MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu täydellisesti lääkiksen pääsykokeeseen!

- Voit harjoitella kotoa käsin huippusuositulla Mafynetti-ohjelmalla. Mukaan kuuluu 4 täysimittaista harjoituskoetta!!
- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä tekemällä. Tehtävät kattavat yksityiskohtaisesti pääsykokeessa tarvittavat biologian, fysiikan ja kemian asiat.
- Vastaaminen tehdään kynällä ja paperilla. Mafynetti opettaa ja näyttää sinulle aina malliratkaisun.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.

Kokeile ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Arviomme tehtävien pisteytyksestä on merkitty sinisellä tekstillä.

Fysiikka, kevät 2013

Mallivastaukset, 13.3.2013

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. Vastaa, ovatko seuraavat väittämät oikein vai väärin. Perustelua ei tarvitse kirjoittaa.

   a) Atomi ei voi lähettää sähkömagneettista säteilyä.
   b) α-hiukkasen kantama ilmassa on pitempi kuin β-hiukkasen, jolla on sama liike-energia.
   c) Radioaallot etenevät avaruudessa valon nopeudella.
   d) Mikroaaltosäteilyn aallonpituus on pitempi kuin infrapunasäteilyn.
   e) Sähköisen vuorovaikutuksen kantama on ääretön.
   f) Lämpösäteily ei ole sähkömagneettista säteilyä.

Ratkaisu:

a) Väärin. 1 p
b) Väärin. 1 p (2 p)
c) Oikein. 1 p (3 p)
d) Oikein. 1 p (4 p)
e) Coulombin lain mukaan varauksen aiheuttaman sähkökentän voimakkuus E etäisyydellä r on

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Näin ollen sähkökentän voimakkuus on suurempi kuin nolla millä tahansa etäisyydellä r ja siten väite on oikein. Matematiikassa ääretön sekä käytetty lukujoukko voidaan määritellä siten, että Coulombin lain mukainen sähkökentän voimakkuus on nolla äärettömän kaukana varauksesta, koska etäisyys r on lausekkeen nimittäjässä. Fysiikan teorian soveltaminen näin määritellyillä äärettömillä etäisyyksillä ei kuitenkaan ole mielekästä, koska ei ole tietoa siitä, onko maailmankaikkeus ääretön ja pätevätkö fysiikan lait etäisyyden kasvaessa rajatta. 1 p (5 p)

f) Väärin. 1 p (6 p)

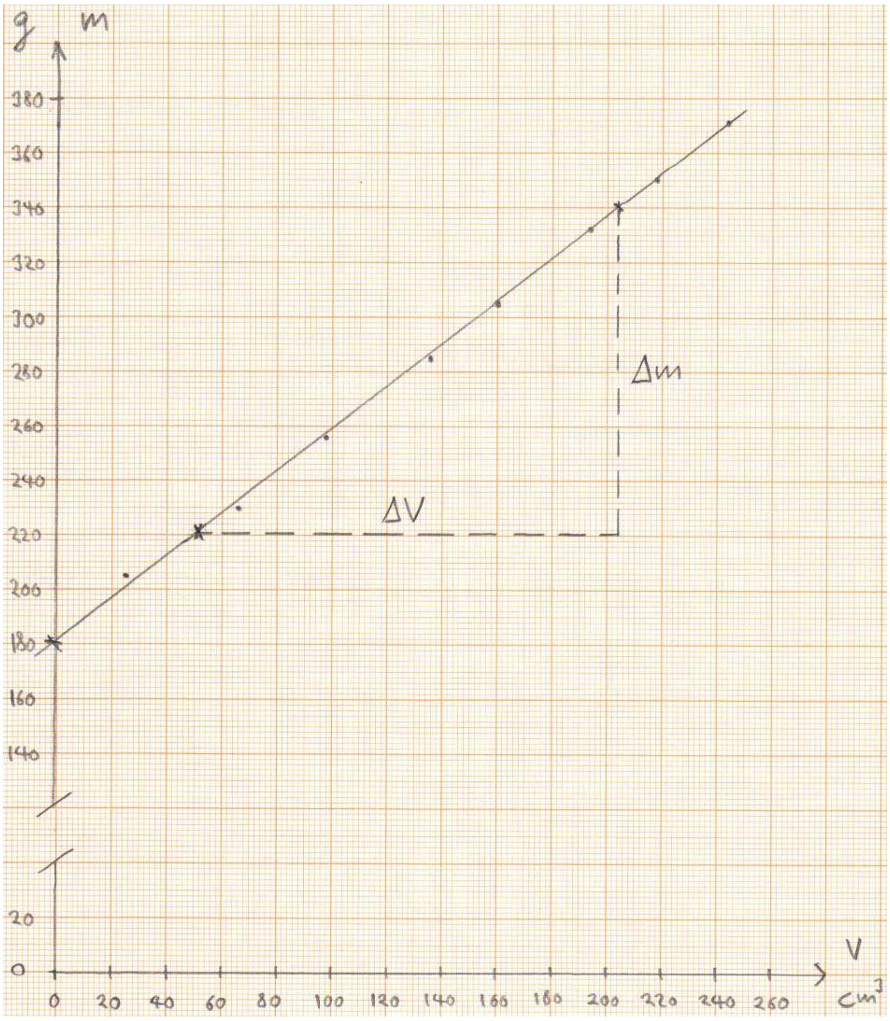
2. Laboratoriotyössä kaadetaan asetonia vaa'alle asetettuun mittalasiin. Taulukossa on ilmoitettu asetonin määrä mittalasissa ja vaa'an lukema (mitattu massa).

V (cm^3)	25	66	98	136	160	194	218	244
m (g)	205	230	256	286	305	332	350	371

a) Piirrä kuvaaja, joka esittää massan riippuvuutta asetonin tilavuudesta. (3 p.)
b) Määritä kuvaajan avulla asetonin tiheys. (2 p.)
c) Kuinka suuri on tyhjän mittalasin massa? (1 p.)

Ratkaisu.

a)



3 p

b)

$$m = \rho V + m_{\text{mittalasi}},$$

joten asetonin tiheys on piirretyn (V, m)-kuvaajan kulmakerroin. 1 p (4 p)

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\Delta m}{\Delta V} \\ &= \frac{340\,\text{g} - 220\,\text{g}}{204\,\text{cm}^3 - 52\,\text{cm}^3} \\ &= 0{,}789\ldots\ \text{g}/\text{cm}^3 \\ &\approx 0{,}79\,\text{g}/\text{cm}^3\end{aligned}$$

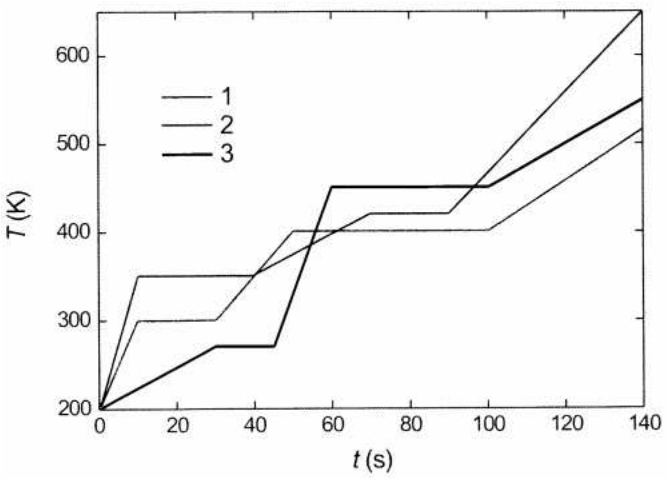
Vastaus: Asetonin tiheys on $0{,}79\,\text{g}/\text{cm}^3$. 1 p (5 p)

c) Kuvaajan arvo kohdassa $V = 0\,\text{cm}^3$ vastaa mittalasin massaa. Luetaan kuvaajasta:

$$m_{\text{mittalasi}} \approx 180\,\text{g}$$

Vastaus: Tyhjän mittalasin massa on $180\,\text{g}$. 1 p (6 p)

3. Kolmella näytteellä (1), (2) ja (3), jotka on valmistettu eri aineista, on sama alkulämpötila ja massa. Näytteitä lämmitetään samalla teholla. Oheisessa kuvassa on esitetty näytteiden lämpötila ajan funktiona. Vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin.
   a) Minkä näytteen sulamispiste on alhaisin?
   b) Minkä näytteen ominaishöyrystymislämpö on suurin?
   c) Minkä näytteen ominaislämpökapasiteetti nesteenä on pienin?



