MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Fysiikka, syksy 2010

Mallivastaukset, 1.10.2010

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan fysiikkaa sekä pitkää ja lyhyttä matematiikkaa. Hän on tarkastanut fysiikan ja matematiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta. Tekijänoikeudet tehtävänantoihin omistaa ylioppilastutkintolautakunta.

MA-FY Valmennus Oy on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	050 338 7098

1. a) Miten syntyy auringonpimennys?

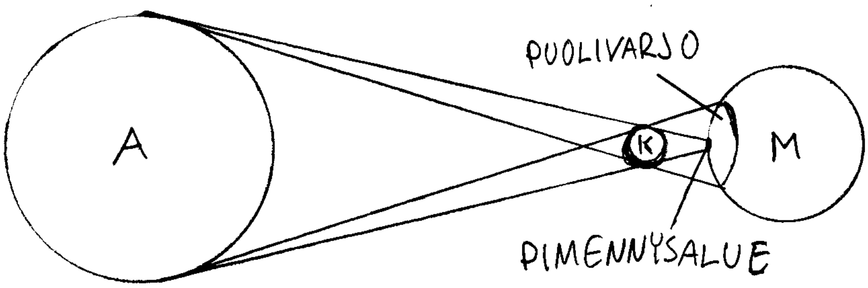
b) Selitä piirrosten avulla täydellisen ja rengasmaisen auringonpimennyksen syntyminen.

c) Kuinka monen viikon päästä on seuraava täysikuu, kun Kuu näyttää tänään oheisen kuvan mukaiselta?

b) b) c)

b) http://shettydeepak.files.wordpress.com/2009/07/total_solar_eclipse.jpg (17.9.2009)
http://www.mreclipse.com/SEphoto/ASE2005/image/A05-trio1w.JPG (17.9.2009)
c) http://www.astronomyforbeginners.com/images/myimages/half%20moon.jpg (17.9.2009)

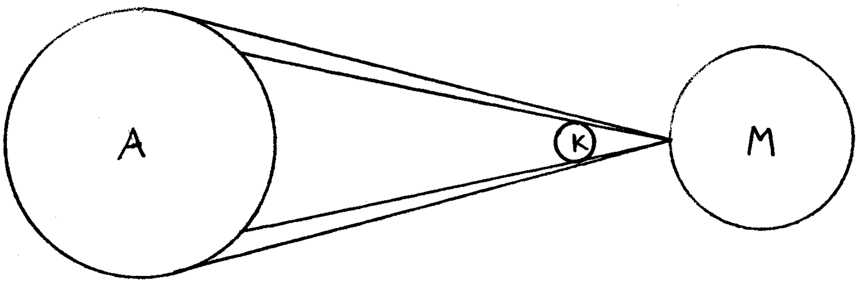
Ratkaisu. a) Auringonpimennys syntyy, kun Aurinko, Kuu ja Maa asettuvat samaan linjaan. Tällöin Kuu asettuu Auringon ja Maassa olevan havaitsijan väliin estäen auringon valon pääsyn paikkaan, jossa havaitsija on. Kuusta lankeaa tällöin Maahan varjo kuvan 1 mukaisesti. A on Aurinko, M on Maa ja K on Kuu. Kuvaa ei ole piirretty mittakaavassa.



Kuva 1.

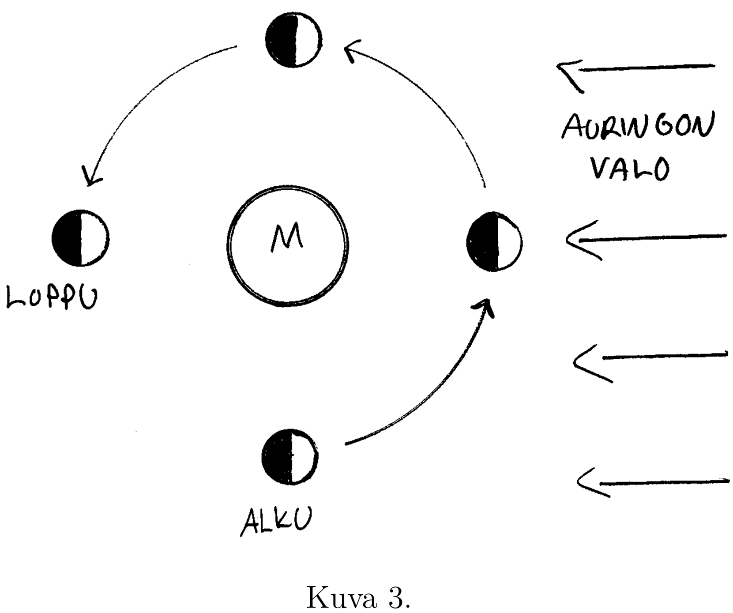
b) Auringonpimennys näkyy osittaisena kuvan 1 puolivarjon alueella. Auringon halkaisija on selvästi Kuun halkaisijaa suurempi, joten sitä voidaan pitää laajapintaisena valonlähteenä. Kuu aiheuttaa kokovarjon pimennysalueelle, kun kyseessä on täydellinen auringonpimennys.
Auringonpimennyksen laatu pimennysalueella riippuu siitä, kuinka kaukana Kuu on Maasta.
Täydellisessä auringonpimennyksessä Kuun etäisyys Maasta on sen verran pieni, että Kuu peittää Auringon kokonaan. Näin tapahtuessa vain Auringon korona näkyy Kuun reunojen ulkopuolella. Tämä tapaus on kuvassa 1.

Rengasmaisessa auringonpimennyksessä Kuun etäisyys Maasta on sen verran suuri, että kokovarjoa ei synny. Mistään kohdasta katsottuna Maan pinnalta Kuu ei peitä kokonaan Aurinkoa. Kun Kuu kulkee tällöin Auringon ja Maan välistä, Maassa näkyy auringonpimennys, jossa Auringosta osa näkyy Kuun takana ohuena renkaana. Tämä tapaus on kuvassa 2.



Kuva 2.

c) Tehtävänannon kuvassa on suurinpiirtein puolikuu. Jos oletetaan, että Kuuta katsotaan kuvassa pohjoisella pallonpuoliskolla, on Kuun Maahan näkyvä valoisa osa pienenemässä, koska kuun vasen puoli on valaistu. Kuu kiertää Maata kiertoradan pohjoispuolelta katsottuna vastapäivään. Näin ollen Kuun vasen puoli on valoisa silloin, kun näkyvä valaistu osa on pienentymässä (ks. kuva 3). Seuraavan kerran Kuu häviää näkyvistä siis viikon kuluttua. Tästä kuluu kaksi viikkoa siihen, kun Kuu näkyy seuraavan kerran Maahan täysikuuna. Seuraavan kerran täysikuu on siis kolmen viikon kuluttua.



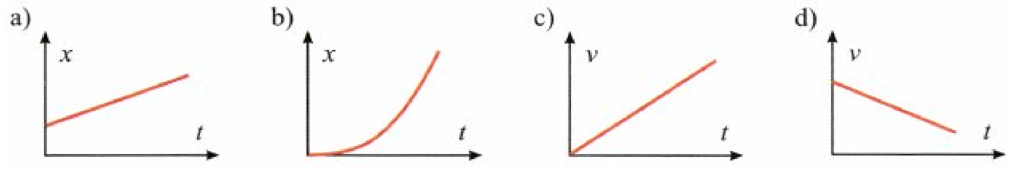
Kuva 3.

Vastaus: Täysikuu on seuraavan kerran kolmen viikon kuluttua.

Huom! Tähtitieteen harrastajat foorumi.avaruus.fi sivustolla huomasivat nopeasti, että tehtävänannossa oleva kuva Kuusta on peilikuva. Jotkut kaukoputket tuottavat peilikuvan. Tämän asian huomioiminen muuttaa vastausta ja oikea vastaus on yksi viikko. Mitä ilmeisimmin peilikuva ei ole kuitenkaan ollut tarkoituksellinen, koska asian huomaaminen edellyttää, että muistaa melko tarkasti miltä Kuun pinta näyttää. Siksi oletamme, että yllä esitetystä tai sen kaltaisesta vastauksesta perusteluineen saa täydet pisteet, vaikka vastaus ei olekaan oikein. Toisaalta oikeasta vastauksesta saa varmasti täydet pisteet. Oikea vastaus on yksi viikko. Tietysti vastaus täytyy olla yhtä hyvin perusteltu ja lisäksi vastauksessa pitää todeta, että kuva Kuusta on peilikuva ja näin ollen Kuun oikea puoli on valaistu.

Oikeita vastauksia on mahdollisesti annettu jonkin verran, koska Kuun pinnan erinomaisesti tuntevalle harrastajalle asia saattaa olla yhtä ilmeinen kuin vaikkapa peilikuva Suomen kartasta tai Euraasian mantereesta.

2. Kuvaajat esittävät tilanteita, joissa kappale liikkuu pitkin suoraa eri tavoin. Kuvaajissa t on aika, x on kappaleen paikka ja v on kappaleen nopeus. Akselit leikkaavat toisensa origossa kaikissa kuvaajissa.



Kopioi oheinen taulukko vastauspaperiisi ja merkitse tyhjiin ruutuihin kuvaajien ja taulukon sanallisten kuvausten vastaavuudet käyttäen seuraavia merkkejä:

X **Kuvaaja esittää kuvauksen mukaista liikettä.**
O **Kuvaaja ei esitä kuvauksen mukaista liikettä.**
? **Kuvaajasta ei voi päätellä, esittääkö se kuvauksen mukaista liikettä.**

	Liike on tasaista.	Liike on kiihtyvää tai hidastuvaa.	Kappale on pisteessä $x = 0$, kun $t = 0$.
a)			
b)			
c)			
d)			

Ratkaisu.

