

MAFYNETTI



Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (*) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. Ratkaise yhtälöt

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

2. a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.

b) Laske lausekkeen $\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6$ arvo.

c) Sievennä lauseke $\ln \frac{x}{2} + \ln 2$.

d) Sievennä lauseke $\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi)$.

e) Laske integraali $\int_0^1 (x+1) dx$.

f) Laske funktion $f(x) = 4e^{2x}$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

3. Näytä, että pisteet $A = (2,1)$, $B = (4,0)$ ja $C = (5,7)$ ovat suorakulmaisen kolmion kärjissä.

4. Määritä kaikki vektorit $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, joiden pituus on $\sqrt{22}$ ja joiden kohtisuora projektio xy -tasolle on vektori $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

5. Määritä funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ suurin arvo, kun $x > 0$.

6. Ringettejoukkueen kolmen hyökkääjän todennäköisyydet tehdä maali rangaistuslaukauksella ovat 65 %, 75 % ja 54 %. Kukin kolmesta hyökkääjästä saa yhden yrityksen.

a) Millä todennäköisyydellä ainakin yksi hyökkääjä tekee maalin?

b) Laske rangaistuslaukausmaalien lukumäärän odotusarvo.

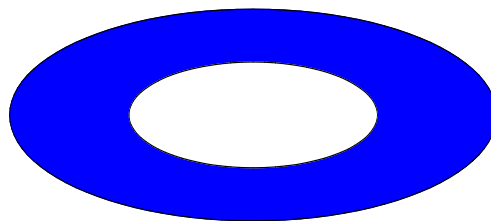
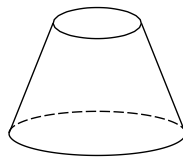
7. Olkoon $t > 0$. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteen $\left(0, \frac{1}{t}\right)$ kautta ja sivuaa x -akselia pisteessä $(t, 0)$.
- a) Määritä kertoimet a , b ja c parametrin t avulla lausuttuna.
- b) Näytä, että paraabelin ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen pinta-ala ei riipu parametrin t arvosta.

8. Eräässä huippuyliopistossa on 5 000 opiskelijaa, joista yksi sairastuu hiihtolomalta palattuaan influenssaan. Virus alkaa levitä kampuksella, ja siihen sairastuneiden opiskelijoiden lukumäärää kuvaa funktio

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}},$$

jossa aika $t \geq 0$ lasketaan vuorokausina ensimmäisestä sairastumisesta alkaen.

- a) Luennot peruutetaan, jos yli 50 % opiskelijoista on sairaana. Kuinka monen vuorokauden kuluttua ensimmäisestä sairastumisesta näin tapahtuu?
- b) Näytä, että $f(t)$ on kasvava funktio, kun $t > 0$.
- c) Laske $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.
9. Suoran ympyräkartion korkeus on 5,0 cm, ja sen pohjan säde on 2,0 cm. Kartio katkaistaan niin, että yläreunan säde on 1,0 cm. Tämän jälkeen katkaistun kartion vaippa maalataan siniseksi ja sitä pyöritetään kyljellään paperilla. Määritä näin saadun sinisen rengasalueen pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella.

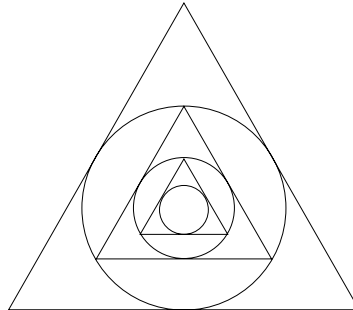


10. Ratkaise yhtälöt

a) $3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$

b) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$

- 11.** Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a . Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1 , joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2 , jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1 . Jatkamalla näin saadaan oheisen kuvan mukainen päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, \dots$. Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



- 12.** Tuotteen hinta- ja muut tiedot voidaan tallentaa viivakoodiin (UPC = Universal Product Code). Numeerisessa muodossa viivakoodi on lukujono $(d_1, d_2, \dots, d_{12})$, jossa kukin $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Viimeinen luku d_{12} on tarkistusmerkki, joka määräytyy ehdosta

$$3(d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

- a)** Tuotteen viivakoodi on $(1, 4, 2, 6, 8, 2, 5, 9, 0, 3, 2, d_{12})$. Mikä on tarkistusmerkki d_{12} ?
- b)** Näytä, että viivakoodi $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$ on virheellinen.
- c)** Määritä b-kohdan oikea koodi, kun tiedetään, että virhe on kolmannessa merkissä.