Ratkaisu.

a) Näytteellä 3 on alhaisin sulamispiste, koska sen sulaminen tapahtuu näistä näytteistä alimmassa lämpötilassa (n. 270 K). Sulaminen näkyy kuvaajissa vasemmanpuoleisena vaakasuorana osana. 2 p

b) Näytteen vastaanottama lämpö on sama kuin lämmittimen tekemä työ.

$$\begin{aligned} Q &= W \\ r \cdot m &= P\Delta t \\ r &= \frac{P\Delta t}{m}, \end{aligned}$$ 1 p (3 p)

joten sillä näytteellä, jota joudutaan höyrystämään pisimpään teholla P (pisin oikeanpuoleinen vaakasuora osa kuvaajassa), on suurin ominaishöyrystymislämpö r.
Näytteellä 1 on suurin ominaishöyrystymislämpö. 1 p (4 p)

c) Kuten b-kohdassa

$$\begin{aligned} Q &= W \\ cm\Delta T &= P \cdot \Delta t \\ c &= \frac{P}{m} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta T} \\ c &= \frac{P}{m} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta T}{\Delta t}} \qquad \text{1 p (5 p)} \end{aligned} \tag{1}$$

Näyte on nesteenä kuvaajan keskimmäisellä vinolla osalla. Ominaislämpökapasiteetti on pienin sillä näytteellä, jonka kuvaajan kulmakerroin $\left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \text{ kaavassa (1)}\right)$ on suurin tällä osalla. Tällöin lämpötilan muutos on suurin samalla lämpöenergian määrällä $P \cdot \Delta t$.

$\underline{\underline{\text{Näytteellä 3 on nesteenä pienin lämpökapasiteetti.}}}$ 1 p (6 p)

4. Normaalilla äänellä puhuvan ihmisen aiheuttama intensiteettitaso on 55 dB 3,0 m:n etäisyydellä.
   a) Kuinka suuri on ihmisen puheen äänen teho?
   b) Kuinka suuri on äänen intensiteettitaso pisteessä, joka on 3,0 m:n etäisyydellä viidestä yhtä aikaa puhuvasta ihmisestä? Äänen voidaan olettaa leviävän samalla tavalla joka suuntaan, eikä heijastuksia oteta huomioon.

Ratkaisu.

a) $L = 55\,\mathrm{dB}$, $r = 3{,}0\,\mathrm{m}$
Intensiteettitason kaavasta saadaan

$$
\begin{aligned}
L &= 10\lg\frac{I}{I_0} \quad \| : 10\\
\frac{L}{10} &= \lg\frac{I}{I_0} \quad \|10^{(\,)}\\
10^{L/10} &= I/I_0 \quad \|\cdot I_0\\
I &= I_0 \cdot 10^{L/10}\\
&= 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}\cdot 10^{55/10}\\
&= 3{,}16228\ldots\cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2} \qquad \text{1 p}
\end{aligned}
$$

Pistemäisen äänilähteen intensiteetti on $I = P/A$. Oletuksen mukaan teho jakautuu pallopinnalle, joten $A = 4\pi r^2$. 1 p (2 p)

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A} \quad \|\cdot A\\
P &= AI \quad \|\,\text{sij. } A = 4\pi r^2\\
P &= 4\pi r^2 I\\
P &= 4\pi\cdot(3{,}0\,\mathrm{m})^2\cdot 3{,}16228\ldots\cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}\\
&= 3{,}5764\ldots\cdot 10^{-5}\,\mathrm{W}\\
&\approx 3{,}6\cdot 10^{-5}\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Ihmisen puheen teho on $3{,}6\cdot 10^{-5}$ W. 1 p (3 p)

b) Ihmisten puhe on epäsäännöllistä, joten voidaan olettaa, että tarkasteltavassa pisteessä vahvistavaa ja heikentävää interferenssiä esiintyy keskimäärin yhtä paljon. Näin ollen tästä pisteestä lähtevä äänen teho on yhtä suuri kuin siihen saapuvien tehojen summa.

Ajatellaan piste pienenä alueena, jonka pinta-ala on A. Merkitään yhden äänilähteen intensiteettiä I:llä, jolloin yhdestä äänilähteestä saapuva teho alueelle on $P = AI$. Kokonaisteho on siten $5P$. Pisteestä lähtevä äänen intensiteetti on siis

$$I_5 = 5P/A = 5AI/A = 5I$$ 1 p (4 p)

[Huomautus lukijalle: Täysiin pisteisiin tuskin vaaditaan näin täsmällistä perustelua. Luultavasti riittää, että todetaan intensiteetin olevan summa pisteeseen saapuvien ääniaaltojen intensiteeteistä.]

Intensiteettitaso on

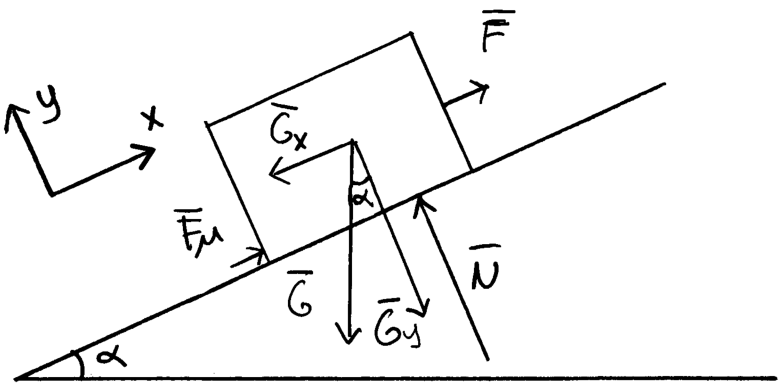
$$\begin{aligned} L_5 &= 10 \lg \frac{5I}{I_0} \\ &= 10 \lg \frac{5 \cdot 3{,}16228\ldots \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} \\ &= 61{,}9897\ldots\,\mathrm{dB} \\ &\approx 62\,\mathrm{dB} \end{aligned}$$

Vastaus: Intensiteettitaso on 62 dB. 2 p (6 p)

5. Koneen osia sisältävä laatikko, jonka massa on 425 kg, on kaltevalla lastaussillalla. Lastaussillan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden on 35°, ja laatikon ja sillan välinen lepokitkakerroin on 0,52. Laatikko pidetään paikallaan lastaussillan suuntaisella voimalla. Kuinka suuri on voiman pienin ja suurin mahdollinen arvo?

Ratkaisu.

$$m = 425\,\text{kg}$$
$$\alpha = 35°$$
$$\mu_{\text{max}} = 0{,}52$$



Kuva 1.