	Liike on tasaista.	Liike on kiihtyvää tai hidastuvaa.	Kappale on pisteessä $x = 0$, kun $t = 0$.
a)	X	O	O
b)	O	X	X
c)	O	X	?
d)	O	X	?

3. Uima-altaassa on $31\,\mathrm{m}^3$ vettä, jonka lämpötila on $8\,^\circ\mathrm{C}$. Uima-altaan vesi lämmitetään puulämmittimellä $23\,^\circ\mathrm{C}$:n lämpötilaan. Kuinka paljon kuivia halkoja on lämmittimessä vähintään poltettava, kun lämpöhäviöt oletetaan pieniksi?

Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
V &= 31\,\mathrm{m}^3 \\
t_1 &= 8\,^\circ\mathrm{C} \\
t_2 &= 23\,^\circ\mathrm{C} \\
H &= 18\,\mathrm{MJ/kg} = 18 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg} \\
c &= 4{,}19\,\tfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot^\circ\mathrm{C}} = 4{,}19 \cdot 10^3\,\tfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot^\circ\mathrm{C}} \\
\text{veden massa: } m_\mathrm{v} &= \rho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 31\,\mathrm{m}^3 = 31\,000\,\mathrm{kg} \\
\text{puun massa: } m_\mathrm{p}
\end{aligned}
$$

Koska lämpöhäviöt oletetaan pieniksi, jätetään lämmön johtuminen vedestä uima-altaaseen sekä muut lämpöhäviöiden vaikutukset huomioimatta laskuissa. Tällöin oletetaan, että kaikki puun palaessa luovuttama lämpö siirtyy veteen.
Veden lämpötilan nousuun kuluva lämpöenergia on

$$
\begin{aligned}
Q &= cm_\mathrm{v}\Delta t \\
Q &= cm_\mathrm{v}(t_2 - t_1). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Puusta poltettaessa saatava lämpöenergia on

$$Q = Hm_\mathrm{p}. \qquad (2)$$

Oletuksen mukaan lämmöt (1) ja (2) ovat yhtä suuret, joten

$$
\begin{aligned}
Hm_\mathrm{p} &= cm_\mathrm{v}(t_2 - t_1) \quad \| : H \\
m_\mathrm{p} &= \frac{cm_\mathrm{v}(t_2 - t_1)}{H} \\
m_\mathrm{p} &= \frac{4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot^\circ\mathrm{C}} \cdot 31\,000\,\mathrm{kg}(23\,^\circ\mathrm{C} - 8\,^\circ\mathrm{C})}{18 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}} \\
m_\mathrm{p} &= 108{,}24\ldots\,\mathrm{kg} \\
&\approx 110\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Halkoja on poltettava vähintään 110 kg.

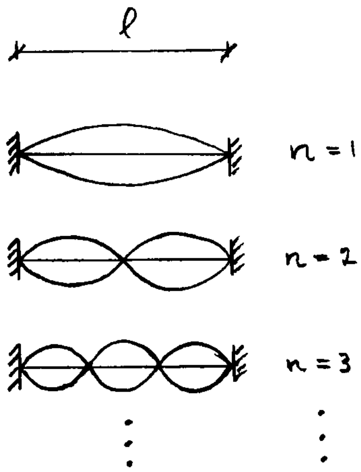
4. Sähköbasson vapaan A-kielen soiva osuus on 87 cm:n pituinen ja alin värähdystaajuus (perustaajuus) on 55,0 Hz.

a) Millä muilla taajuuksilla vapaa A-kieli voi värähdellä? Perustele.

b) Basisti painaa A-kielen vasten otelautaa niin, että kielen soivan osan pituudeksi tulee 2/3 vapaan kielen pituudesta. Mikä on nyt kielen perustaajuus?

c) Laske A-kielessä etenevän aaltoliikkeen nopeus.

Ratkaisu.



$$l = 87\,\text{cm}$$
$$f_1 = 55{,}0\,\text{Hz}$$

Kieli soi niillä taajuuksilla, joilla kieleen syntyy seisova aaltoliike. Kielen päissä on tällöin solmukohta. Yllä olevan kuvan mukaisesti aallonpituus voi saada arvoja

n	λ_n
1	$l = \frac{1}{2}\lambda_1 \iff \lambda_1 = 2l = \frac{2}{1}l$
2	$l = \lambda_2 \iff \lambda_2 = l = \frac{2}{2}l$
3	$l = \frac{3}{2}\lambda_3 \iff \lambda_3 = \frac{2}{3}l$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\lambda_n = \frac{2}{n}l$

n:nnen ylätaajuuden aallonpituus on siis

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

jossa λ_1 on perustaajuuden aallonpituus. Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan vastaavat taajuudet ovat

$$\begin{aligned} v &= f_n\lambda_n \quad \| : \lambda_n \\ f_n &= \frac{v}{\lambda_n} \quad \| \text{ sij. (1)} \\ f_n &= \frac{v}{2l/n} \\ f_n &= \frac{vn}{2l}, \end{aligned} \tag{2}$$

jossa v on aallon etenemisnopeus kielessä.
Lasketaan ylätaajuudet perustaajuuden avulla

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{f_1} &= \frac{\frac{vn}{2l}}{\frac{v\cdot 1}{2l}} \\ \frac{f_n}{f_1} &= n \quad \| \cdot f_1 \\ f_n &= nf_1 \\ f_n &= n \cdot 55{,}0\,\text{Hz} \end{aligned}$$

Vastaus: Perustaajuuden lisäksi vapaa A-kieli voi värähdellä taajuuksilla $n \cdot 55{,}0\,\text{Hz}$, jossa $n = 2, 3, 4, \ldots$.

b) Värähtelevän kielen osan pituus on nyt $\frac{2}{3} \cdot 87\,\text{cm}$. Käytetään alaindeksiä v vapaalle kielelle ja alaindeksiä p otteella pidetylle kielelle. Siten

$$\begin{aligned} l_\text{v} &= 87\,\text{cm} \\ l_\text{p} &= \frac{2}{3}l_\text{v} = \frac{2}{3} \cdot 87\,\text{cm} \\ f_{1\text{v}} &= 55{,}0\,\text{Hz}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ratkaistaan v kaavasta (2).

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{vn}{2l} \quad \| \cdot \tfrac{2l}{n} \\ \frac{2f_n l}{n} &= v \\ v &= \frac{2f_n l}{n} \end{aligned}$$

Erityisesti, kun $n = 1$,

$$v = 2f_1 l \tag{4}$$

Aallon etenemisnopeus ei riipu kielen pituudesta, joten

$$\begin{aligned}
v_\mathrm{p} &= v_\mathrm{v} \quad \| \text{ sij. } (4)\\
2f_{1\mathrm{p}}l_\mathrm{p} &= 2f_{1\mathrm{v}}l_\mathrm{v} \quad \| : (2l_\mathrm{p})\\
f_{1\mathrm{p}} &= f_{1\mathrm{v}}\frac{l_\mathrm{v}}{l_\mathrm{p}} \quad \| \text{ sij. } (3)\\
f_{1\mathrm{p}} &= f_{1\mathrm{v}}\frac{l_\mathrm{v}}{\frac{2}{3}l_\mathrm{v}}\\
f_{1\mathrm{p}} &= \frac{3}{2}f_{1\mathrm{v}}\\
f_{1\mathrm{p}} &= \frac{3}{2}\cdot 55{,}0\,\mathrm{Hz}\\
f_{1\mathrm{p}} &= 82{,}5\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}$$

Vastaus: Otteella pidetyn kielen perustaajuus on 82,5 Hz.

(Huom! Pyöristyksessä on oletettu, että kitara on valmistettu niin tarkasti, että annetun suhteen 2/3 tarkkuus on kolme merkitsevää numeroa. Tässä pelataan myös varman päälle, koska yksi merkitsevä numero liikaa ei johda pisteiden menetykseen arvostelussa siinäkään tapauksessa, että tulkinta olisi hieman erilainen.)

c) Kaavasta (4) saadaan

$$\begin{aligned}
v &= 2\cdot 55{,}0\,\mathrm{Hz}\cdot 0{,}87\,\mathrm{m}\\
&= 95{,}7\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Vastaus: A-kielessä etenevän aaltoliikkeen nopeus on 96 m/s.

5. Tila-auton jarrujen testissä autoa ajettiin tyhjänä ja täyteen lastattuna vaakasuoralla tiellä nopeudella 65 km/h. Auto pysäytettiin lukkojarrutuksella. Renkaiden ja tien välinen kitkakerroin oli 0,60. Auton massa oli 1 250 kg ja täyteen lastatun auton 1 870 kg.

