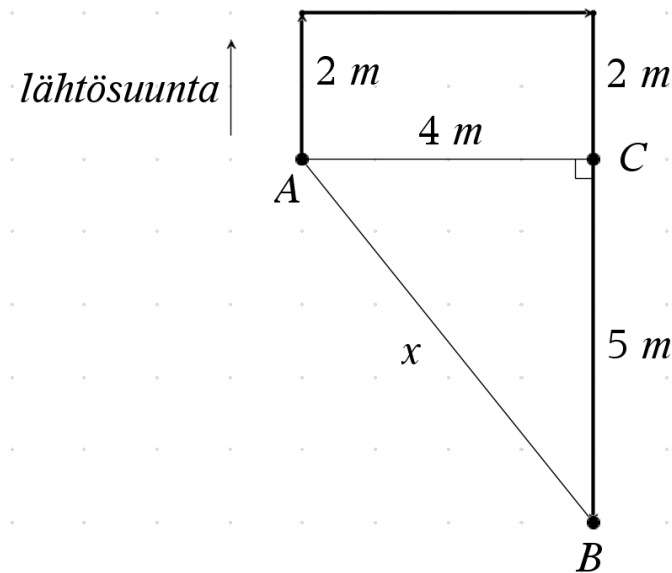


6p

3p(9p)

6.2 Pisteet A, B ja C muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka kateetit tunnetaan. Etäisyys x saadaan Pythagoraan lauseella:

1p
(10p)



$$\begin{aligned}
 x^2 &= 4^2 + 5^2 \\
 &= 16 + 25 \\
 &= 41 \\
 x &= \pm \sqrt{41} = 6,403\dots \\
 &\approx 6,4
 \end{aligned}$$

1p
(11p)

Vastaus: Pisteiden A ja B välinen etäisyys on 6,4 metriä.

1p
(12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

7. Osakekaupat (12 p.)

Aineisto:

7.A [Tiedosto: Pörssikurssit](#)

Aineistossa 7.A on Helsingin pörssin kolmen eri osakkeen osakekurssit, joiden mukaisin hinnoin Roope osti ja myi osakkeita. Hän ostaa 1.2.2018 kello 14.00 osaketta B yhteensä 1 000 eurolla. Hän vaihtaa 2.2.2018 kello 10.00 kaiken osakkeeseen C, ja samana päivänä kello 18.00 hän vaihtaa edelleen kaiken osakkeeseen A. Hän myy kaiken 3.2.2018 kello 16.00. Jokaisesta osto- ja myyntitoimeksiannosta Roope maksaa 4,00 euroa välityspalkkiota. Vaihdon yhteydessä tapahtuu sekä myynti- että ostotoimeksianto. Kuinka paljon Roopella on rahaa osakkeet myytyään?

Ratkaisu.

Roope ostaa 1000 eurolla osaketta B 1.2.2018 klo 14:00. Osakkeen hinta on 3,0 euroa kappaleelta. Roope maksaa ensin 4 euroa ostopalkkiota, eli hän saa osakkeita yhteensä

$$1000 \text{ €} - 4 \text{ €} = 996 \text{ €} \quad \text{1p(2p)}$$

$$\frac{996 \text{ €}}{3,0 \text{ €/osake}} = 332 \text{ kpl osakkeita} \quad \text{1p(3p)}$$

Seuraavana päivänä klo 10:00 Roope vaihtaa kaiken osakkeeseen C eli Roope ensin myy osakkeet B ja ostaa myynnistä saamillaan rahoilla osaketta C. Nyt osakkeen B hinta on enää 2,5 euroa osakkeelta eli Roope saa myynnistä

$$332 \text{ kpl} \cdot 2,5 \text{ €/osake} - 4 \text{ €} = 826 \text{ €} \quad \text{1p(4p)} \quad \text{1p(5p)}$$

Roope saa siis ostettua osakkeita C yhteensä

$$826 \text{ €} - 4 \text{ €} = 822 \text{ €} \quad \text{1p(6p)}$$

$$\frac{822 \text{ €}}{6,0 \text{ €/osake}} = 137 \text{ kpl osakkeita} \quad \text{1p(7p)}$$