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa $F < G_x$ ja laatikko pysyy paikallaan. Jaetaan painovoima $\overline{G}$ komponentteihin.

$$G_y = mg\cos\alpha$$
$$G_x = mg\sin\alpha$$

Määritetään lepokitkan maksimi.

$$\text{y: (NII)} \quad \overline{G}_y + \overline{N} = \overline{0}$$
$$-mg\cos\alpha + N = 0$$
$$N = mg\cos\alpha$$
$$F_{\mu_{\text{max}}} = \mu_{\text{max}} \cdot N = \mu_{\text{max}} \cdot mg\cos\alpha \quad (1)$$ 1 p

Lepokitka $\overline{F}_\mu$ suuntautuu kuvan 1 mukaisesti.
Määritetään vetävän voiman $\overline{F}$ suuruus.

$$\text{x: (NII)} \quad \overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = \bar{0}$$
$$F + F_\mu - G_x = 0$$
$$F = G_x - F_\mu \qquad \text{1 p (2 p)} \qquad (2)$$

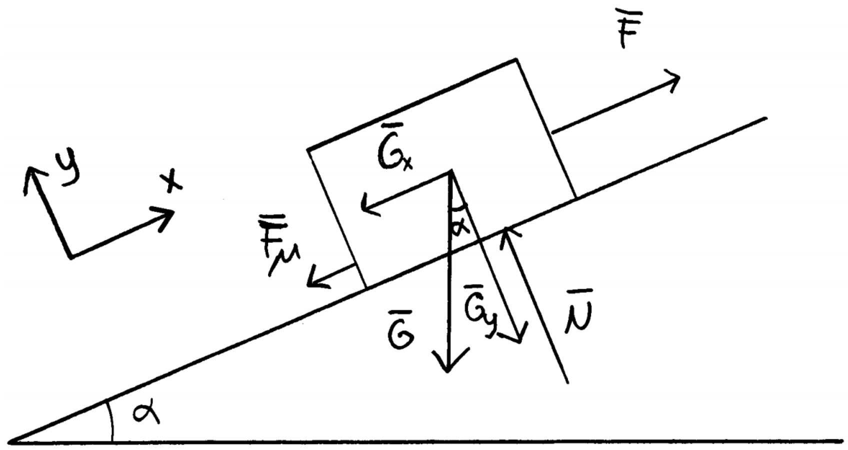
Voima F saa pienimmän arvonsa, kun F_μ on suurin, eli

$$F_\mu = F_{\mu_{\max}} = \mu_{\max} \cdot mg \cos \alpha.$$

Tällöin yhtälöstä (2) saadaan

$$
\begin{aligned}
F_{\min} &= mg \sin \alpha - \mu_{\max} mg \cos \alpha \\
F_{\min} &= (\sin \alpha - \mu_{\max} \cdot \cos \alpha) mg \\
F_{\min} &= (\sin 35° - 0{,}52 \cdot \cos 35°) \cdot 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \\
F_{\min} &= 615{,}453\ldots\ \text{N} \\
&\approx 620\,\text{N}. \qquad \text{1 p (3 p)}
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa $F > G_x$ ja laatikko pysyy paikallaan. Tällöin lepokitkan $\overline{F}_\mu$ suunta on kuvan 2 mukaisesti.



Kuva 2.

$$\text{x: (NII)} \quad \overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = \bar{0}$$
$$F - F_\mu - G_x = 0$$
$$F = G_x + F_\mu \qquad \text{1 p (4 p)} \qquad (3)$$

Voima F saa suurimman arvonsa, kun F_μ on suurin, eli

$$F_\mu = F_{\mu_{\max}} = \mu_{\max} \cdot mg\cos\alpha.$$

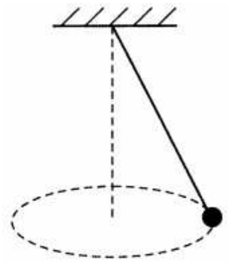
Tällöin yhtälöstä (3) saadaan

$$\begin{aligned}
F_{\max} &= mg\sin\alpha + \mu_{\max} mg\cos\alpha && \text{1 p (5 p)}\\
F_{\max} &= (\sin\alpha + \mu_{\max}\cdot\cos\alpha)mg\\
F_{\max} &= (\sin 35^\circ + 0{,}52\cdot\cos 35^\circ)\cdot 425\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\\
F_{\max} &= 4167{,}313\ldots\ \mathrm{N}\\
&\approx 4200\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Vastaus: Voiman suurin mahdollinen arvo on 4200 N ja pienin 620 N. 1 p (6 p)

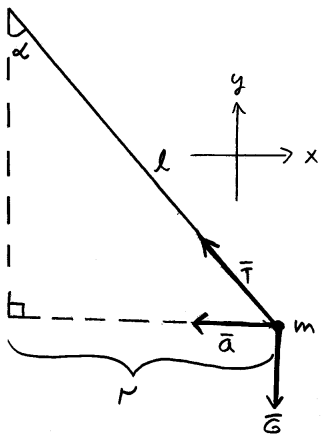
6. Metallipallo on ripustettu kuvan mukaisesti kartioheiluriksi 1,25 m:n pituiseen lankaan. Pallon massa on 87 g, ja langan massa on hyvin pieni. Pallo kiertää ympyrärataa vaakasuorassa tasossa, ja lanka on 41°:n kulmassa pystysuoraan suuntaan nähden.

   a) Piirrä kuva, josta ilmenevät palloon kohdistuvat voimat ja pallon kiihtyvyys.
   b) Laske kiertoliikkeen jaksonaika.
   c) Laske lankaa jännittävä voima.



Ratkaisu.

a)



$$\alpha = 41^\circ$$
$$m = 87\,\text{g} = 0{,}087\,\text{kg}$$
$$l = 1{,}25\,\text{m}$$

$\overline{T}$ on langan jännitysvoima

$\overline{G}$ on painovoima 2 p

b) Kuvan geometriasta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{r}{l} \implies r = l\sin\alpha \tag{1}$$

Jaetaan $\overline{T}$ komponentteihin:

$$T_x = T\sin\alpha$$
$$T_y = T\cos\alpha$$

Newtonin lain mukaiset liikeyhtälöt ovat

$$\text{x:} \quad \overline{T}_x = m\bar{a}_x$$
$$\text{y:} \quad \overline{T}_y + \overline{G} = m\bar{a}_y = \bar{0} \quad (\text{ei liiku } y\text{-suunnassa, eli } a_y = 0)$$

Skalaariyhtälöt ovat:

$$\begin{cases} T_x = ma_x = ma_n = m\omega^2 r \\ T_y - G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\alpha = m\omega^2 r \\ T\cos\alpha - G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\alpha = m\omega^2 r \\ T\cos\alpha = G \quad \| : \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\alpha = m\omega^2 r \\ T = \dfrac{G}{\cos\alpha} = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases} \qquad \text{1 p (3 p)} \tag{2}$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään yhtälöön:

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = m\omega^2 r \quad \| : m$$
$$\frac{g}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = \omega^2 r$$

Sijoitetaan tähän yhtälö (1):

$$\frac{g}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = \omega^2 l\sin\alpha \quad \| : \sin\alpha$$
$$\frac{g}{\cos\alpha} = \omega^2 l \quad \| : l$$
$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}$$
$$\omega = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$$

Täten kierrosaika on

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \\ &= 2\pi\cdot\sqrt{\frac{1{,}25\,\mathrm{m}\cdot\cos 41^\circ}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} \\ &= 1{,}948\ldots\,\mathrm{s} \\ &\approx 1{,}9\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Vastaus: Kiertoliikkeen jaksonaika on 1,9 s. 1 p (4 p)

c) b-kohdan yhtälöstä (2) saadaan:

$$\begin{aligned} T &= \frac{mg}{\cos\alpha} \\ &= \frac{0{,}087\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{\cos 41^\circ} \\ &= 1{,}1308\ldots\,\mathrm{N} \\ &\approx 1{,}1\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Vastaus: Lankaa jännittävä voima on 1,1 N. 2 p (6 p)

7. Ilmatäytteisen levykondensaattorin ympyränmuotoisten levyjen halkaisija on 18,0 cm ja levyjen välimatka on 5,7 mm. Kondensaattori varataan 48 V:n jännitelähteellä ja irrotetaan jännitelähteestä varaamisen jälkeen.

   a) Laske kondensaattorin varaus ja energia.
   b) Levyt siirretään 25,0 mm:n etäisyydelle toisistaan. Kuinka suuri on nyt kondensaattorin varaus ja energia?
   c) Jos kondensaattorin energia b-kohdassa eroaa a-kohdan arvosta, mistä energiaa tulee tai mihin sitä menee? Jos kondensaattorin energia säilyy, mistä säilyminen johtuu?