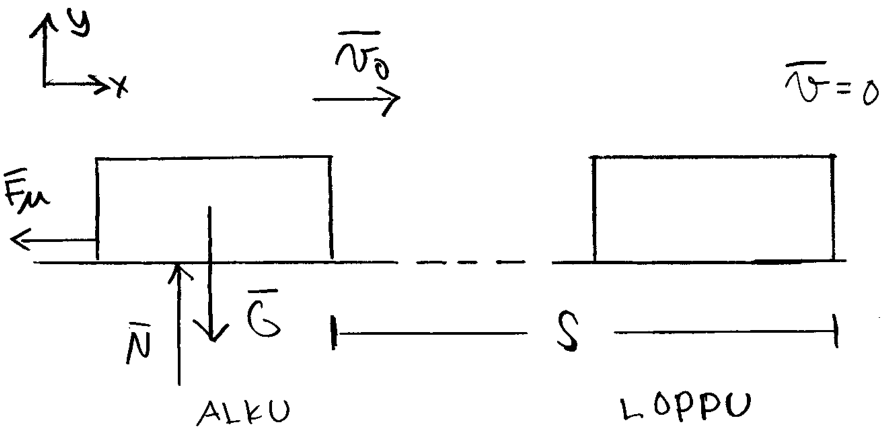
a) Laske auton jarrutusmatkat olettaen, että ilmanvastusta ei ole.

b) Kummassa tapauksessa jarrutusmatka oli pitempi, jos ilmanvastus otetaan huomioon?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} v_0 &= 65\,\mathrm{km/h} = \frac{65}{3{,}6}\,\mathrm{m/s} \\ v &= 0 \\ \mu &= 0{,}60 \\ m_1 &= 1\,250\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 1\,870\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

a) Piirretään autoon vaikuttavat voimat jarrutuksen aikana.



$\overline{G}$	on auton painovoima,
$\overline{N}$	on tien tukivoima,
$\overline{F}_\mu$	on tien ja renkaiden välinen kitkavoima,
$\overline{v}_0$	on auton nopeus alussa ja
s	on jarrutusmatka.

Voimat y-suunnassa:

$$\begin{aligned} y: \quad \mathrm{N\ I}: \quad \overline{N} + \overline{G} &= \overline{0} \\ N - G &= 0 \\ N &= mg \end{aligned}$$

Kitkavoiman suuruus on

$$\begin{aligned} F_\mu &= \mu N \\ &= \mu m g \end{aligned}$$

Jarrutuksen alkaessa autolla on liike-energiaa

$$E_{ka} = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

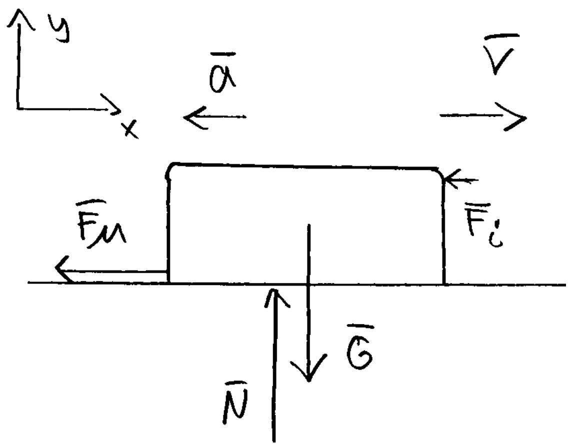
Työperiaatteen mukaan mekaanisen energian muutos on yhtä suuri kuin kitkavoiman tekemä työ.

$$\begin{aligned} W &= \Delta E \\ W &= E_{kl} - E_{ka} \\ -F_\mu s &= -E_{ka} \\ -\mu m g s &= -\frac{1}{2} m v_0^2 \quad \| : (-\mu m g) \\ s &= \frac{v_0^2}{2\mu g} \\ &= \frac{\left(\frac{65}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\ &= 27{,}693\ldots \\ &\approx 28\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Edellisestä huomataan, että massalla ei ole jarrutusmatkaan merkitystä, jos kitkakerroin μ oletetaan näissä olosuhteissa vakioksi.

Vastaus: Auton jarrutusmatkat ovat molemmissa tapauksissa 28 m.

b) Piirretään kuva, jossa ilmanvastus vaikuttaa autoon:



$\overline{F}_i$ on autoon vaikuttava ilmanvastus.

Tutkitaan voimia x-suunnassa

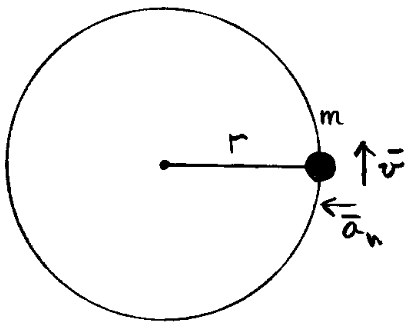
$$\begin{aligned} \text{N II:} \quad \overline{F}_\mu + \overline{F}_i &= m\bar{a} \\ -F_\mu - F_i &= -ma \quad \| : (-m) \\ a &= \frac{-\mu m g}{-m} - \frac{F_i}{-m} \\ a &= \mu g + \frac{F_i}{m} \end{aligned}$$

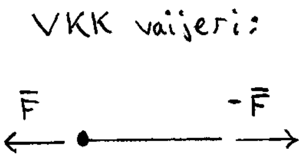
Hidastuvuuden lausekkeessa termi $\frac{F_i}{m}$ kuvaa ilmanvastuksen ja massan vaikutusta hidastuvuuteen. Termistä nähdään, että ilmanvastuksen pysyessä vakiona hidastuvuus on sitä pienempi, mitä suurempi on auton massa. Ilmanvastusvoima F_i vähenee tunnetusti nopeuden vähetessä, mutta määrätyllä nopeudella ilmanvastus on auton kuormasta riippumaton vakio. Edellisten perusteella täyteen lastatun auton hidastuvuus on siis pienempi kaikilla nopeuksilla, joten täyteen lastatun auton jarrutus kestää pidempään ja jarrutusmatka muodostuu pidemmäksi.

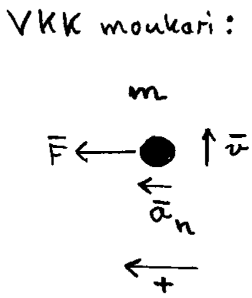
Vastaus: Täyden auton jarrutusmatka on pidempi.

6. Viime vuonna moukarinheiton maailmanmestaruuden voittaneen Primož Kozmusin moukarin lähtönopeus oli 29 m/s. Kuinka suuren voiman (likimäärin) moukarin kahva kohdisti heittäjän käsiin juuri ennen moukarin irtoamista? Moukarin liikerata ennen irrotushetkeä oletetaan ympyräksi, jonka säde on 1,9 m. Moukarin massa on 7,3 kg. Voiman likimääräistarkastelussa moukariin kohdistuva painovoima voidaan jättää huomiotta.

Ratkaisu.







$v = 29\,\mathrm{m/s}$ $\qquad m = 7{,}3\,\mathrm{kg}$ $\qquad r = 1{,}9\,\mathrm{m}$

Vaijerin vapaakappalekuvassa voima $\overline{F}$ on heittäjän käsien käsikahvaan kohdistama voima. Vaijerin oikeaan päähän on merkitty voima, jolla moukari vaikuttaa vaijeriin. Oletetaan vaijeri likimain massattomaksi, jolloin vaijeriin vaikuttavien voimien vaakasuuntaisesta tasapainoehdosta seuraa, että vaijerin oikeassa päässä vaikuttava voima on $-\overline{F}$. Newtonin III:n lain mukaan vaijeri vaikuttaa moukariin yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla $\overline{F}$. Moukari on ympyräliikkeessä, joten sillä on keskeiskiihtyvyys

$$a_n = \frac{v^2}{r} \tag{1}$$

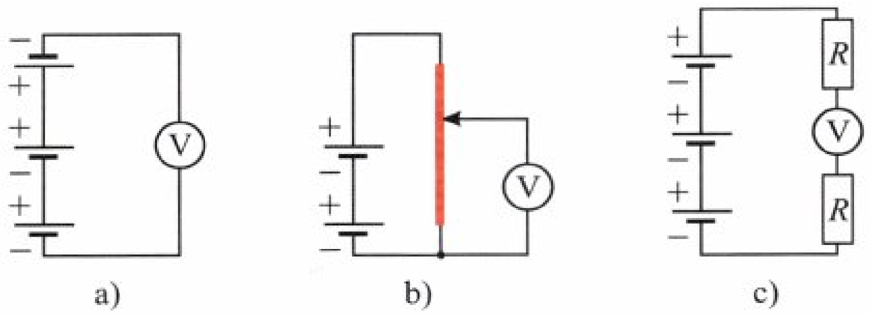
Newtonin II:n lain mukaan moukarin liikeyhtälö on

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= m\bar{a}_n \\
F &= ma_n \quad \| \text{ sij. (1)} \\
F &= m\frac{v^2}{r} \\
F &= 7{,}3\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(29\,\mathrm{m/s})^2}{1{,}9\,\mathrm{m}} \\
F &= 3231{,}21\ldots\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

Voiman ja vastavoiman lain (Newton III) mukaan kahvan käsiin kohdistama voima on suuruudeltaan sama kuin käsien kahvaan kohdistama voima.

Vastaus: Kysytyn voiman suuruus oli 3,2 kN.

7. Kaaviossa on kolme kytkentää, a, b ja c. Paristojen napajännite on 1,5 V. Kytkennässä b punainen johdin on 30 cm:n pituinen tasapaksu homogeeninen vastuslanka. Liukukosketin on kuvan esittämällä tavalla 10 cm:n etäisyydellä vastuslangan päästä. Vastusten resistanssit ovat 100 Ω kytkennässä c. Muiden johtimien resistanssit ovat hyvin pieniä. Jännitemittarit oletetaan ideaalisiksi. Mikä on jännitemittarin lukema kussakin kytkennässä? Perustele vastauksesi.



Ratkaisu.