Samana päivänä klo 18:00 Roope vaihtaa kaikki osakkeet C osakkeiksi A. Nyt osakkeen C hinta on 7,0 euroa osakkeelta, joten Roope saa osakkeiden myynnistä

$$137 \text{ kpl} \cdot 7,0 \text{ €/osake} - 4 \text{ €} = 955 \text{ €} \quad \text{1p(8p)}$$

Roope saa siis ostettua osakkeita A yhteensä

$$955 \text{ €} - 4 \text{ €} = 951 \text{ €} \quad \text{1p(9p)}$$

$$\frac{951 \text{ €}}{3,0 \text{ €/osake}} = 317 \text{ kpl osakkeita} \quad \text{1p(10p)}$$

Seuraavana päivänä Roope myy kaiken klo 16:00. Tällöin osakkeen A hinta on 2,8 euroa osakkeelta. Myyntipalkkion jälkeen Roopelle jää rahaa

1p (11p) $317\text{kpl} \cdot 2,8\text{ €/osake} - 4\text{ €} = 883,60\text{ €}$

1p (12p)

Vastaus: Roopella on 883,60 euroa rahaa osakkeet myytyään.

8. Kuvaajan tangentti (12 p.)

Tarkastellaan polynomia $p(x) = x^3 + 5x$ ja sen kuvaajan tangenttia pisteessä $(1, 6)$. Määritä derivaatan avulla tämän tangentin yhtälö.

Ratkaisu.

Derivaatta on tangentin kulmakerroin. _____ 1p

Funktion p derivaatta on

$$p'(x) = 3x^2 + 5. \text{_____} 2p(3p)$$

Pisteeseen $(1,6)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on siis

$$p'(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 = 8. \text{_____} 2p(5p)$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Tangentin yhtälö:

$$y = kx + b$$

$$6 = k \cdot 8 + b \text{_____} 4p(9p)$$

$$6 = 8 \cdot 1 + b$$

$$b = -2 \text{_____} 2p(11p)$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = 8x - 2$. _____ 1p (12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Muodostetaan tangentin yhtälö pisteen kautta kulkevan suoran yhtälön kaavan avulla.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 6 = k(x - 1) \text{_____} 4p(9p)$$

$$y - 6 = 8(x - 1) \text{_____} 2p(11p)$$

Laskinohjelmasta saadaan $y = 8x - 2$.

y :n voi ratkaista myös käsin näin:

$$y - 6 = 8(x - 1)$$

$$y - 6 = 8x - 8 \quad || + 6$$

$$y = 8x - 2$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = 8x - 2$.

1p
(12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

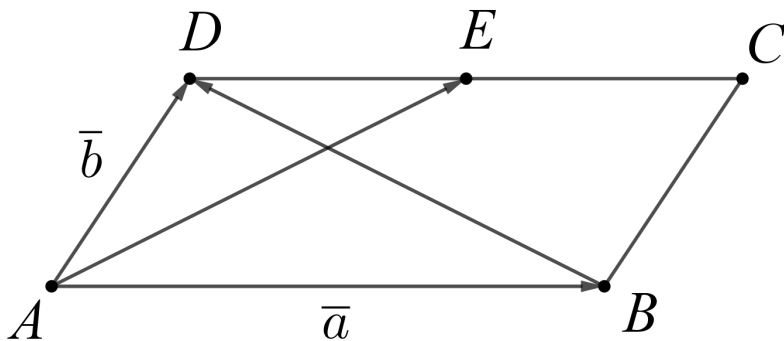
9. Vektorit / 12-sivuinen noppa (12 p.)

Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1. TAI 9.2. (Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaisesti olet opiskellut.)

9.1. (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)

Aineisto:

9.A [Kuva: Suunnikas](#)



Kuvassa 9.A on suunnikas. Esitä vektorit $\overline{AE}$ ja $\overline{BD}$ vektorien $\bar{a} = \overline{AB}$ ja $\bar{b} = \overline{AD}$ avulla lausuttuina, kun piste E on janan CD keskipiste.

Ratkaisu.