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} 2r &= 18{,}0\,\mathrm{cm} = 0{,}180\,\mathrm{m} & d_1 &= 5{,}7\,\mathrm{mm} = 0{,}0057\,\mathrm{m} \\ r &= 0{,}0900\,\mathrm{m} & & \\ U_1 &= 48\,\mathrm{V} & \varepsilon_r &\approx 1{,}00 \end{aligned}$$

Levykondensaattorin kapasitanssi

$$\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d_1} \quad \| \text{ sij. } C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \\ \frac{Q_1}{U_1} &= \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d_1} \quad \| \cdot U_1 \\ Q_1 &= \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A\cdot U_1}{d_1} \quad \| \text{ sij. } A = \pi r^2 \\ Q_1 &= \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\pi r^2 U_1}{d_1} \\ &= 8{,}85419\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot 1{,}00\cdot\frac{\pi\cdot(0{,}0900\,\mathrm{m})^2\cdot 48\,\mathrm{V}}{0{,}0057\,\mathrm{m}} \\ &= 1{,}89736\ldots\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} \\ &\approx \underline{\underline{1{,}9\,\mathrm{nC}}} \qquad 1\text{ p} \end{aligned}$$

Energia

$$E_1 = \frac{1}{2}C_1U_1^2$$
$$E_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_1}{\cancel{U_1}}\cdot U_1^{\cancel{2}}$$
$$E_1 = \frac{Q_1U_1}{2} \tag{1}$$
$$= \frac{1{,}89736\ldots\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\cdot 48\,\mathrm{V}}{2}$$
$$= 4{,}55366\ldots\cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$$
$$\approx \underline{\underline{46\,\mathrm{nJ}}}$$

1 p (2 p)

b)

$$d_2 = 25{,}0\,\mathrm{mm} = 0{,}0250\,\mathrm{m}$$

Levyt siirretään, kun kondensaattori on irtikytkettynä, joten elektroneja ei pääse siirtymään levyiltä ja varaus säilyy.

$$Q_2 = Q_1 = 1{,}89736\ldots\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} \approx \underline{\underline{1{,}9\,\mathrm{nC}}}$$

1 p (3 p)

Kapasitanssista saadaan:

$$C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d_2}$$
$$\frac{Q_2}{U_2} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\pi r^2}{d_2}$$
$$U_2 = \frac{Q_2d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi r^2}$$

Energia (yhtälö (1)):

$$E_2 = \frac{Q_2U_2}{2}$$
$$E_2 = \frac{Q_2\cdot\frac{Q_2d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi r^2}}{2}$$
$$E_2 = \frac{Q_2^2d_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r\pi r^2}$$
$$= \frac{(1{,}89736\ldots\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C})^2\cdot 0{,}0250\,\mathrm{m}}{2\cdot 8{,}85419\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot 1{,}00\cdot\pi\cdot(0{,}0900\,\mathrm{m})^2}$$
$$= 1{,}99722\ldots\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}$$
$$\approx \underline{\underline{200\,\mathrm{nJ}}}$$

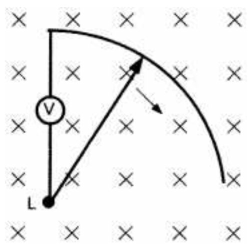
1 p (4 p)

c) Kondensaattorin energia kasvaa, koska $E_2 > E_1$. Eri merkkisesti varatut kondensaattorilevyt vetävät toisiaan puoleensa, joten tarvitaan ulkoinen voima siirtämään ne etäämmälle toisistaan. Tämän ulkoisen voiman tekemä työ muuttuu kondensaattorin energiaksi.

2 p (6 p)

8. a) Johdinsilmukka koostuu kahdesta suorasta johtimesta ja ympyränkaaren muotoisesta johtimesta. Se on kuvan mukaisesti kohtisuorassa magneettikenttää vastaan. Oikeanpuoleinen suora johdin kiertyy myötäpäivään kulmanopeudella 12,6 rad/s pisteen L ympäri. Suorien johtimien pituus on 36 cm, ja magneettivuon tiheys on 76 mT. Laske jännitemittarin näyttämä jännite.

b) Suora alumiiniputki ripustetaan toisesta päästään jousivaakaan. Putken läpi pudotetaan ensin messinkitanko ja sitten sen kanssa samanmuotoinen ja -massainen voimakas sauvamgneetti. Havaitaan, että magneetin putoaminen putken läpi kestää huomattavasti kauemmin kuin messinkitangon putoaminen ja magneetin pudotessa putkessa jousivaaka näyttää putken massaa suurempaa lukemaa. Miten selität havainnot?



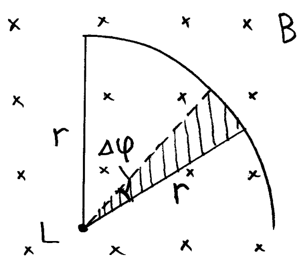
Ratkaisu.

a) Suorien johtimien ja niiden päitä yhdistävän kaaren muodostamaan silmukkaan indusoituu jännite, joka aiheutuu siitä, että magneettivuo silmukan läpi muuttuu. Käämiin indusoituva jännite on

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$e = -\frac{B\Delta A}{\Delta t} \qquad (1)$$

Tilannekuva



$r = 36\,\mathrm{cm} = 0{,}36\,\mathrm{m}$

$B = 76\,\mathrm{mT}$

$\omega = 12{,}6\,\mathrm{rad/s}$ 1 p

Kulmamuutos ajassa Δt on

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

Pinta-alan muutos saadaan sektorin pinta-alan kaavasta

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{\Delta\varphi}{2\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} r^2 \quad \| \text{ sij. } \Delta\varphi = \omega\Delta t \\ \Delta A &= \frac{1}{2}\omega\Delta t r^2 \qquad \text{1 p (2 p)} \end{aligned} \tag{2}$$

Sijoitetaan (2)→(1)

$$\begin{aligned} e &= -\frac{B \cdot \frac{1}{2}\omega\cancel{\Delta t} r^2}{\cancel{\Delta t}} \\ e &= -\frac{1}{2}B\omega r^2 \\ e &= -\frac{1}{2} \cdot 76 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot 12{,}6\,\mathrm{rad/s} \cdot (0{,}36\,\mathrm{m})^2 \\ &= -62{,}348\ldots\,\mathrm{mV} \\ &\approx -62\,\mathrm{mV} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{62\,\mathrm{mV}}}$ 1 p (3 p)

b) Kun messinkitanko putoaa alumiiniputken läpi, ne eivät vuorovaikuta keskenään. Siten messinkitanko putoaa putoamiskiihtyvyydellä ja jousivaaka näyttää alumiiniputken massaa. 1 p (4 p)