Esimerkki viivakoodista

<<http://en.wikipedia.org/wiki/Barcode>>. Luettu 29.3.2011.

- 13.** Funktioiden $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3 \cos x$ kuvaajilla on kolme leikkauspistettä. Laske niiden koordinaateille kaksidesimaaliset likiarvot valitsemallasi numeerisella menetelmällä.

***14.** Hyperbolinen kosini $\cosh x$ ja hyperbolinen sini $\sinh x$ määritellään kaavoilla

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{ja} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

kun $x \in \mathbf{R}$.

a) Näytä, että $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. (2 p.)

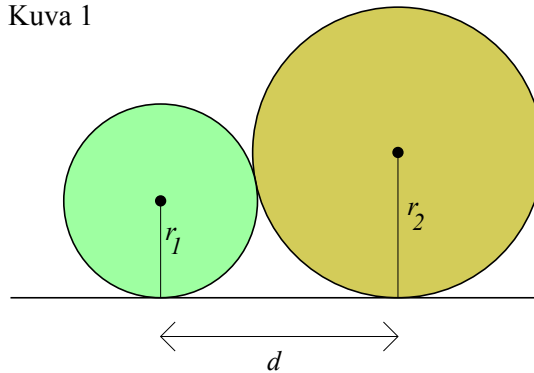
b) Näytä, että $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$. (2 p.)

c) Näytä, että funktiolla $\sinh x$ on käänteisfunktio, ja määritä sen lauseke logaritmin avulla lausuttuna. (3 p.)

d) Mikä on c-kohdan käänteisfunktion määrittelyjoukko? (2 p.)

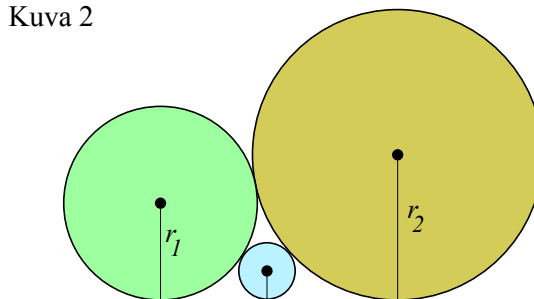
***15. a)** Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ja x -akselia kuvan 1 mukaisesti. Määritä ympyröiden keskipisteiden vaakasuora etäisyys d niiden säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 1



b) Kolme ympyrää sivuaa toisiaan ja x -akselia kuvan 2 mukaisesti. Määritä keskimmäisen ympyrän säde r_3 kahden reunimmaisen ympyrän säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 2



c) Todista René Descartesin (1596–1650) keksimä b-kohdan ympyröihin liittyvä kaava

$$(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2),$$

jossa $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, 3$. (3 p.)

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Pitkä matematiikka, kevät 2012

Mallivastaukset, 23.3.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia opimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet: www.mafyvalmennus.fi
s-posti: info@mafyvalmennus.fi
puhelin: (09) 3540 1373

1. a)

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} && 1 \text{ p} \\
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\
 x &= \frac{1 \pm 5}{2} \\
 x &= \frac{1+5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{2} \\
 \underline{\underline{x=3}} \quad &\text{tai} \quad \underline{\underline{x=-2}} && 1 \text{ p (2 p)}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} &= 0 \quad \| \cdot 18 \\
 \frac{\overset{3}{\cancel{18}}x}{\underset{1}{\cancel{6}}} - \frac{\overset{9}{\cancel{18}}(x-3)}{\underset{1}{\cancel{2}}} - \frac{\overset{2}{\cancel{18}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{9}}} &= 0 && 1 \text{ p (3 p)} \\
 3x - 9(x-3) - 14 &= 0 \\
 3x - 9x + 27 &= 14 \\
 -6x &= 14 - 27 \\
 -6x &= -13 \quad \| : (-6) \\
 x &= \frac{13}{6} \\
 x &= 2\frac{1}{6} && 1 \text{ p (4 p)} \\
 \underline{\underline{x}} &
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2} - \frac{2}{x} &= 0 \quad \| \cdot x, \text{ määrittelyehto: } x \neq 0 \\
 \frac{x^2}{2} - 2 &= 0 && 1 \text{ p (5 p)} \\
 \frac{x^2}{2} &= 2 \quad \| \cdot 2 \\
 x^2 &= 4 \\
 x &= \pm\sqrt{4} \\
 \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{\pm 2}} && 1 \text{ p (6 p)}
 \end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2 &= \frac{15}{4} - 2^2 \\ &= \frac{15}{4} - 4 \\ &= \frac{15}{4} - \frac{16}{4} \\ &= -\frac{1}{4} \quad \text{1 p}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6 &= \sqrt{36} - 6 \\ &= 6 - 6 \\ &= \underline{\underline{0}} \quad \text{1 p (2 p)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\ln \frac{x}{2} + \ln 2 &= \ln x - \ln 2 + \ln 2 \\ &= \underline{\underline{\ln x}} \quad \text{1 p (3 p)}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi) &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= \underline{\underline{1}} \quad \text{1 p (4 p)}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+1) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 0 \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad \text{1 p (5 p)}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}f(x) &= 4e^{2x} \\ f'(x) &= 8e^{2x} \\ f'(0) &= 8e^{2 \cdot 0} = 8 \cdot 1 = \underline{\underline{8}} \quad \text{1 p (6 p)}\end{aligned}$$