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} \quad \text{2p}$$

$$= \bar{b} + \frac{1}{2}\overline{DC} \quad \text{2p(4p)}$$

$$= \bar{b} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a} \quad \text{2p(6p)}$$

2p
(12p)

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{BA} + \overline{AD} \\ &= -\overline{AB} + \overline{b} \\ &= -\overline{a} + \overline{b}\end{aligned}$$

4p
(10p)

Vastaus: $\overline{AE} = \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a}$ ja $\overline{BD} = -\overline{a} + \overline{b}$

Vastauksen voi antaa myös esimerkiksi muodossa $\overline{AE} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}$ ja $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

9.2. (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)

Heitetään kahta 12-sivuista noppaa, joiden silmäluvut ovat 1,2,...,12. Laske tulosten summan odotusarvo ja keskihajonta esimerkiksi taulukkolaskentaohjelman avulla.

Ratkaisu.

Alla olevassa taulukossa on muodostettu kaikkien mahdollisten arpalukupariien summa. Jokainen yhdistelmä on yhtä todennäköinen, joten näiden lukujen keskiarvo on summan odotusarvo ja niiden keskihajonta on summan keskihajonta. _____

4p

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Noppa 1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Noppa 2													
			Keskiarvo		13								
			Keskihajonta		4,88194								

Taulukkoon saatu summat täytettyä oikein: neljä pistettä.

4p

(12p)

Keskiarvo laskettiin LibreOfficen funktiolla KESKIARVO() ja keskihajonta funktiolla KESKIHAJONTA.P().

Vastaus: Odotusarvo on 13 ja keskihajonta 4,88. _____

4p

(12p)

Oikeasta odotusarvosta saa kaksi pistettä ja oikeasta keskihajonnasta saa kaksi pistettä.

10. Perheen keski-ikä (12 p.)

Matti ja Maija menevät naimisiin, kun he ovat 23- ja 21-vuotiaita. Heille syntyy ensimmäinen lapsi tasan 2 vuotta häiden jälkeen. Esikoisen jälkeen perheeseen syntyy vielä kolme lasta tasan 4 vuoden välein. Milloin perheen keski-ikä on pienimmillään? Mikä on perheen keski-ikä silloin?

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Niin kauan kuin perheenjäsenten lukumäärä ei kasva, keski-ikä kasvaa ajan kuluessa. 1p

Lasketaan keski-ikä naimisiin mennessä sekä juuri lasten syntymien jälkeen. 1p(2p)

Keski-ikä naimisiin mennessä:

$$\frac{23 + 21}{2} = 22 \quad \text{ 1p(3p) }$$

Keski-ikä heti ensimmäisen lapsen jälkeen:

$$\frac{(23 + 2) + (21 + 2) + 0}{3} = 16 \quad \text{ 2p(5p) }$$

Keski-ikä heti toisen lapsen jälkeen:

$$\frac{(23 + 2 + 4) + (21 + 2 + 4) + 4 + 0}{4} = 15 \quad \text{ 2p(7p) }$$

Keski-ikä heti kolmannen lapsen jälkeen:

$$\frac{(23 + 2 + 2 \cdot 4) + (21 + 2 + 2 \cdot 4) + 2 \cdot 4 + 4 + 0}{5} = 15,2 \quad \text{ 2p(9p) }$$

Keski-ikä heti neljännen lapsen jälkeen:

$$\frac{(23 + 2 + 3 \cdot 4) + (21 + 2 + 3 \cdot 4) + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 4 + 0}{6} = 16 \quad \text{ 2p (11p) }$$

Vastaus: Keski-ikä on pienimmillään juuri toisen lapsen syntymän jälkeen. Keski-ikä on tällöin 15 vuotta. 1p (12p)

Ajankohdan voi ilmaista myös vuosina häistä: 6 vuotta häiden jälkeen.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

aika häistä (a)	Matin ikä (a)	Maijan ikä (a)	1. lapsen ikä (a)	2. lapsen ikä (a)	3. lapsen ikä (a)	4. lapsen ikä (a)	perheen keski-ikä (a)		
0	23	21					22		
1	24	22					23		
2	25	23	0				16	ensimmäisen lapsen syntymän jälkeen	
3	26	24	1				17		
4	27	25	2				18		
5	28	26	3				19		
6	29	27	4	0			15	toisen lapsen syntymän jälkeen	
7	30	28	5	1			16		
8	31	29	6	2			17		
9	32	30	7	3			18		
10	33	31	8	4	0		15,2	kolmannen lapsen syntymän jälkeen	
11	34	32	9	5	1		16,2		
12	35	33	10	6	2		17,2		
13	36	34	11	7	3		18,2		
14	37	35	12	8	4	0	16	neljännen lapsen syntymän jälkeen	
15	38	36	13	9	5	1	17		
16	39	37	14	10	6	2	18		
17	40	38	15	11	7	3	19		
18	41	39	16	12	8	4	20		
19	42	40	17	13	9	5	21		
20	43	41	18	14	10	6	22		
21	44	42	19	15	11	7	23		
22	45	43	20	16	12	8	24		
23	46	44	21	17	13	9	25		
24	47	45	22	18	14	10	26		