Kun magneetti putoaa, sen magneettikentän vuo putken läpi muuttuu. Tällöin putkeen indusoituu Lenzin lain mukainen virta, jonka aiheuttama magneettikenttä pyrkii vastustamaan magneettivuon muutosta. Indusoitunut magneettikenttä on vastakkaissuuntainen magneetin aiheuttamalle kentälle, joten se aiheuttaa magneettiin liikkeen suuntaan nähden vastakkaisen voiman. Tämä voima vähentää magneettiin kohdistuvaa kokonaisvoimaa, joten putoaminen hidastuu ja siinä kestää kauemmin. 1 p (5 p)

Koska alumiiniputki aiheuttaa magneettiin magneettisen voiman ylöspäin, niin voiman ja vastavoiman lain mukaan magneetti aiheuttaa putkeen voiman alaspäin. Koska putoava magneetti työntää alumiiniputkea alas, jousivaaka näyttää lukemaa, joka koostuu alumiiniputken painosta ja magneetin putkeen kohdistamasta voimasta. Näin ollen kokonaisvoima on suurempi kuin ensimmäisessä tilanteessa, jossa pudotettiin messinkitanko. 1 p (6 p)

9. Natriumin β^+-aktiivista isotooppia ^{22}Na käytetään mm. materiaalifysiikassa kiteisten aineiden kidevirheiden tutkimuksissa.
   a) Tutkittaessa radioaktiivisen ^{22}Na:n gammaspektriä germaniumilmaisimella havaitaan suurienergisiä fotoneja energioilla 511 keV ja 1,28 MeV. Selitä näiden fotonien synty.
   b) Miksi β-hajoamisessa β-hiukkasten liike-energian jakauma on jatkuva?

Ratkaisu.

a) Gammafotonien energiat ovat

$$E_1 = 511\,\text{keV}$$
$$E_2 = 1{,}28\,\text{MeV}$$

Hajoamisyhtälö:

$$^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\text{Ne} + e^+ + \nu_e$$

$^{22}_{10}$Ne on pysyvä ydin, joten havaitut gammafotonit ovat peräisin $^{22}_{11}$Na:n β^+-hajoamisesta. 1 p

Positronin, eli β^+-hiukkasen, lepomassaa vastaava energia on

$$\begin{aligned} E_{e^+} m_e c^2 &= \frac{9{,}1093897 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}} \\ &= 511081{,}3\,\text{eV} \\ &\approx 511\,\text{keV} \end{aligned}$$

Ytimestä emittoitunut positroni kulkee vapaana vain lyhyen matkaa, kunnes kohtaa elektronin ja annihiloituu sen kanssa. Matalaenergisten elektronin ja positronin annihilaatiossa elektroni ja positroni häviävät ja syntyy useimmiten kaksi fotonia. Fotonien yhteenlaskettu energia on yhtä suuri kuin elektronin ja positronin energioiden summa. Liike-energian vaikutus on merkityksettömän pieni, joten huomioidaan vain elektronin ja positronin massoihin liittyvä energia. Fotonien energiat ovat likimain yhtä suuret ja niiden nopeudet ovat likimain vastakkaissuuntaiset. Tällöin yhden fotonin energia voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} 2E_p &= E_{e^+} + E_{e^-} \quad \|\,\text{sij. } E_{e^-} = E_{e^+} \\ 2E_p &= 2E_{e^+} \quad \| : 2 \\ E_p &= E_{e^+} \\ E_p &= 511\,\text{keV} \end{aligned}$$

511 keV:n fotonit syntyvät siis ytimestä emittoituneen positronin ja elektroniverhon elektronin annihilaatiossa. 1 p (2 p)

Tytärydin $^{22}_{10}Ne$ voi jäädä β^+-hajoamisen jälkeen viritystilaan. Ytimen viritystilan purkautuessa ydin emittoi gammafotonin, jonka energia tässä tapauksessa on 1,28 MeV. 1 p (3 p)

b) β+-hajoamisessa ytimestä emittoituu β+-hiukkasen eli positronin lisäksi myös neutriino. Positronin ja neutriinon yhteenlaskettu energia voi saada vain kvantittuneita arvoja, mutta energia voi jakautua näiden hiukkasten välillä missä tahansa suhteessa. Sen vuoksi positronin liike-energia on jatkuvasti jakautunut. Sama pätee elektronille ja antineutriinolle β−-hajoamisessa. β-hiukkasen liike-energia on siis molemmissa säteilylajeissa jatkuvasti jakautunut. 1 p (4 p) 2 p (6 p)

10. Pikajuoksua lyhyillä matkoilla voidaan kuvata niin, että aluksi juoksija kiihdyttää tasaisesti huippunopeuteen v_{max}, jolla hän sitten juoksee maaliin saakka. Oletetaan, että kiihtyvyys on aina sama maksimikiihtyvyys a_{max} ja että kiihdytysaika t_1 on sama kaikilla juoksumatkoilla. Kokonaisaika t_2 on kiihdytysajan ja huippunopeudella v_{max} juostun ajan summa.

   a) Hahmottele kuvaaja, josta ilmenee juoksijan nopeus ajan funktiona. (2 p.)

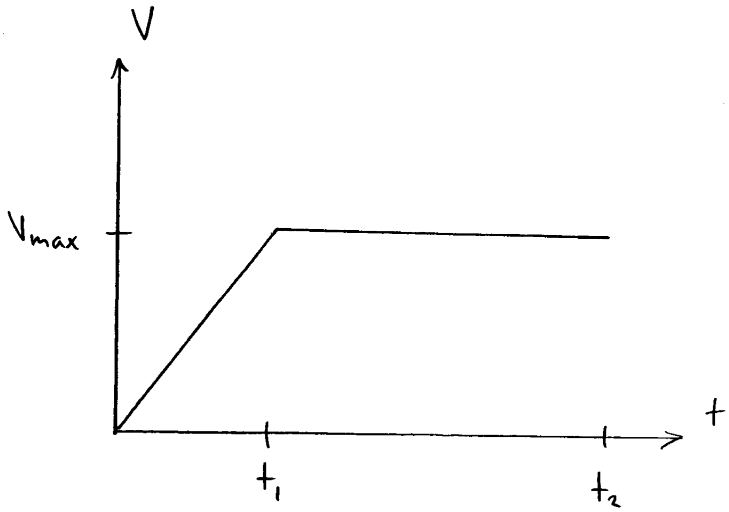
   b) Oheisessa taulukossa on esitetty suoralla radalla saavutettavia huippuaikoja.

Matka	50 yd	50 m	60 m	100 yd	100 m
Aika/s	5,22	5,53	6,38	9,00	9,58

   Esitä graafisesti matka ajan funktiona ja määritä a_{max}, v_{max} ja t_1. (4 p.)

Ratkaisu. Tapa 1:

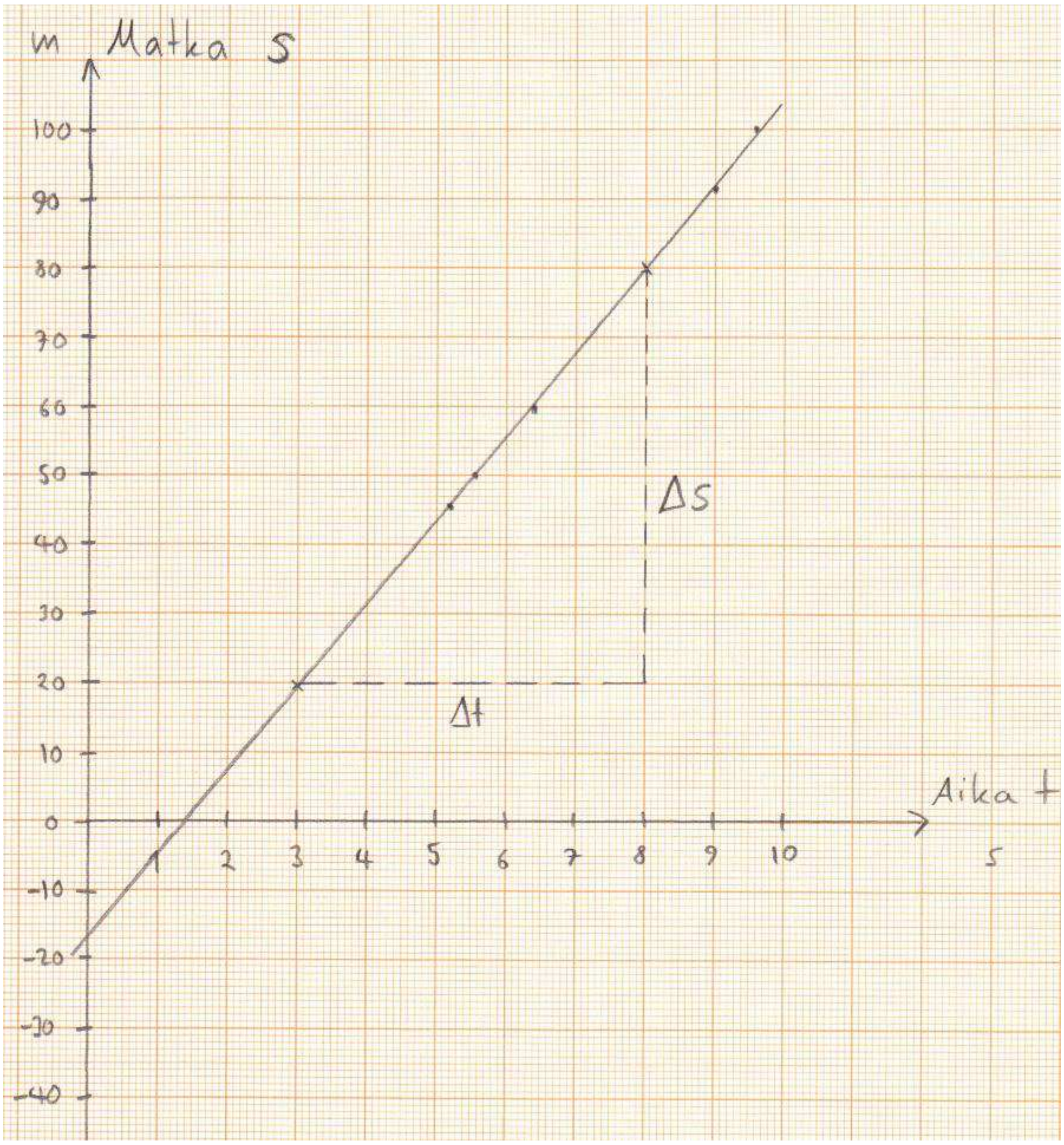
a)



2p

b) Muutetaan jaardit metreiksi ja piirretään tulokset (t, s)-kuvaajaan

$$50\,\text{yd} = 45{,}72\,\text{m}$$
$$100\,\text{yd} = 91{,}44\,\text{m}$$



1 p (3 p)

Muodostetaan tuloksista saadun suoran yhtälö:

- t_1 on kiihdytysaika
- s_1 on kiihdytyksen aikana kuljettu matka
- t_2 on maksiminopeudella kuljettu aikaa
- s_2 on maksiminopeudella kuljettu matka

Kokonaismatka on

$$
\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 \quad \| \text{sij.} s_1 = \frac{1}{2} a_{\max} t_1^2 \quad \text{ja} \quad s_2 = v_{\max} \cdot t_2 \\
s &= \frac{1}{2} a_{\max} t_1^2 + v_{\max} \cdot t_2 \quad \| \text{sij.} t = t_1 + t_2 \Rightarrow t_2 = t - t_1 \\
s &= \frac{1}{2} a_{\max} t_1^2 + v_{\max} \cdot (t - t_1) \\
s &= \frac{1}{2} a_{\max} t_1^2 + v_{\max} \cdot t - v_{\max} \cdot t_1 \\
s &= v_{\max} \cdot t - \left(v_{\max} \cdot t_1 - \frac{1}{2} a_{\max} t_1^2 \right) \quad \| \text{sij.} a = \frac{v_{\max}}{t_1} \\
s &= v_{\max} \cdot t - \left(v_{\max} \cdot t_1 - \frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_1 \right) \\
s &= v_{\max} \cdot t - \frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_1
\end{aligned}
$$

Kuvaajasta saadaan kiihdytyksen jälkeinen maksiminopeus $v_{\max}$ sovitetun suoran kulmakertoimena.

$$
\begin{aligned}
v_{\max} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\
&= \frac{80\,\text{m} - 20\,\text{m}}{8\,\text{s} - 3\,\text{s}} \\
&= 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{1 p (4 p)}
\end{aligned}
$$

Suoran leikkauskohta s-akselilla on $s_0 = -17\,\text{m}$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_1 &= s_0 \quad \| \cdot \frac{-2}{v_{\max}} \\
t_1 &= \frac{-2 \cdot s_0}{v_{\max}} \quad \| \text{sij.} s_0 = -17\,\text{m} \\
t_1 &= \frac{-2 \cdot (-17\,\text{m})}{12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \\
t_1 &= 2{,}8333\ldots\,\text{s} \\
t_1 &\approx 2{,}8\,\text{s} \qquad \text{1 p (5 p)}
\end{aligned}
$$

Kiihtyvyys on tällöin

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_{\max}}{t_1} \\ &= \frac{12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}8333\ldots\,\mathrm{s}} \\ &= 4{,}2352\ldots\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &\approx 4{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Vastaus: Arvot ovat $a_{\max} = 4{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $v_{\max} = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ja $t_1 = 2{,}8\,\mathrm{s}$. 1 p (6 p)

Tapa 2: Tarkastellaan juoksijaa, joka juoksee koko ajan alusta lähtien nopeudella $v_{\max}$. Jotta tämä juoksija pääsisi todellisen juoksijan kanssa yhtä pitkälle maaliviivasta samassa ajassa, täytyy hänen aloittaa juokseminen maaliviivan takaa kohdasta $s_0 = -17\,\mathrm{m}$. Nyt tasaisesti juokseva juoksija saa todellisen juoksijan kiinni ajanhetkellä t_1, joten he ovat yhtä kaukana maaliviivasta. Tästä saadaan:

$$\begin{aligned} x_0 + v_{\max} \cdot t_1 &= \frac{1}{2} a_{\max} \cdot t_1^2 \quad \| \text{sij.} a = \frac{v_{\max}}{t_1} \\ x_0 + v_{\max} \cdot t_1 &= \frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_1 \\ x_0 &= -\frac{1}{2} v_{\max} t_1 \quad \| \cdot \frac{-2}{v_{\max}} \\ t_1 &= \frac{-2 \cdot x_0}{v_{\max}} \end{aligned}$$

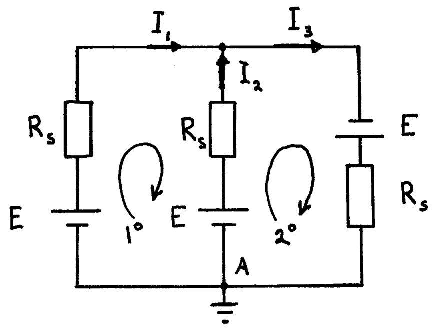
Tästä eteenpäin lasku etenee samalla tavalla tavan 1 kanssa.

11. Laitteen virtalähteenä toimii kolme rinnankytkettyä paristoa. Paristojen lähdejännite on 12 V ja sisäinen resistanssi 47 Ω.
    a) Yksi paristo kytketään vahingossa väärin päin. Kuinka suurella teholla väärin kytketty paristo lämpenee?
    b) Millaisella kytkennällä voidaan estää paristojen väärin kytkemisestä aiheutuvat vahingot?