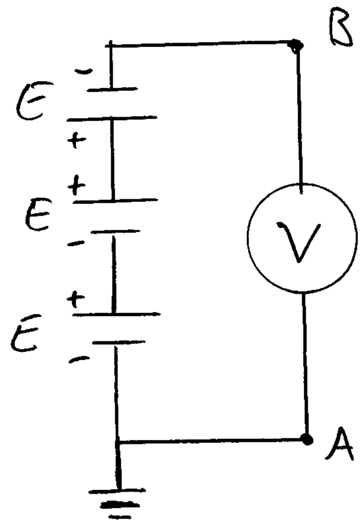
$$E = 1{,}5\,\mathrm{V}$$
$$l = 30\,\mathrm{cm}$$
$$R = 100\,\Omega$$

Punaisen vastuksen resistanssi on

$$R_\mathrm{p} = \rho\frac{l_0}{A_0},$$

missä l_0 on vastuslangan pituus, A_0 on poikkipinta-ala ja ρ on resistiivisyys.

a)



Lasketaan potentiaalit pisteissä A ja B

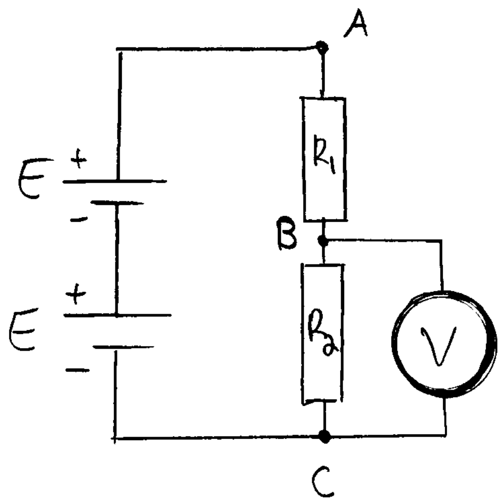
$$\begin{aligned} V_\mathrm{A} &= 0\,\mathrm{V} \\ V_\mathrm{B} &= E + E - E \\ &= 1{,}5\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Jännitemittarin lukema on

$$\begin{aligned} U_\mathrm{BA} &= V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} \\ &= 1{,}5\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Vastaus: Lukema on 1,5 V.

b) Piirretään liukuvastus kahdeksi erilliseksi vastukseksi.



Vastusten R_1 ja R_2 resistanssit ovat

$$\begin{aligned}
R_1 &= \rho\frac{l_1}{A_0}, \quad l_1 = 10\,\text{cm} \\
R_2 &= \rho\frac{l_2}{A_0}, \quad l_2 = 30\,\text{cm} - 10\,\text{cm} = 20\,\text{cm} \\
\frac{R_1}{R_2} &= \frac{\rho\cdot\frac{10\,\text{cm}}{A_0}}{\rho\cdot\frac{20\,\text{cm}}{A_0}} \\
\frac{R_1}{R_2} &= \frac{1}{2} \quad \|\cdot R_2 \\
R_1 &= \frac{1}{2}R_2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Määritetään piirissä kulkeva virta

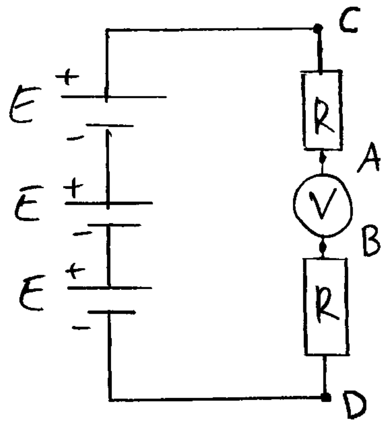
$$\begin{aligned}
\text{K 1:} \quad E + E - IR_1 - IR_2 &= 0 \\
2E &= IR_1 + IR_2 \\
I(R_1 + R_2) &= 2E \quad \| : (R_1 + R_2) \\
I &= \frac{2E}{R_1 + R_2} \quad \| \text{ sij. } (1) \\
I &= \frac{2E}{\frac{3}{2}R_2} \\
I &= \frac{4E}{3R_2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ohmin lain mukaan

$$\begin{aligned}
U_{BC} &= IR_2 \quad \| \text{ Sij. } (2) \\
U_{BC} &= \frac{4E}{3R_2}\cdot R_2 \\
U_{BC} &= \frac{4}{3}E \\
U_{BC} &= \frac{4}{3}\cdot 1{,}5\,\text{V} \\
U_{BC} &= 2\,\text{V}
\end{aligned}$$

Vastaus: Lukema on 2 V.

c)



Ideaalisen jännitemittarin sisäinen resistanssi on äärettömän suuri (todellisellakin mittarilla hyvin suuri). Näin ollen virta ei pääse kulkemaan pisteiden A ja B välillä, joten piiri on avoin, eikä koko piirissä kulje virtaa. Koska piirissä ei kulje virtaa, niin vastuksissa ei tapahdu potentiaalin alenemista. Siten

$$V_A = V_C \text{ ja } V_B = V_D.$$

Edelleen

$$U_{AB} = V_A - V_B = V_C - V_D = U_{CD}$$

Toisaalta U_{CD} on sama kuin sarjaan kytkettyjen jännitelähteiden yhteinen jännite, joten

$$U_{CD} = 3E = 3 \cdot 1{,}5V = 4{,}5\,\text{V}.$$

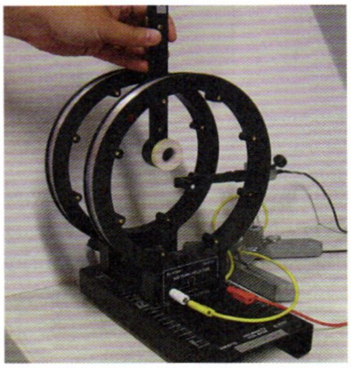
Vastaus: $\underline{\underline{\text{Lukema on } 4{,}5\,\text{V.}}}$

8. Induktioilmiötä tutkitaan kuvan laitteistolla, jossa on kaksi isoa kenttäkäämiä. Kun niissä kulkee samansuuntaiset, yhtä suuret sähkövirrat, syntyvä magneettikenttä on sangen tarkasti homogeeninen. Kenttäkäämien väliin pannaan tietokoneeseen kytketty magneettivuon tiheyttä mittaava anturi ja pieni testikäämi, jossa on 2 000 johdinkierrosta. Testikäämin johdinkierrosten keskimääräinen pinta-ala on $7{,}0\,\mathrm{cm}^2$. Kenttäkäämeihin johdetaan aaltomuodoltaan kolmiomainen vaihtovirta, ja käämien välissä vallitsevaa magneettivuon tiheyttä mitataan ajan funktiona (kuvaaja).

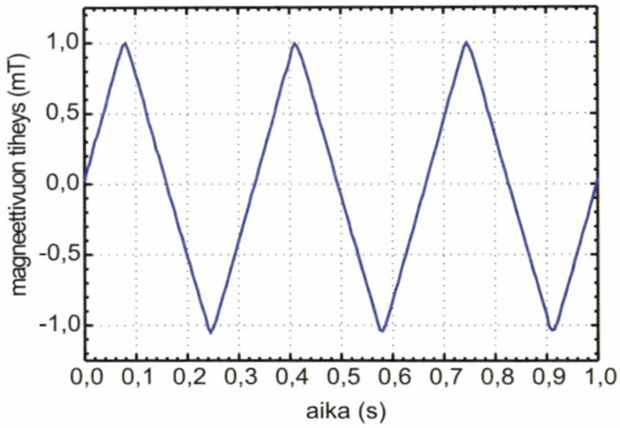
a) Missä asennossa kenttäkäämien suhteen testikäämin pitää olla, jotta siihen indusoituu mahdollisimman suuri jännite? Perustele.

b) Kuinka suuri on tämän jännitteen maksimiarvo?

c) Esitä graafisesti induktiojännite ajan funktiona.



Kuva: Ari Hämäläinen



Ratkaisu. a) Induktiolain mukaan indusoitunut jännite on

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt}. \tag{1}$$

Indusoitunut jännite on siis suoraan verrannollinen magneettivuon muutosnopeuteen. Magneettivuo ja siten myös magneettivuon muutosnopeus taas ovat suurimmillaan, kun testikäämin sisään rajoittama pinta on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan. Tämä tilanne syntyy, kun testikäämi on yhdensuuntainen kenttäkäämien kanssa, koska kenttäkäämien muodostama homogeeninen magneettikenttä on kohtisuorassa kenttäkäämejä vastaan.

Vastaus: Testikäämiin indusoituu suurin mahdollinen jännite,
kun se on yhdensuuntainen kenttäkäämien kanssa.

(Huom! Induktiolain voi luultavasti esittää myös ilman derivaattaa muodossa $e = N\Delta\Phi/\Delta t$, koska tässä tehtävässä magneettivuon muutos on tasaista. Toisaalta kaavan voi a-kohdassa jättää myös kokonaan pois ja selittää asian sanallisesti muutosnopeuden avulla.)

b) Kuvaajan perusteella magneettivuon tiheys vuoroin laskee tasaisesti ja nousee tasaisesti. Kuvasta mittaamalla voidaan todeta, että laskut ja nousut ovat lukematarkkuuden rajoissa kestoltaan saman suuruisia. Magneettivuon muutosnopeus on siis nousuissa ja laskuissa itseisarvoltaan yhtä suuri. Induktiolain mukaan indusoitunut jännite on siten myös nousun ja laskun aikana itseisarvoltaan yhtä suuri. Muutosnopeuden suunnan vaihtuessa, eli kolmioiden kärjissä muutosnopeus on hetkellisesti nolla ja huippukohdan lähiympäristössä jotakin nousu- ja laskunopeuden väliltä. Jännite käännöskohdissa on siis itseisarvoltaan pienempi kuin nousuissa ja laskuissa.