Taulukko on laadittu LibreOffice Calcilla ja perheen keski-ikä on laskettu riveittäin funktiolla KESKIARVO().

Vastaus: Keski-ikä on pienimmillään juuri toisen lapsen syntymän jälkeen. Keski-ikä on tällöin 15 vuotta.

1p
(12p)

Ajankohdan voi ilmaista myös vuosina häistä: 6 vuotta häiden jälkeen.

Jokaisesta oikein olevasta ikäsarakeesta saa yhden pisteen. Oikein olevasta keski-ikäsarakeesta saa viisi pistettä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

11. Neliöjuuren likiarvo (12 p.)

Opiskelijoiden tehtävänä on määrittää lävistäjän pituus sellaiselle suorakulmiolle, jonka sivujen pituudet ovat 1 ja 2. Käytössä on kuitenkin vain laskin, jolla voi laskea yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, mutta ei neliöjuuria. Opiskelijat tietävät, että luvun 5 neliöjuurelle voi määrittää likiarvoja seuraavan jonon avulla:

$$x_1 = 3, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right), \quad n \geq 1.$$

Ilpo yrittää päästä helpolla ja tarjoaa luvulle $\sqrt{5}$ arviota x_2 . Simo puolestaan päättää käyttää arviota x_4 . Vertaa arvioita x_2 ja x_4 laskimen antamaan luvun $\sqrt{5}$ likiarvoon. Kuinka monta prosenttia liian suuria Ilpon ja Simon arviot ovat?

Ratkaisu.

Lasketaan lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{7}{3} \quad \text{2p} \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{\frac{7}{3}} \right) = \frac{47}{21} \quad \text{1p(3p)} \\ x_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{47}{21} + \frac{5}{\frac{47}{21}} \right) = \frac{2207}{987} \quad \text{2p(5p)} \end{aligned}$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Lasketaan, kuinka monta prosenttia x_2 on suurempi kuin $\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} &= \frac{\frac{7}{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad \text{2p(7p)} \\ &\approx 0,0435 \quad \text{1p(8p)} \\ &= 0,0435 \cdot 100 \% \\ &= 4,35 \% \quad \text{1p(9p)} \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia x_4 on suurempi kuin $\sqrt{5}$.

1p
(10p)

$$\frac{x_4 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2207}{987} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\approx 4,11 \cdot 10^{-7}$$

$$= 4,11 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \%$$

$$= 4,11 \cdot 10^{-5} \%$$

1p
(11p)

1p
(12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Lasketaan lukujen x_2 ja $\sqrt{5}$ suhde.

1p(6p)

$$\frac{x_2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\approx 1,0435.$$

1p(7p)

x_2 on siis $0,0435 = 4,35 \%$ liian suuri.

2p(9p)

Lasketaan lukujen x_4 ja $\sqrt{5}$ suhde.

1p
(10p)

$$\frac{x_4}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2207}{987}}{\sqrt{5}}$$

$$\approx 1,000000411.$$

1p
(11p)

1p
(12p)

x_4 on siis $0,000000411 = 0,0000411 \%$ liian suuri.

Vastaus: Ilpon arvio on $4,35 \%$ liian suuri ja Simon arvio on $0,0000411 \%$ $= 4,11 \cdot 10^{-5} \%$ liian suuri.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