Ratkaisu.

a)

$$E = 12\,\mathrm{V}, \qquad R_s = 47\,\Omega$$



$$\text{K1:} \qquad I_1 + I_2 = I_3 \tag{1}$$

$$\text{K2:} \qquad \sum \Delta V_A = 0$$

$$1^\circ \qquad \begin{aligned} E - R_sI_1 + R_sI_2 - E &= 0 \\ R_sI_2 &= R_sI_1 \\ I_2 &= I_1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$2^\circ \qquad \begin{aligned} E - R_sI_2 + E - R_sI_3 &= 0 \\ 2E - R_sI_2 - R_sI_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

1 p

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa

$$\begin{aligned} I_2 + I_2 &= I_3 \\ I_2 &= \frac{1}{2}I_3 \end{aligned}$$

Nyt yhtälö (3):

$$
\begin{aligned}
2E - R_s \cdot \frac{1}{2} I_3 - R_s I_3 &= 0 \\
I_3 &= \frac{2E}{\frac{3}{2} R_s} \\
I_3 &= \frac{4E}{3R_s}
\end{aligned}
$$

1 p (2 p)

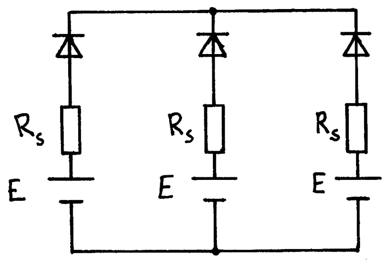
Väärin kytketyssä paristossa kuluva teho on

$$
\begin{aligned}
P &= R_s I_3^2 \\
P &= R_s \cdot \left(\frac{4E}{3R_s}\right)^2 \\
P &= \frac{16E^2}{9R_s} \\
&= \frac{16 \cdot (12\,\mathrm{V})^2}{9 \cdot 47\,\Omega} \\
&= 5{,}4468\ldots\ \mathrm{W} \\
&\approx \underline{\underline{5{,}4\,\mathrm{W}}}
\end{aligned}
$$

1 p (3 p)

b) Väärin kytkemisestä aiheutuvat vahingot voidaan estää kytkemällä jokaisen pariston kanssa sarjaan diodi päästösuuntaan halutun virransuunnan mukaisesti. Ks. kuva

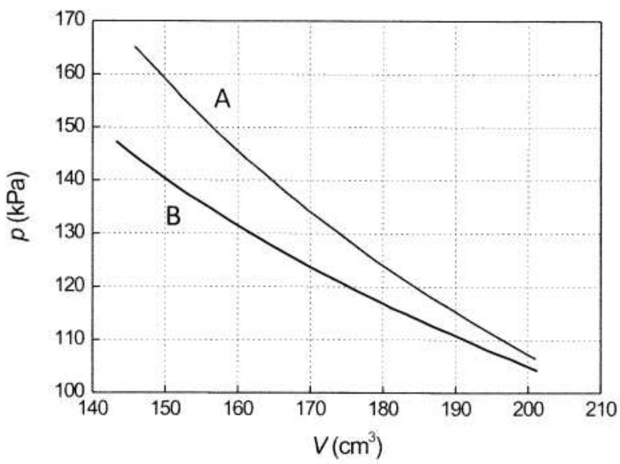
1 p (4 p)



2 p (6 p)

+12. Kaasulakeja voidaan tutkia laitteella, jossa on männällä varustettu sylinteri. Eräässä tutkimuksessa mitattiin kaasun tilavuus ja paine puristettaessa kaasua sylinterissä. Mittaus tehtiin kahdella tavalla. 1) Kaasua puristettiin hitaasti, jolloin lämpöenergiaa ehti siirtyä kaasun ja sylinterin seinämien välillä. Tällöin prosessi oli isoterminen. 2) Kaasua puristettiin nopeasti, jolloin lämpöenergiaa ei ehtinyt siirtyä kaasun ja sylinterin seinämien välillä. Tässä tapauksessa prosessia kutsutaan adiabaattiseksi. Mittaustulokset on esitetty kuvassa.

a) Kumpi kuvaajista A vai B esittää isotermistä prosessia? Perustele graafisesti. (3 p.)
b) Mitä kaasun lämpötilalle tapahtuu adiabaattisessa prosessissa? (2 p.)
c) Adiabaattinen prosessi noudattaa lakia $pV^\gamma =$ vakio, jossa γ on kaasulle ominainen adiabaattivakio. Määritä adiabaattivakion arvo tässä mittauksessa tutkitulle kaasulle. Ohje: Piirrä kuvaaja ja käytä logaritmeja. (4 p.)



Ratkaisu.

a) Ideaalikaasun tilanyhtälö on

$$pV = nRT$$ 1 p

Isotermisessä prosessissa tulo pV täytyy olla vakio, koska T on vakio. Tutkitaan ehdon toteutumista laskemalla ko. tulo kahdessa pisteessä kummallakin käyrällä.

A:
$107{,}5\,\text{kPa} \cdot 200\,\text{cm}^3 = 21500\,\text{kPa} \cdot \text{cm}^3$
$159\,\text{kPa} \cdot 150\,\text{cm}^3 = 23850\,\text{kPa} \cdot \text{cm}^3$

B:
$105\,\text{kPa} \cdot 200\,\text{cm}^3 = 21000\,\text{kPa} \cdot \text{cm}^3$
$140\,\text{kPa} \cdot 150\,\text{cm}^3 = 21000\,\text{kPa} \cdot \text{cm}^3$ 1 p (2 p)

Käyrällä B tulo pV on vakio, mutta käyrällä A tulo ei selvästikään ole vakio. Näin ollen käyrä B kuvaa isotermistä prosessia. 1 p (3 p)

b) Kun kaasua puristetaan kokoon sen tilavuus pienenee ja kaasuun tehdään työtä. Termodynamiikan 1. pääsäännön mukaan kaasun sisäenergian muutos ΔU on

$$\Delta U = Q + W.$$

Toisaalta adiabaattisessa prosessissa lämpöä ei siirry, joten $Q = 0\,\text{J}$ ja edelleen $\Delta U = W$. Näin ollen kaasua puristettaessa sen sisäenergia kasvaa ja olomuodon säilyessä kaasuna sen lämpötila nousee. 2 p (5 p)

c) Luetaan kuvaajalta A muutama piste.

$p(\,\text{kPa})$	160	150	140	120	110
$V(\,\text{cm}^3)$	149	156,5	165	184	196,5

Nyt adiabaattiselle prosessille

$$pV^\gamma = \text{vakio}$$

Merkitään vakiota C:llä.