3. $A = (2, 1)$, $B = (4, 0)$, $C = (5, 7)$

Lasketaan janojen AB , BC ja AC pituuksien neliöt.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{5} \quad || \quad ()^2$$

$$|AB|^2 = 5$$

$$|BC| = \sqrt{(5 - 4)^2 + (7 - 0)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{50} \quad || \quad ()^2$$

$$|BC|^2 = 50$$

$$|AC| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 1)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{45} \quad || \quad ()^2$$

$$|AC|^2 = 45$$

2 p

Jos kolmio ABC on suorakulmainen, sen sivut toteuttavat pythagoraan lauseen. Pisin sivu on BC , joten se on ehdokas hypotenuusaksi.

Pythagoraan lause:

1 p (3 p)

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$

$$50 = 45 + 5$$

$$50 = 50, \quad \text{tosi}$$

2 p (5 p)

Koska sivut AB , AC ja BC toteuttavat Pythagoraan lauseen, pisteet A , B ja C ovat suorakulmaisen kolmion kärjissä. $\square$

1 p (6 p)

4.

$$\begin{aligned}\bar{a} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ |\bar{a}| &= \sqrt{22}\end{aligned}\tag{1}$$

Vektorin $\bar{a}$ kohtisuora projektio xy -tasolle on

$$\bar{a}_{xy} = x\bar{i} + y\bar{j}. \quad 1 \text{ p}$$

Toisaalta tehtävänannon mukaan

$$\bar{a}_{xy} = 2\bar{i} + 3\bar{j}.$$

Näin ollen

$$x = 2 \quad \text{ja} \quad y = 3. \quad 2 \text{ p (3 p)}$$

Yhtälöstä (1) saadaan

$$\begin{aligned}|\bar{a}| &= \sqrt{22} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{22} \quad \parallel \text{ sij. } x = 2 \text{ ja } y = 3 \\ \sqrt{2^2 + 3^2 + z^2} &= \sqrt{22} \quad \parallel (\quad)^2 & 1 \text{ p (4 p)} \\ 13 + z^2 &= 22 \\ z^2 &= 9 \\ z &= \pm 3 & 1 \text{ p (5 p)}\end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \underline{\underline{\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} \pm 3\bar{k}}} \quad 1 \text{ p (6 p)}$$

5.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{määritelty, kun } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad 1 \text{ p}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e \quad 2 \text{ p (3 p)}$$

Tutkitaan derivaatan merkki nollakohdan molemmin puolin

$$f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 > 0$$

$$f'(3) = \frac{1 - \ln 3}{3^2} \approx -0,010956 \dots < 0 \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

Kulkukaavio

	0	e	
$f'(x)$	⋮	+	-
$f(x)$	⋮	↗	↘

1 p (5 p)

Vastaus: Suurin arvo on $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$. 1 p (6 p)

6. Merkitään hyökkääjiä kirjaimilla a , b ja c . Pelaajien maalintekotodennäköisyydet ovat

$$\begin{aligned}P(a) &= 0,65, \\P(b) &= 0,75 \text{ ja} \\P(c) &= 0,54.\end{aligned}$$

- a) Tapahtuma A on ”ainakin yksi tekee maalin”

$\bar{A}$ on ”kukaan ei tee maalia”.