12. Suureiden suhteet (12 p.)

- 12.1. Tasapaksusta marmeladilevystä leikataan herkkupaloja isolla ja pienellä ympyrämuotoisella muotilla. Ison muotin halkaisija on kaksi kertaa niin suuri kuin pienen. Namuska on tottunut syömään kolme isoa marmeladipalaa. Kuinka monta pientä palaa hänen pitäisi syödä saadakseen yhtä paljon marmeladia? (4 p.)
- 12.2. Lassi Lounastaja on tottunut syömään lounaallaan kaksi isoa perunaa. Eräänä päivänä tarjolla on pieniä perunoita, joiden halkaisija on vain 60 prosenttia ison perunan halkaisijasta. Kaikki perunat ovat yhdenmuotoisia. Kuinka monta pikkuperunaa Lassin pitäisi syödä saadakseen saman verran perunaa? (6 p.)
- 12.3. Erään musiikkikappaleen esittämiseen kuluu 40-henkiseltä kuorolta 7 minuuttia ja 40 sekuntia. Eräessä esityksessä kolme kuoron jäsentä on flunssan takia poissa. Kuinka kauan tämän kappaleen esittämiseen kuluu 37-henkiseltä kuorolta? (2 p.)

Ratkaisu.

12.1

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Herkkupalan marmeladin määrä on suoraan verrannollinen muotin pinta-alaan.

Merkitään

- pienen muotin halkaisijaa tuntemattomalla d .
- pienen muotin pinta-alaa tuntemattomalla A_1 .
- ison muotin pinta-alaa tuntemattomalla A_2 .

Ison muotin halkaisija on kaksi kertaa niin suuri kuin pienen eli ison muotin halkaisija on $2d$.

Muottien leikkauskuviot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on pituuksien suhteiden neliö. _____

1p

Saadaan yhtälö:

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{2d}{d}\right)^2 \quad \text{_____} \quad \text{1p(2p)}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = 4$$

$$A_2 = 4A_1 \quad \text{_____} \quad \text{1p(3p)}$$

Namuska on tottunut syömään marmeladia siis

$$3 \cdot 4A_1 = 12A_1,$$

joka on yhtä paljon kuin kahdessatoista pienessä herkkupalassa.

Vastaus: Namuskan pitäisi syödä 12 pientä palaa. _____ 1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Merkitään pienen muotin sädettä tuntemattomalla r .

Ison muotin halkaisija on kaksi kertaa pienen muotin halkaisija. Tällöin myös ison muotin säde on kaksi kertaa pienen muotin säde. Ison muotin säde on siis $2r$. _____ 1p

Merkitään marmeladilevyn paksuutta tuntemattomalla h . Herkkupalat ovat suorja ympyrälieriöitä.

Pienessä herkkupalassa on marmeladia

$$\pi r^2 h. \quad \text{_____} \quad \text{1p(2p)}$$

Isossa herkkupalassa on marmeladia

$$\pi(2r)^2 h = 4\pi r^2 h. \quad \text{_____} \quad \text{1p(3p)}$$

Namuska on tottunut syömään marmeladia siis

$$3 \cdot 4\pi r^2 h = 12\pi r^2 h,$$

joka on yhtä paljon kuin kahdessatoista pienessä herkkupalassa.

Vastaus: Namuskan pitäisi syödä 12 pientä palaa. _____ 1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3:

Herkkupalan marmeladin määrä on suoraan verrannollinen muotin pinta-alaan.

Merkitään pienen muotin sädettä tuntemattomalla r . Tällöin pienen muotin halkaisija on $2r$.

Ison muotin halkaisija on kaksi kertaa pienen muotin halkaisija eli $2 \cdot 2r = 4r$.

Tällöin ison muotin säde on $\frac{4r}{2} = 2r$. 1p

Muotit ovat ympyrän muotoisia.

Pienen muotin pinta-ala on

$$\pi r^2. \quad \text{1p(2p)}$$

Ison muotin pinta-ala on

$$\pi(2r)^2 = 4\pi r^2. \quad \text{1p(3p)}$$

Namuska on tottunut syömään marmeladia siis

$$3 \cdot 4\pi r^2 = 12\pi r^2,$$

joka on yhtä paljon kuin kahdessatoista pienessä herkkupalassa.

Vastaus: Namuskan pitäisi syödä 12 pientä palaa. 1p(4p)

12.2 Merkitään

- ison perunan halkaisijaa tuntemattomalla d .
- pienen perunan tilavuutta tuntemattomalla V_1 .
- ison perunan tilavuutta tuntemattomalla V_2 .