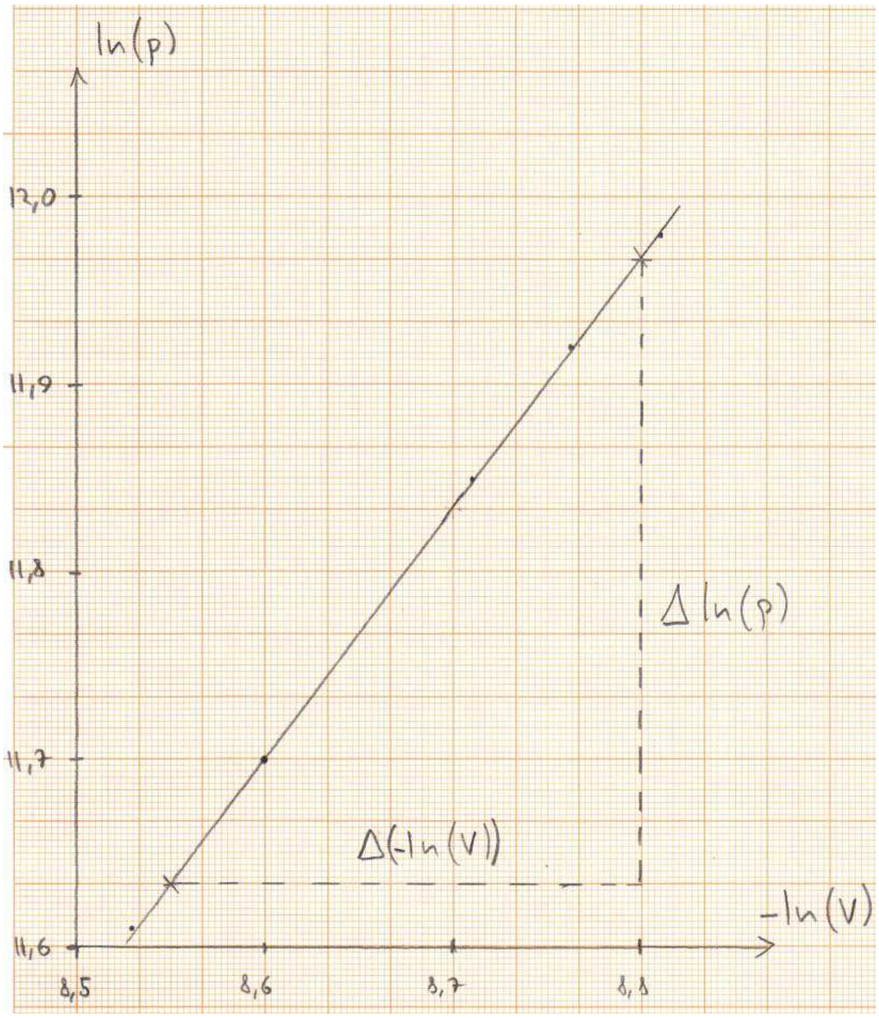
$$\begin{aligned} pV^\gamma &= C \quad \| \ln(\quad) \\ \ln(pV^\gamma) &= \ln(C) \quad \| \text{ merkitään } D = \ln(C) \\ \ln(p) + \ln(V^\gamma) &= D \\ \ln(p) + \gamma \cdot \ln(V) &= D \\ \ln(p) &= \gamma \cdot (-\ln(V)) + D \end{aligned}$$

2 p (7 p)

Kun muuttujiksi valitaan $-\ln V$ ja $\ln P$, niin yhtälö (1) esittää suoraa $(-\ln V, \ln p)$-koordinaatistossa, kulmakertoimen ollessa γ. Otetaan kuvaajalta luettujen pisteiden arvoista logaritmit (SI-yksiköissä):

$\ln(p)$	11,98	11,92	11,85	11,70	11,61
$-\ln(V)$	8,81	8,76	8,71	8,60	8,53

Piirretään kuvaaja (millimetripaperille):



1 p (8 p)

Nyt kulmakerroin on

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\Delta\ln(p)}{\Delta(-\ln(V))}\\ &= \frac{11{,}966\ldots - 11{,}633\ldots}{8{,}8 - 8{,}55}\\ &= 1{,}33\ldots\\ &\approx 1{,}3\end{aligned}$$

Vastaus: Kaasun adiabaattivakio on 1,3.

1 p (9 p)

+13. a) Ajanmääritys perustui aluksi ympäristössämme havaittaviin jaksollisiin muutoksiin. Mitkä edelleen käytössä olevat aikayksiköt ovat tällaisista havainnoista peräisin? Mihin ilmiöön kukin näistä aikayksiköistä perustuu? (2 p.)

b) Heilurikellon keksiminen oli tärkeä vaihe ajanmittauksen historiassa. Lämpötilan vaihtelut aiheuttavat poikkeamia heilurikellon käyntiin. Miten voidaan tehdä lämpötilakompensointi eli tehdä heiluri, jonka jaksonaika ei riipu lämpötilasta? (3 p.)

Merenkulun lisääntyessä korostui tarve tarkkaan ajanmääritykseen, ja 1500–1700-luvuilla mm. Espanjassa ja Englannissa menetelmän kehittäjille luvattiin huomattavia palkkioita.

c) Miksi merenkulussa tarvittiin tarkkoja kelloja? (2 p.)

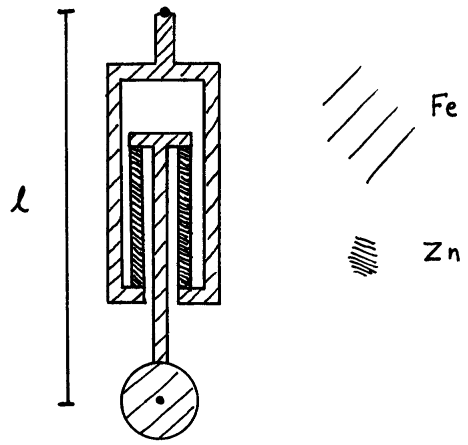
d) Miksi tavallinen heilurikello ei täytä merenkulun tarpeita? (2 p.)

Ratkaisu.

a) Aikayksiköistä vuosi perustuu Maan kiertoaikaan Auringon ympäri. Kuukausi perustuu Kuun kiertoaikaan Maan ympäri ja vuorokausi Maan pyörähdysaikaan oman pyörähdysakselinsa ympäri. 2 p

b) Kun suurin osa heilurin massasta on sijoittunut heilurin päähän likimain pistemäisesti, heilurin jaksonaika riippuu heilurin pituudesta l kaavan $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ mukaisesti. Jaksonaika saadaan riippumattomaksi lämpötilasta, kun heilurin pituus pysyy vakiona lämpötilan muutoksista riippumatta. Tällainen heiluri voidaan tehdä kahden riittävän erilaisen pituuden lämpötilakertoimen omaavan materiaalin avulla esim. seuraavan kuvan mukaisesti. Esitetyssä heilurissa sinkki- ja rautaosat muodostavat yhden jäykän kappaleen, joka heiluu kuvan yläreunaan piirretyn mustan pisteen ympäri. Kuvan mittasuhteista poiketen heilurin yläosan seinämät ovat ohutrakenteisia ja suurin osa massasta on keskitetty heilurin alapäässä olevaan palloon. Kuvassa heilurin pituus l pysyy vakiona, koska sinkkiosien pituuden lämpötilamuutos vaikuttaa heilurin pituuteen päinvastoin kuin rautaosien pituuden lämpötilamuutos. Lisäksi sinkin pituuden lämpötilakerroin on selvästi suurempi kuin raudan, joten sinkkiosat voivat olla selvästi lyhyemmät kuin rautaosat. 2 p (5 p)

1 p (3 p)



c) Merellä paikan (longitudin) määrittämiseksi täytyi tietää tarkka kellonaika, jotta voitiin määrittää sijainti, kun mitattiin tunnettujen taivaankappaleiden sijainteja horisonttiin nähden. Kun tarkka standardiaika (GMT) tunnetaan, voidaan aluksen sijainti määrittää, koska tiettyyn kellonaikaan taivaankappaleiden sijainti horisonttiin nähden riippuu vain tarkastelijan sijainnista. 1 p (7 p)

1 p (6 p)

d) Tavallisen heilurikellon toiminta häiriintyy merenkäynnissä, kun laivan keinuminen häiritsee heilurin toimintaa. Maan vetovoimakiihtyvyys vaihtelee maapallon eri osissa, mikä myös vaikuttaa heilurikellon tarkkuuteen. Tämän vaikutus heilurin jaksonaikaan on tosin suhteellisen vähäinen, enimmillään alle 2 min/vrk jompaan kumpaan suuntaan.

1 p (8 p)

1 p (9 p)