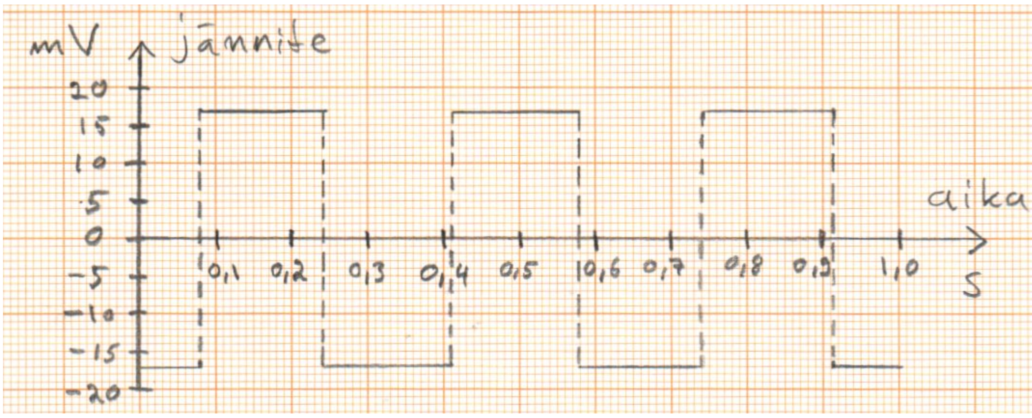
Kuvaajassa on kolme täyttä jaksoa, joiden yhteinen kesto on 1,0 s. Yksi nousu tai lasku on puoli jaksoa, joten yhden nousun tai laskun kesto Δt on keskimäärin $\Delta t = 1{,}0\,\mathrm{s}/6$. Kuvaajan perusteella magneettivuon tiheys vaihtelee välillä $-1{,}05\,\mathrm{mT}$ ja $1{,}0\,\mathrm{mT}$ molempien täysien jaksojen aikana, joten magneettivuon muutos on $\Delta B = 2{,}05\,\mathrm{mT}$ molemmissa jaksoissa.

Käämin kierrosluku $N = 2\,000$ ja pinta-ala $A = 7{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$. Induktiolain mukaan käämiin indusoitunut jännite on suuruudeltaan

$$\begin{aligned}
e &= N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \|\ \text{sij. } \Phi = BA \\
&= N\frac{\Delta(BA)}{\Delta t} \\
&= N\frac{\Delta B}{\Delta t}A \\
&= 2\,000 \cdot \frac{2{,}05\,\mathrm{mT}}{1{,}0\,\mathrm{s}/6} \cdot 7{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\
&= 17{,}22\,\mathrm{mV}
\end{aligned}$$

Vastaus: Jännitteen maksimiarvo on 17 mV.

c) b-kohdan tulosten perusteella ja käyttäen induktiolain (1) merkkisääntöä saadaan alla oleva kuva.


mV
jännite
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
aika
s

9. Suomalaisten vuotuisesta säteilyannoksesta tilastollisesti yli puolet johtuu radonisotoopista ^{222}Rn, joka aiheuttaa mm. 15 % Suomen keuhkosyöpätapauksista.

a) Kirjoita ^{222}Rn:n hajoamista kuvaava yhtälö. (1 p.)

b) Mistä radon on peräisin, ja miksi se on ongelma erityisesti omakotitalojen sisäilmassa? Miten radonhaittoja voidaan torjua? (3 p.)

c) Uusien asuntojen sisäilmassa hyväksytään enintään radonpitoisuus 200 Bq/m^3 (aktiivisuus ilmakuutiometriä kohti). Paljonko radonia (grammoina) on tällöin kuutiometrissä ilmaa? (2 p.)

Ratkaisu. a) ^{222}Rn on α-aktiivinen isotooppi. Sen hajoamisyhtälö on

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

b) Radonin ^{222}Rn isotooppia syntyy maaperässä olevan uraanin ^{238}U hajotessa. ^{238}U isotooppi on maaperän yleisin uraanin isotooppi. Koska radon on kaasu, se voi liikkua helposti maaperässä ja sitä kautta päätyä ilmakehään ja edelleen huoneilmaan. Ilmassa leijuvat radonin hajoamistuotteet kulkeutuvat hengityksen mukana keuhkoihin. Hajoamistuotteet tarttuvat keuhkojen sisäpintaan, missä ne lähettävät alfasäteilyä. Keuhkojen saama säteilyannos lisää riskiä sairastua keuhkosyöpään.
Radonkaasu voi aiheuttaa terveyshaittoja huonosti ilmastoiduissa rakennuksissa, koska se voi kulkeutua rakennukseen sen alla ja ympärillä olevasta maasta. Jotkut kiviperäiset rakennusmateriaalit voivat myös sisältää radonia. Radonia voi siirtyä myös maaperästä kaivoveteen ja sitä voi näin joutua ihmisen elimistöön.
Radonhaittoja voidaan torjua menetelmillä, joilla voidaan vähentää maaperästä peräisin olevan radonpitoisen ilman virtausta sisätiloihin. Tällaisia menetelmiä ovat radonimuri sekä radonkaivo. Radonin virtaus asuntoon vähenee myös vuotoreittien tiivistämisellä ja sisäilman radonpitoisuutta voidaan alentaa järjestämällä ilmanvaihto tehokkaaksi. Kellarin ilmanvaihdon parantaminen on tärkeä, koska talon alta tuleva radon päätyy ensiksi kellareihin.

c) Radonin puoliintumisaika ja moolimassa:

$$\begin{aligned} T_{1/2} &= 3{,}825d = 3\,600 \cdot 24 \cdot 3{,}825\,\mathrm{s} \\ M &= 222{,}017570\,\mathrm{g/mol} \end{aligned}$$

Suurin sallittu säteilypitoisuus on

$$\frac{A}{V} = 200\,\mathrm{Bq/m^3},$$

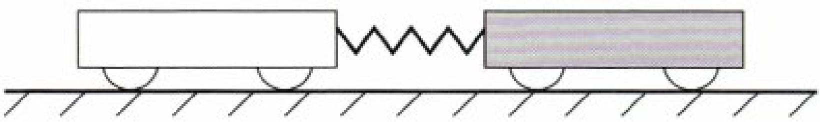
joten
$$A = 200\,\mathrm{Bq}.$$
Nyt
$$\begin{aligned}
A &= \lambda N \quad \| \text{ sij. } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \\
A &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \quad \| \text{ sij. } N = nN_A \\
A &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} nN_A \quad \| \text{ sij. } n = \frac{m}{M} \\
A &= \frac{\ln 2 \cdot mN_A}{T_{1/2}M} \quad \| \cdot (T_{1/2}M) \\
\ln 2 \cdot mN_A &= AT_{1/2}M \quad \| : (\ln 2 \cdot N_A) \\
m &= \frac{AT_{1/2}M}{\ln 2 \cdot N_A} \\
m &= \frac{200\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 3\,600 \cdot 24 \cdot 3{,}825\,\mathrm{s} \cdot 222{,}017570\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{\ln 2 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{mol}}} \\
m &= 3{,}51557\ldots \cdot 10^{-14}\,\mathrm{g} \\
&\approx 3{,}5 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{g}
\end{aligned}$$

Vastaus: Radonia on kuutiometrissä $3{,}5 \cdot 10^{-14}$ g.

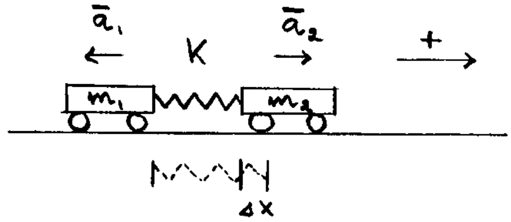
10. Vaakasuoralla radalla on levossa kaksi herkkäliikkeistä vaunua, joiden massat ovat 250 g ja 750 g. Vaunujen väliin pannaan irrallinen kevyt jousi, jonka jousivakio on 220 N/m. Vaunuja painetaan yhteen siten, että jousi lyhenee lepopituudestaan 4,0 cm. Vaunut päästetään yhtä aikaa irti.

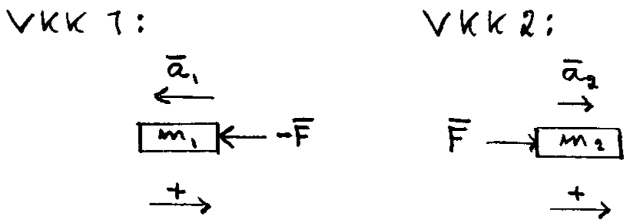
a) Laske vaunujen alkukiihtyvyydet.

b) Laske vaunujen saamat loppunopeudet.