Pienen perunan halkaisija on tällöin $0,6d$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on pituuksien suhteen kuu-
tio. 1p(5p)

Saadaan yhtälö:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{d}{0,6d} \right)^3 \quad \text{1p(6p)}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{0,6^3} \quad \text{1p(7p)}$$

$$V_2 = \frac{1}{0,6^3} V_1 \quad \text{1p(8p)}$$

Lassi on tottunut syömään perunaa

$$2V_2 = 2 \cdot \frac{1}{0,6^3} V_1 \approx 9,259V_1 \quad \text{1p(9p)}$$

Vastaus: Lassin pitäisi syödä noin 9 ja yksi neljäsosa pikkuperunaa.

1p
(10p)

1p
(11p) 12.3 Musiikkikappaleen pituus on vakio eikä riipu kuorolaisten määrästä.

Vastaus: Kappaleen esittämiseen menee noin 7 minuuttia 40 sekuntia.

1p
(12p)

13. Suomen väestön rakenne (12 p.)

Aineisto:

13.A [Taulukko: Suomen väestön rakenne](#)

Aineistossa 13.A on esitetty Suomen väestön rakenne. Laske 15–64-vuotiaiden asukaiden lukumäärät vuosina 1900, 1950, 1990, 2000, 2010 ja 2016. Sovita laskemaasi aineistoon lineaarinen malli $f(x)$ ja toisen asteen polynomi $g(x)$. Ennusta molempien mallien avulla Suomen 15–64-vuotiaiden lukumäärät vuosina 2035 ja 2350 ja pohdi ennusteiden mielekkyyttä.

Ratkaisu.

Ratkaisussa käytetty taulukkolaskentaohjelma on LibreOffice Calc.

Lasketaan ensiksi, kuinka paljon Suomessa oli 15 – 64 -vuotiaita yhteensä kysyttyinä vuosina. Taulukossa on annettu Suomen koko väkiluku tuhansina ihmisinä kunakin vuonna. Lisäksi on annettu eri ikäryhmien prosenttiosuudet koko väestöstä. Kerromalla koko väkimäärä ikäryhmän prosenttiosuudella saadaan selville ikäryhmän väkiluku.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Väkiluku	Yksikkö	1900	1950	1990	2000	2010	2016
2	Yhteensä	1000	2656	4030	4998	5181	5375	5503
3	Miehet	1000	1311	1926	2426	2529	2638	2712
4	Naiset	1000	1345	2104	2572	2652	2737	2791
5	Ikä							
6	0–14 v.	%	35,0	30,0	19,3	18,1	16,5	16,2
7	15–64 v.	%	59,6	63,3	67,2	66,9	66,0	62,9
8	65– v.	%	5,4	6,7	13,5	15,0	17,5	20,9
30								
31								
32								
33	Vuosi		1900	1950	1990	2000	2010	2016
34								
35	Yhteensä 15-64 -vuotiaita		1582,976	2550,99	3358,656	3466,089	3547,5	3461,387
36			=C2*C7/100					

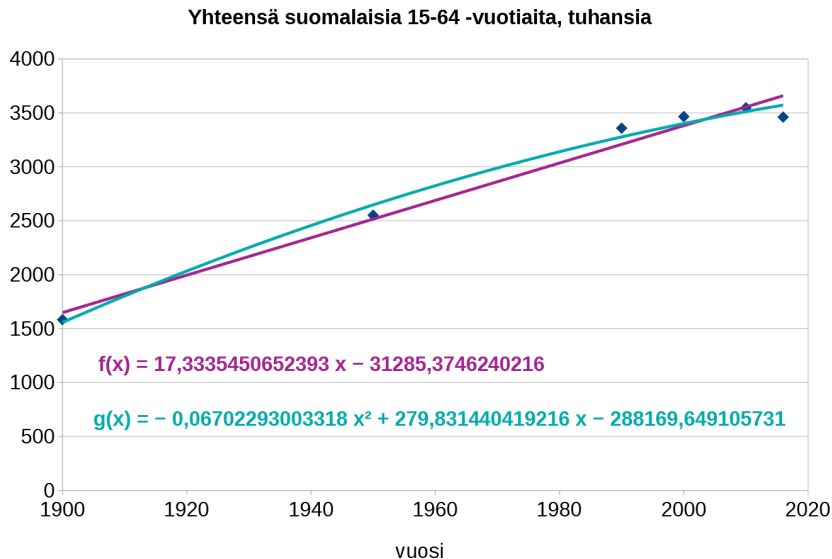
15–64 -vuotiaiden lukumäärät laskettu oikein

2p

Ratkaistaan seuraavaksi aineistoon sovitettava lineaarinen malli $f(x)$ ja toisen asteen sovite $g(x)$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Piirretään 15 – 64 -vuotiaiden väkiluvusta kaavio: (XY (hajonta), *scatter plot*). Sovitetaan kuvaajaan kaksi trendiviivaa, lineaarinen ja toisen asteen polynomi. Valitsemalla 'Näytä yhtälö' saadaan näkyviin ohjelman sovittaman viivan tai toisen asteen polynomin yhtälö:



Tehtävänannossa ei vaadittu kuvan piirtämistä, malliratkaisuun on piirretty kuva selyyden vuoksi.

Yhtälöissä on muuttujan x paikalla vuosiluku. Sovitteiden yhtälöistä saadaan suoran $f(x)$ kulmakerroin ja vakiotermi sekä toisen asteen käyrän $g(x)$ kertoimet:

$$f(x) = 17,33x - 31290$$

2p(4p)

$$g(x) = -0,0670x^2 + 279,8x - 288200$$

3p(7p)

Mallien kertoimet on ilmoitettu neljän merkitsevän numeron tarkkuudella, sillä ai-neiston lukuarvot olivat annettu tällä tarkkuudella.

33	Vuosi		1900	1950	1990	2000	2010	2016
34								
35	Yhteensä 15-64 -vuotiaita		1582,976	2550,99	3358,656	3466,089	3547,5	3461,387
36			=C2*C7/100					
37								
38	$f(x)$		1648,361	2515,038	3208,380	3381,715	3555,051	3659,052
39			=B\$40*C33+B\$41					
40	k	17,33354507						
41	b	-31285,3746						
42								
43								
44	$g(x)$		1557,310	2646,968	3277,412	3401,512	3512,207	3572,189
45			=B\$46*C33^2 + B\$47*C33+B\$48					
46	a	-0,06702293						
47	b	279,8314404						
48	c	-288169,649						

Kertoimien avulla voidaan laskea mallien ennusteet kullekin vuodelle. Yllä olevassa kuvassa on kirjoitettu näkyviin kummankin mallin laskemiseen käytetty kaava.

Mallit on nyt muodostettu. Mallien ennusteet vuosina 2035 ja 2350 voidaan laskea syöttämällä nämä vuosiluvut mallien yhtälöihin. Kätevimmin tämä käy lisäämällä nämä vuosiluvut aineistossa annettujen vuosilukujen perään:

33	Vuosi		1900	1950	1990	2000	2010	2016	2035	2350
34										
35	Yhteensä 15-64 -vuotiaita		1582,976	2550,99	3358,656	3466,089	3547,5	3461,387		
36			=C2*C7/100							
37										
38	$f(x)$		1648,361	2515,038	3208,380	3381,715	3555,051	3659,052	3988,390	9448,456
39			=B\$40*C33+B\$41							
40	k	17,33354507								
41	b	-31285,3746								
42										
43										
44	$g(x)$		1557,310	2646,968	3277,412	3401,512	3512,207	3572,189	3730,299	-699,895
45			=B\$46*C33^2 + B\$47*C33+B\$48							
46	a	-0,06702293								
47	b	279,8314404								
48	c	-288169,649								
49										

Vastaus: Lineaarisen mallin $f(x)$ mukaan Suomessa on 15 – 64 vuotiaita vuonna 2035 n. 3,99 miljoonaa ja vuonna 2350 n. 9,45 miljoonaa. Toisen asteen polynomi-mallin mukaan 15 – 64 vuotiaita on vuonna 2035 n. 3,73 miljoonaa ja vuonna 2350 n. -700 000.

1p(8p)

1p(9p)

Vuoden 2035 ennusteet ovat molemmissa malleissa järkeviä. Vuoden 2350 ennuste on lineaarisella mallilla mahdollinen, mutta 300 vuodessa väestörakenne ehtii muuttua niin paljon, ettei mallin ennuste ole kovinkaan luotettava. Toisen asteen mallin ennuste vuodelle 2350 ei ole mahdollinen, sillä väkiluku ei voi olla negatiivinen.