Ratkaisu. a)





$$m_1 = 250\,\mathrm{g} \qquad k = 220\,\mathrm{N/m}$$
$$m_2 = 750\,\mathrm{g} \qquad \Delta x = 4{,}0\,\mathrm{cm}$$

Newtonin II:n lain mukaan

$$-\overline{F} = m_1\bar{a}_1$$
$$-F = m_1 a_1 \quad \| : m_1$$
$$a_1 = -\frac{F}{m_1} \tag{1}$$

Vastaavasti vaunulle 2 saadaan

$$\overline{F} = m\bar{a}_2$$
$$F = m_2 a_2 \quad \| \cdot m_2$$
$$a_2 = \frac{F}{m_2} \tag{2}$$

Jousivoiman suuruus on Hooken lain mukaan

$$F = k\Delta x. \tag{3}$$

Sij. (3) yhtälöihin (1) ja (2), saadaan

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{k\Delta x}{m_1} = -\frac{220\,\mathrm{N/m}\cdot 0{,}04\,\mathrm{m}}{0{,}25\,\mathrm{kg}} = -35{,}2\,\mathrm{m/s^2} \quad \text{ja} \\ a_2 &= \frac{k\Delta x}{m_2} = \frac{220\,\mathrm{N/m}\cdot 0{,}04\,\mathrm{m}}{0{,}75\,\mathrm{kg}} = 11{,}733\ldots\ \mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Vastaus: Pienempimassaisen vaunun kiihtyvyys on suuruudeltaan $35\,\mathrm{m/s^2}$ ja suurempimassaisen $12\,\mathrm{m/s^2}$ vastakkaisiin suuntiin.

b) Jousivoima tekee vaunuihin työn

$$W = \frac{1}{2}k\Delta x^2. \tag{4}$$

Työperiaatteen mukaan

$$E_{\mathrm{kl}} - E_{\mathrm{ka}} = W.$$

Merkitään vaunujen alkunopeuksia v_1 ja v_2 ja loppunopeuksia u_1 ja u_2, saadaan

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2\right) &= W \quad \|\ \text{sij. } v_1 = v_2 = 0\,\mathrm{m/s} \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 &= W \quad \|\ \text{sij. (4)} \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 &= \frac{1}{2}k\Delta x^2 \end{aligned}$$

Merkitään vielä $m_1 = m$ ja $m_2 = 3m$, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mu_2^2 &= \frac{1}{2}k\Delta x^2 \quad \|\cdot 2 \\ mu_1^2 + 3mu_2^2 &= k\Delta x^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Liikemäärän säilymislain mukaan

$$\begin{aligned} m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 &= m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 \\ m_1u_1 + m_2u_2 &= m_1v_1 + m_2v_2 \\ mu_1 + 3mu_1 &= m_1\cdot 0\,\mathrm{m/s} + m_2\cdot 0\,\mathrm{m/s} \\ mu_1 + 3mu_2 &= 0 \quad \|\ :m \\ u_1 + 3u_2 &= 0 \\ u_1 &= -3u_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Sij. (6) yhtälöön (5), saadaan

$$
\begin{aligned}
m(-3u_2)^2 + 3mu_2^2 &= k\Delta x^2 \\
9mu_2^2 + 3mu_2^2 &= k\Delta x^2 \\
12mu_2^2 &= k\Delta x^2 \quad \| : (12m) \\
u_2^2 &= \frac{k\Delta x^2}{12m} \\
u_2 &= \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{k\Delta x^2}{12m}} \\
u_2 &= \frac{\Delta x}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{3m}} \\
u_2 &= \frac{0{,}04\,\mathrm{m}}{2} \cdot \sqrt{\frac{220\,\mathrm{N/m}}{3 \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg}}} \\
u_2 &= 0{,}3425\ldots\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

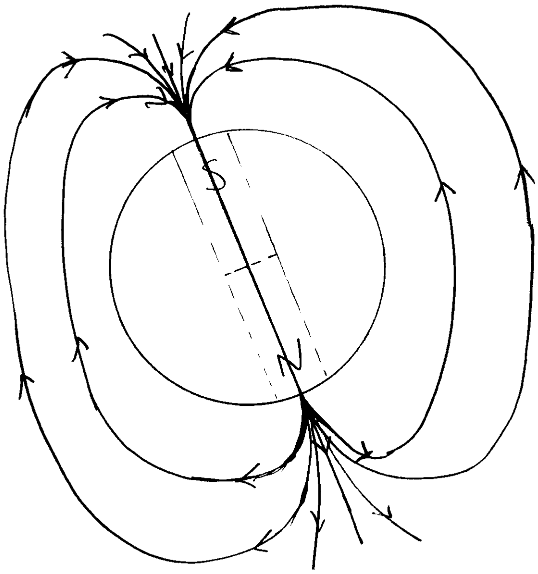
Negatiivinen arvo hylätään, koska vaunu 2 liikkuu lopussa oikealle, eli positiiviseen suuntaan. Sij. u_2:n arvo yhtälöön (6), saadaan

$$
u_1 = -3 \cdot 0{,}3425\ldots\ \mathrm{m/s} = -1{,}0276\ldots\ \mathrm{m/s}.
$$

Vastaus: Pienempimassaisen vaunun nopeus on suuruudeltaan 1,0 m/s ja suurempimassaisen 0,34 m/s vastakkaiseen suuntaan.

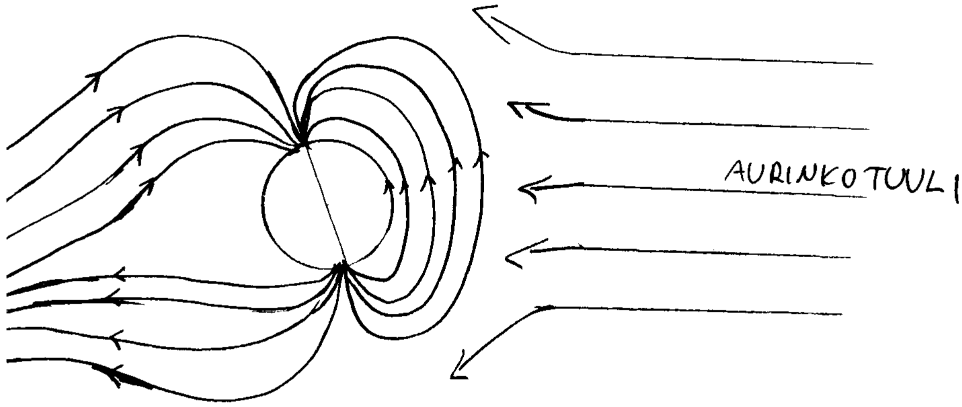
11. Mistä Maan magneettikenttä aiheutuu? Kuvaile kentän muotoa lähellä Maan pintaa ja avaruudessa. Millainen on kosmisen säteilyn vuorovaikutus Maan magneettikentän kanssa?

Ratkaisu. Yleisimmän teorian mukaan Maan magneettikenttä aiheutuu Maan sulassa ytimessä olevien varattujen metallihiukkasten liikkeistä. Varattujen hiukkasten liikkuessa syntyy sähkövirtauksia, jotka aiheuttavat ympärilleen magneettikenttiä. Näiden kenttien yhteisvaikutuksena syntyy voimakkaampi magneettikenttä, jonka eteläkohtio on lähellä maantieteellistä pohjoisnapaa ja pohjoiskohtio on lähellä maantieteellistä etelänapaa.
Maan pinnan lähellä magneettikenttä käyttäytyy samankaltaisesti kuin dipolisen sauvamagneetin magneettikenttä. Magneettikentän kenttäviivat kulkevat pohjoiskohtiosta (etelänapa) eteläkohtioon (pohjoisnapa) kuvan 1 mukaisesti.



Kuva 1.

Maan magneettikenttä muuttuu kauempana avaruudessa. Auringosta peräisin oleva kosminen säteily, eli aurinkotuuli muuttaa maan magneettikenttää. Aurinkotuuli painaa magneettikenttää Auringon puolella lähemmäksi Maata ja toisella puolella magneettikentällä on pitkälle avaruuteen ulottuva pyrstö kuvan 2 mukaisesti.



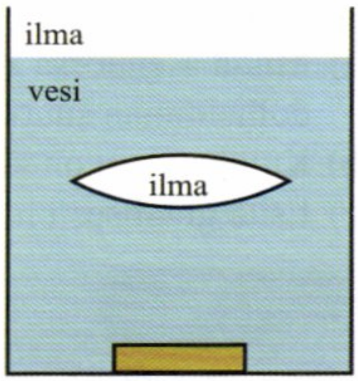
Kuva 2.

Kosminen säteily koostuu pääasiassa varatuista hiukkasista kuten protoneista ja elektroneista. Nämä vaikuttavat Maan magneetikentän kanssa sähkömagneettisen vuorovaikutuksen kautta. Liikkuviin varattuihin hiukkasiin kohdistuu sähkömagneettinen voima, joka ohjaa suurimman osan niistä Maan ohi. Maan magneettikenttä estää siis säteilyn suurinta osaa pääsemästä maan pinnalle. Magneettikenttä ohjaa osan säteilystä navoille, joilla ne voidaan toisinaan nähdä ilmakehässä revontulina.