1p
(10p)1p
(12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Ratkaistaan lineaarisen mallin ja toisen asteen mallin parametrit LibreOfficen LINREGR-funktion avulla.

Lasketaan lineaarisen mallin kulmakerroin ja vakiotermi. Käytetään ohjattua funktion luontia ja valitaan LINREGR-funktio listasta. Pidetään huoli, että 'Taulukko'-valintaruutu on valittuna.

Ohjattu funktion luonti

Funktiot Rakenne

Etsi

linr

Luokka

Kaikki

Funktio

LINREGR

Funktion tulos

LINREGR(Tiedot Y; Tiedot X; Lineaarinen tyyppi; Tilastot)

Laskee lineaarisen regression parametrit taulukkona.

Kaava

Tulos #NULL!

Tulos

☒ Taulukko ☐ Ohje

< Edellinen Seuraava > OK Peruuta

Tiedot Y -ruutuun valitaan *selitettävän* muuttujan (nyt väkimäärä) sisältävät solut. Tiedot X -ruutuun valitaan *selittävän* muuttujan (nyt vuosiluku) sisältävät solut. Muista valinnoista ei tarvitse välittää.

Ohjattu funktion luonti

Funktiot

Rakenne

Etsi

linr

Luokka

Taulukko

Funktio

EROTUSTEN.NELIÖSUMMA

KASVU

LINREGR

LOGREGR

MDETERM

MKERRRO

MKAÄNTEINEN

NELIÖSUMMIEN.EROTUS

NELIÖSUMMIEN.SUMMA

SUUNTAUS

TAAJUUS

TRANSPONOI

TULOJEN.SUMMA

YKSIKKOMATRIISI

LINREGR

Funktion tulos

{17,3335450652392-31285}

Laskee lineaarisen regression parametrit taulukkona.

Tiedot Y

C35:H35

Tiedot X

C33:H33

Lineaarinen tyyppi

Tilastot

Kaava

Tulos

{17,3335450652392-31285}

=LINREGR(C35:H35;C33:H33)

☒ Taulukko

Ohje

< Edellinen

Seuraava >

OK

Peruuta

Yllä olevat kuvat ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä ratkaisussa.

Tuloksena on kahteen vierekkäiseen soluun tulostuvat luvut, jotka ovat lineaarisen mallin kulmakerroin ja vakiotermi:

		k	b
Lineaarinen malli $f(x)$		17,3335451	-31285,3746

Lineaarisen mallin parametrit laskettu oikein

2p(4p)

Lineaarinen malli pyrkii selittämään väkilukua vuosiluvun perusteella. Toisen asteen malli pyrkii selittämään väkiluvun paitsi vuosiluvun, myös vuosiluvun neliön avulla. Lasketaan siis vuosiluvun neliöt laskentataulukkoon:

Vuosi	1900	1950	1990	2000	2010	2016
Vuosiluvun neliö	3610000	3802500	3960100	4000000	4040100	4064256
Yhteensä 15-64 -vuotiaita	1582,976	2550,99	3358,656	3466,089	3547,5	3461,387

Regressiomalli tehdään muuten samalla tavalla kuin edellä, ainoana poikkeuksena on se, että nyt selittäviä muuttujia onkin kaksi, vuosiluku ja vuosiluvun neliö (huomaa Tiedot X-ruudussa olevat kaksi riviä tietoja):

Ohjattu funktion luonti

Funktiot Rakenne

Laskee lineaarisen regression parametrit taulukkona.

Tiedot X (ei pakollinen)

Tietotaulukko X.

Tiedot Y

Tiedot X

Lineaarinen tyyppi

Tilastot

Kaava

Tulos

=LINREG(C35:H35;C33:H34)

Taulukko Ohje < Edellinen Seuraava > OK Peruuta

Yllä oleva kuva on lisäselitys, jota ei edellytetä ratkaisussa.

Tuloksena on kolmeen vierekkäiseen soluun tulostuvat luvut, jotka ovat toisen asteen mallin kertoimet, ensin toisen asteen termin kerroin, sitten ensimmäisen asteen termin kerroin ja lopuksi vakiotermi:

	a	b	c
Toisen asteen malli $g(x)$	-0,06702293	279,83144	-288169,649

Toisen asteen mallin parametrit laskettu oikein

3p(7p)

Nyt mallin ennuste voidaan laskea kuten edellä.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.