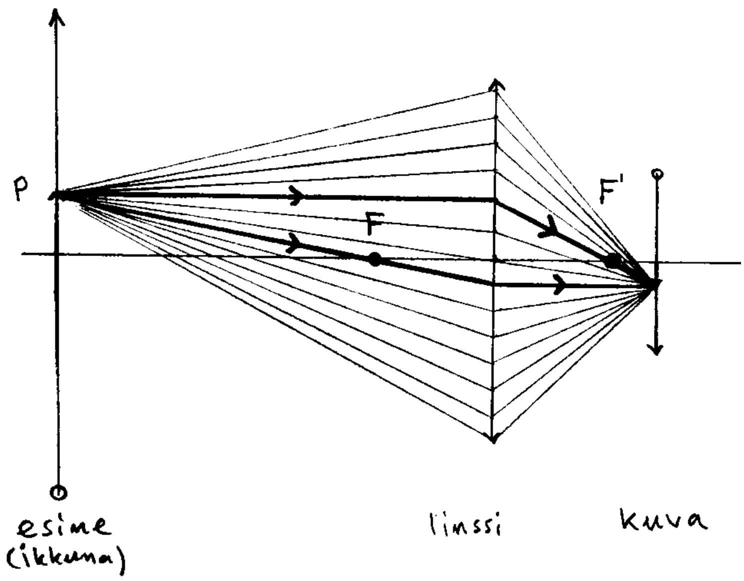
+12. a) Ympyränmuotoisella kuperalla linssillä muodostetaan huoneen ikkunan kuva vastapäiselle seinälle. Linssistä peitetään alempi puolisko mustalla pahvilla. Mitä tapahtuu kuvalle seinällä? Perustele. (2 p.)

b) Vanhojen kameroiden harrastaja kuvaa antiikkikameralla, jonka objektiivina on yksi linssi. Hän ottaa ensin valokuvan Kuusta ja toteaa, että kuvasta tulee terävä, kun objektiivi on 20,0 cm:n etäisyydellä filmistä. Seuraavaksi hän haluaa kuvata maljakon, jonka hän sijoittaa 1,20 m:n päähän objektiivista. Kuinka suuri täytyy objektiivin ja filmin välisen etäisyyden olla, jotta maljakon kuvasta tulee terävä? (3 p.)

c) Kaksi kellolasia liitetään reunoistaan tiiviisti yhteen. Näin syntynyt ilmatäytteinen linssi upotetaan vesiastiaan (kuva). Miltä astian pohjalla oleva kolikko näyttää, kun sitä katsotaan ylhäältä veden pinnan ja linssin läpi? Perustele. (4 p.)



Ratkaisu. a)



Kuva 1.

Kuvassa on esitetty ikkunan mielivaltaisesta pisteestä P lähtevät valonsäteet, jotka kulkevat linssin kautta ja muodostavat kuvan seinälle. Mittasuhteet todellisessa tilanteessa eroavat siten, että ikkuna on huomattavasti kauempana ja linssin koko on pienempi suhteessa ikkunaan, mutta kuvan tilanne on havainnollistava. Kuvassa on piirretty kaksi kuperan linssin erikoista valonsädettä paksummalla viivalla. Kaikki muut pisteestä P lähtevät ja linssin kautta kulkevat valonsäteet leikkaavat samassa pisteessä kuin erikoiset säteet, ja tähän pisteeseen syntyy pisteen P kuva. Jos linssin alempi puolisko (tai itseasiassa kumpi tahansa puolisko) peitetään mustalla pahvilla, niin puolet kuvassa esitetyistä valonsäteistä estyy pääsemästä varjostimena toimivalle seinälle. Tällöin kuvasta tulee hämärämpi siten, että seinästä heijastuvan valon intensiteetti on puolet alkuperäisestä. Tarkastelun tulos on täsmälleen sama, jos tarkasteltavaksi pisteeksi P valitaan jokin pääakselin alapuolinen piste. Siinä tapauksessa valonsäteiden kulku on muuten samanlainen kuin yllä olevassa tilannekuvassa, mutta peilikuva pääakselin suhteen.

b) Tutkitaan kuvan muodostumista Kuusta. Linssin kuvausyhtälö on

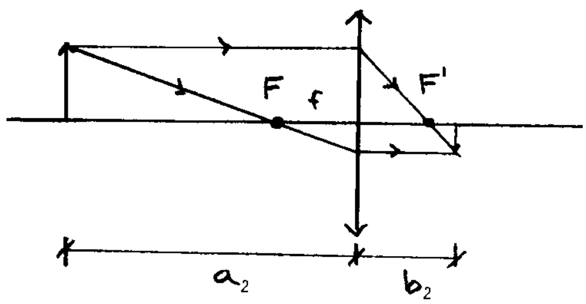
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f},$$

jossa a_1 on Kuun etäisyys linssistä, b_1 on kuvan etäisyys linssistä ja f on linssin polttoväli. a on hyvin suuri verrattuna muihin etäisyyksiin, joten osamäärä $\frac{1}{a} \approx 0\,\frac{1}{\text{m}}$. Kuvausyhtälö tulee siten muotoon

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad \|\ ()^{-1}$$
$$b_1 = f,$$

eli terävä kuva muodostuu polttopisteen etäisyydelle linssistä. Siten $f = b_1 = 20{,}0\,\text{cm}$.

Tutkitaan maljakon kuvan muodostumista.



Kuva 4.

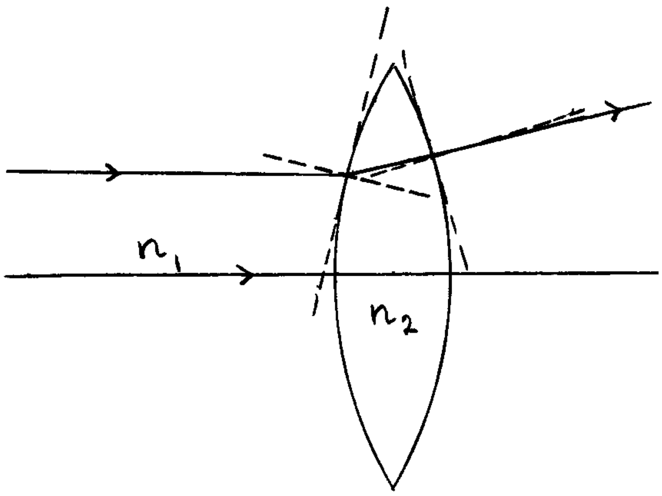
$a_2 = 1{,}20\,\text{m}$ $\qquad b_2 = ?$

Kuvausyhtälön mukaan

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f}-\frac{1}{a_2} \quad \|()^{-1}$$
$$b_2=\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{a_2}\right)^{-1}$$
$$b_2=\left(\frac{1}{20{,}0\,\mathrm{cm}}-\frac{1}{120\,\mathrm{cm}}\right)^{-1}$$
$$b_2=24\,\mathrm{cm}$$

Vastaus: Kysytty etäisyys on 24 cm.

c) Tilannetta voidaan tarkastella linssisysteeminä, jossa ilmalinssin muodostama kuva toimii esineenä toiselle linssille, joka tässä tilanteessa on veden ja ilman rajapinta. Tutkitaan ensin, millainen on ilmalinssin muodostama kuva.



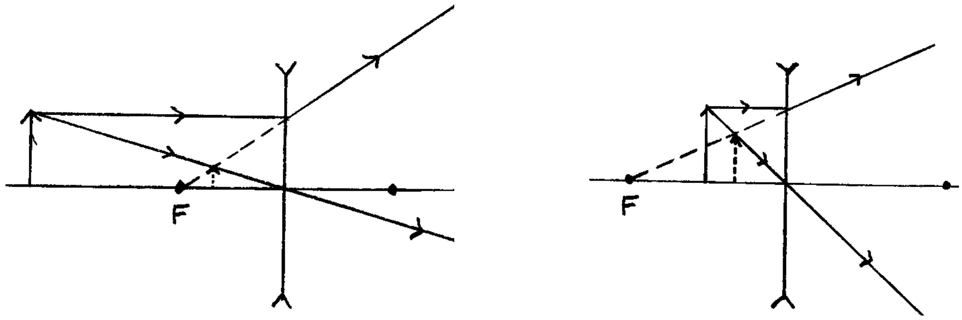
Kuva 5.

$n_1 = 1{,}0$ $\qquad$ $n_2 = 1{,}33$

Kuvassa 5 on esitetty ilmalinssiin osuvan valonsäteen taittuminen linssissä. Ilma on optisesti harvempaa kuin vesi, joten tullessaan rajapinnan läpi linssiin valonsäde taittuu normaalista poispäin. Poistuessaan linssistä valonsäde taittuu pinnan normaalia kohti. Linssin keskelle tuleva valonsäde osuu pintaan, joka on kohtisuorassa valonsädettä vastaan, joten valonsäde ei muuta suuntaansa. Lopputuloksena ilmalinssi hajottaa siihen tulevia valonsäteitä.

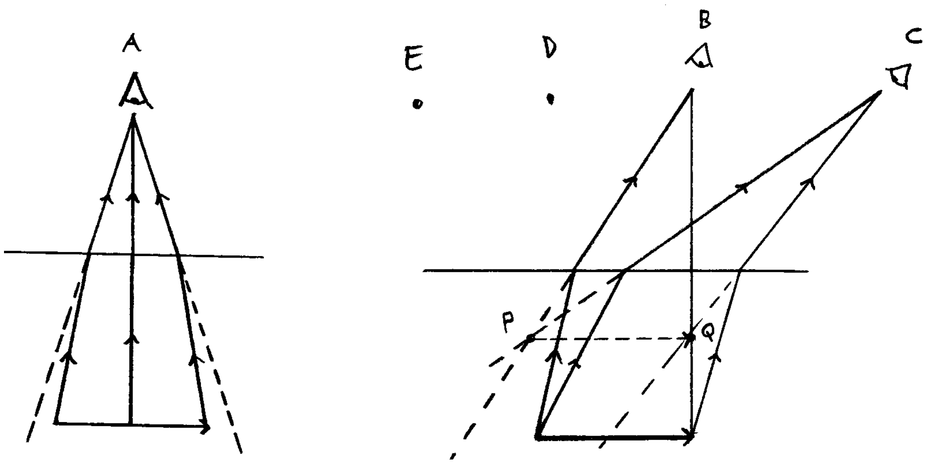
Kellolasien tarkkaa muotoa ei tehtävänannon perusteella tunneta, mutta oletetaan, että linssillä on olemassa polttopiste, ja että se toimii likimain koveran linssin tavoin. Kovera linssi muodostaa esineestä aina pienennetyn valekuvan, joka on samalla puolella linssiä kuin esine mutta lähempänä linssiä. Tilanne on esitetty kuvassa 6.

(Huomautus lukijalle: Kuvan 6 esittämistä tuskin vaaditaan arvostelussa, koska kuvan muodostuminen koverassa linssissä on esitetty oppikirjoissa)



Kuva 6.

Tarkastellaan seuraavaksi, millaisen kuvan veden ja ilman rajapinta synnyttää. Kuvan 7 pisteessä A oleva havaitsija katsoo veden alla olevaa esinettä (tai kuvaa) ylhäältä päin. Esineestä havaitsijaa kohti tulevat valonsäteet taittuvat veden ja ilman rajapinnassa normaalista poispäin. Valonsäteet tulevat havaitsijaa kohti katkoviivan osoittamista suunnista, joten pisteessä A oleva havaitsija näkee esineen todellista suuremmassa kulmassa. Myös pisteissä B ja C olevat havaitsijat näkevät esineen todellista suuremmassa kulmassa. Suurempi näkökulma on yhteistä kaikista pisteistä saataville havainnoille.



Kuva 7.

Kun havaitsija on pisteessä B, niin esineen vasen reuna näyttää olevan pisteen P suunnassa. Kun havaitsija on pisteessä C, niin esineen vasen reuna näyttää myös silloin olevan pisteen P suunnassa. Havaitsijalle syntyy kuva siitä, että vasen reuna on pisteessä P ja vastaavasti oikea reuna pisteessä Q. Esineen kuva on siis janalla PQ ja esine näyttää olevan todellista lähempänä. Kuvan mittasuhteita on havainnolistamisen vuoksi liioiteltu, eikä esine näytä todellisuudessa olevan yhtä lähellä kuin kuvassa.

Jos sama tarkastelu tehdään pisteiden D ja E välillä, niin esine näyttää myös silloin olevan todellista lähempänä, mutta hieman oikealla. Tämä johtuu siitä, että tilannekuva on täsmälleen sama kuin pisteitä B ja C tarkasteltaessa, mutta kaikki valonsäteet peilataan kuvan pystysuuntaisen keskilinjan suhteen. Kuvalla ei siis ole yksikäsitteistä paikkaa, mutta esine näyttää aina olevan todellista lähempänä. Esineen ja kuvan koko eivät suuresti eroa toisistaan.

Ilmalinssi saa siis esineen näyttämään todellista pienemmältä ja esine näyttää olevan todellista lähempänä. Veden ja ilman rajapinnan vuoksi esine näyttää olevan vieläkin lähempänä.

Vastaus: Kolikko näyttää todellista pienemmältä ja se näyttää olevan todellista lähempänä.

(Huomautus lukijalle! Uskomme, että c-kohdasta voi saada täydet pisteet, vaikka veden ja ilman rajapinnan vaikutus muodostuvaan kuvaan olisi käsitelty huomattavasti pinnallisemmin kuin tässä. Pelkkä toteamus siitä, että vaikutus on vähäinen verrattuna linssin vaikutukseen saattaa riittää tai ainakaan siitä ei menetä paljoa pisteitä. Eihän tässäkään esitetty ratkaisu ole tyhjentävä, mutta lähes varmasti riittävä.)

+13. Ilmastonmuutoksen välttämiseksi energiantuotannossa etsitään hiilidioksidipäästöistä vapaita tuotantotapoja. Oheinen ulkoministeriön julkaisema uutinen kertoo Desrtec-hankkeesta, jossa Pohjois-Afrikkaan rakennettaisiin suuria aurinkovoimaloita. Voimalat olisivat ns. aurinkolämpövoimaloita, joissa Aurinkoa seuraavien peilien avulla suunnataan säteily putkiin, joissa oleva vesi lämpenee ja höyrystyy. Höyry pyörittää turpiineja kuten muissakin lämpövoimaloissa. Aurinkolämpövoimalan on arveltu sietävän ankaria oloja, mm. hiekkamyrskyjä, paremmin kuin aurinkopaneelit. Aurinkolämpövoimalassa energiaa voidaan myös varastoida höyryyn lyhyeksi aikaa tai sulatettuihin mineraaleihin pidemmäksi ajaksi.

a) Tarkastele aurinkolämpövoimalan ja aurinkopaneeleiden sähköntuotannossa tapahtuvia energian muutoksia. (2 p.)

b) Auringon säteilyn energia Saharassa on keskimäärin 2,2 TWh neliökilometria kohti vuodessa. Desertec-projektissa on laskettu, että Euroopan sähköntarpeen 3 200 TWh tyydyttämiseen riittäisi 125 km × 125 km:n suuruinen alue. Kuinka suuri on energian tuotannon hyötysuhde näissä laskelmissa? (2 p.)

c) Millä muilla tavoilla voidaan tuottaa sähköenergiaa ilman hiilidioksidipäästöjä? Tarkastele energian muuttumista muodosta toiseen mainitsemissasi sähköntuotantotavoissa. (5 p.)

> **Raportit, 23.7.2009 | Suomen suurlähetystö, Berliini**
>
> **Desertec Industrial Initiative -aurinkoenergiahankkeesta sovittu Saksassa**
>
> Saksassa on sovittu Pohjois-Afrikkaan aurinkovoimaloita rakentavan yrityskoalition perustamisesta. Hankkeen tavoite on tuottaa 15 prosenttia Euroopan energiantarpeesta vuoteen 2050 mennessä. Teknologia ja valmius rakentaa voimalat ja jakeluverkko on olemassa, mutta energiariippuvuus epävakaasta Pohjois-Afrikasta huolettaa.
>
> http://www.kauppapolitiikka.fi/Public/default.aspx?contentid=168115&nodeid=41396&contentlan=1&culture=fi-FI

Ratkaisu. a) Aurinkolämpövoimalassa auringosta lämpösäteilynä tuleva lämpöenergia kasvattaa putkissa kulkevan veden sisäenergiaa, kun vesi lämpenee ja höyrystyy. Paine-ero putkistossa saa höyryn liikkeelle ja höyryn kulkiessa turbiinin läpi höyry tekee työtä siihen. Tällöin höyryn sisäenergia pienenee, mikä näkyy höyryn lämpötilan laskuna turbiinissa. Vesihöyryn turbiiniin tekemä työ muuttuu turbiinin liike-energiaksi. Generaattori muuttaa turbiinin liike-energian sähköenergiaksi.

Aurinkopaneelissa Auringon säteilyenegia muuttuu valosähköisessä ilmiössä elektronien liike-energiaksi. Auringon säteily osuu paneelin puolijohteen pintaan irrottaen siitä elektroneja. Elektronit johdetaan sähkölaitteeseen tai akkuun. Näin niiden liike-energia muuttuu sähköenergiaksi.

b) Auringon säteilyn energia neliökilometriä kohden vuodessa on

$$\frac{E}{A} = 2{,}2\,\mathrm{TWh/km^2}.$$

Energiaa kerätään alueelta, jonka pinta-ala on

$$A = 125\,\mathrm{km} \times 125\,\mathrm{km} = 15\,625\,\mathrm{km^2}.$$

Alueelle tulee Auringon säteilyenergiaa vuodessa

$$E = 2{,}2\,\mathrm{TWh/km^2} \cdot 15\,625\,\mathrm{km^2} = 34\,375\,\mathrm{TWh}.$$

Oletettu sähköenergian tuotto on

$$E_T = 3\,200\,\mathrm{TWh}$$

Hyötysuhde on

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{E_\mathrm{T}}{E} \\
\eta &= \frac{3\,200\,\mathrm{TWh}}{34\,375\,\mathrm{TWh}} \\
&= 0{,}093090\ldots \\
&\approx 0{,}093.
\end{aligned}$$

Vastaus: Hyötysuhde on laskelmissa 0,093.

c)

Fuusiovoima ja fissiovoima

Ytimien ydinenergia kasvattaa veden sisäenergiaa veden lämmetessä ja höyrystyessä. Tästä eteenpäin höyryn lämpöenergia muuttuu kuten aurinkolämpövoimalassa lopulta sähköenergiaksi.

Tuulivoima

Ilman liike-energia muuttuu voimalan siipien liike-energiaksi. Generaattori muuttaa siipien liike-energian sähköenergiaksi. Ilman liike-energia on pohjimmiltaan peräisin auringosta.

Vesivoima
Veden liike-energia muuttuu turbiinin liike-energiaksi. Generaattori muuttaa turbiinin liike-energian sähköenergiaksi. Veden liike-energia on pohjimmiltaan peräisin auringosta.

Vuorovesivoima
Vuorovesi-ilmiössä Kuun ja Maan liike-enegia muuttuu veden liike-energiaksi. Veden liike-energia muuttuu turbiinin liike-energiaksi. Generaattori muuttaa turbiinin liike-energian sähköenergiaksi.

Geoterminen energia
Maan sisuksissa radioaktiivisten aineiden ydinenergia muuttuu maan lämpöenergiaksi. Maan lämpöenergia kasvattaa veden sisäenergiaa veden lämmetessä ja höyrystyessä. Tästä eteenpäin höyryn lämpöenergia muuttuu kuten aurinkolämpövoimalassa lopulta sähköenergiaksi.