Todennäköisyydet, että yksittäinen pelaaja ei tee maalia ovat

$$\begin{aligned}P(\bar{a}) &= 1 - 0,65 = 0,35 \\P(\bar{b}) &= 1 - 0,75 = 0,25 \\P(\bar{c}) &= 1 - 0,54 = 0,46\end{aligned}\quad 1 \text{ p}$$

Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\bar{a} \text{ ja } \bar{b} \text{ ja } \bar{c}) \\&= P(\bar{a}) \cdot P(\bar{b}) \cdot P(\bar{c}).\end{aligned}\quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - P(\bar{a}) \cdot P(\bar{b}) \cdot P(\bar{c}) \\&= 1 - 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,46 \\&= 0,95975 \\&\approx 96 \%\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on 96 %.

1 p (3 p)

b) Lasketaan todennäköisyydet, että saadaan 0, 1, 2 ja 3 maalia.

$$\begin{aligned}P(0) &= P(\text{kukaan ei saa maalia}) \\&= P(\bar{a} \text{ ja } \bar{b} \text{ ja } \bar{c}) \\&= P(\bar{a}) \cdot P(\bar{b}) \cdot P(\bar{c}) \\&= 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,46 \\&= 0,04025.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(1) &= P(a \text{ ja } \bar{b} \text{ ja } \bar{c} \text{ tai } \bar{a} \text{ ja } b \text{ ja } \bar{c} \text{ tai } \bar{a} \text{ ja } \bar{b} \text{ ja } c) \\&= P(a) \cdot P(\bar{b}) \cdot P(\bar{c}) + P(\bar{a}) \cdot P(b) \cdot P(\bar{c}) + P(\bar{a}) \cdot P(\bar{b}) \cdot P(c) \\&= 0,65 \cdot 0,25 \cdot 0,46 + 0,35 \cdot 0,75 \cdot 0,46 + 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,54 \\&= 0,24275 \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(2) &= P(a \text{ ja } b \text{ ja } \bar{c} \text{ tai } a \text{ ja } \bar{b} \text{ ja } c \text{ tai } \bar{a} \text{ ja } b \text{ ja } c) \\&= P(a) \cdot P(b) \cdot P(\bar{c}) + P(a) \cdot P(\bar{b}) \cdot P(c) + P(\bar{a}) \cdot P(b) \cdot P(c) \\&= 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,46 + 0,65 \cdot 0,25 \cdot 0,54 + 0,35 \cdot 0,75 \cdot 0,54 \\&= 0,45375\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(3) &= P(a \text{ ja } b \text{ ja } c) \\&= P(a) \cdot P(b) \cdot P(c) \\&= 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,54 \\&= 0,26325 \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}}\end{aligned}$$

Lasketaan maalien lukumäärän odotusarvo.

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum p_i X_i \\&= P(0) \cdot 0 + P(1) \cdot 1 + P(2) \cdot 2 + P(3) \cdot 3 \\&= 0,04025 \cdot 0 + 0,24275 \cdot 1 + 0,45375 \cdot 2 + 0,26325 \cdot 3 \\&= 1,94 \\&\approx 1,9.\end{aligned}$$

Vastaus: Rangaistuslaukausmaalien odotusarvo on 1,9. $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

7. a) Paraabelin yhtälöstä

$$y = ax^2 + bx + c$$

saadaan pisteissä $(0, \frac{1}{t})$ ja $(t, 0)$, $t > 0$, ehdoiksi

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ c &= \frac{1}{t} \end{aligned} \quad \text{1 p} \quad (1)$$

ja

$$\begin{aligned} 0 &= at^2 + bt + c \\ t^2a + tb + c &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Lisäksi paraabeli sivuaa x -akselia pisteessä $(t, 0)$, eli kohdassa $x = t$ tangentin kulmakerroin on 0.

$$y' = 2ax + b$$

Kohdassa $x = t$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 2at + b &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Saatiin siis yhtälöryhmä (1), (2) ja (3)

$$\begin{cases} c = \frac{1}{t} & (1) \\ t^2a + tb + c = 0 & (2) \\ 2at + b = 0 & (3) \end{cases}$$

Yhtälöstä (3) saadaan

$$b = -2ta \quad (4)$$

Sijoitetaan tämä ja yhtälö (1) yhtälöön (2)

$$\begin{aligned} t^2a + t \cdot (-2ta) + \frac{1}{t} &= 0 \\ t^2a - 2t^2a &= -\frac{1}{t} \\ -t^2a &= -\frac{1}{t} \quad \| : (-t^2) \\ a &= \frac{1}{t^3} \end{aligned} \quad \text{1 p (2 p)}$$

Yhtälö (4)

$$b = -2t \cdot \frac{1}{t^3}$$

$$b = -\frac{2}{t^2}$$

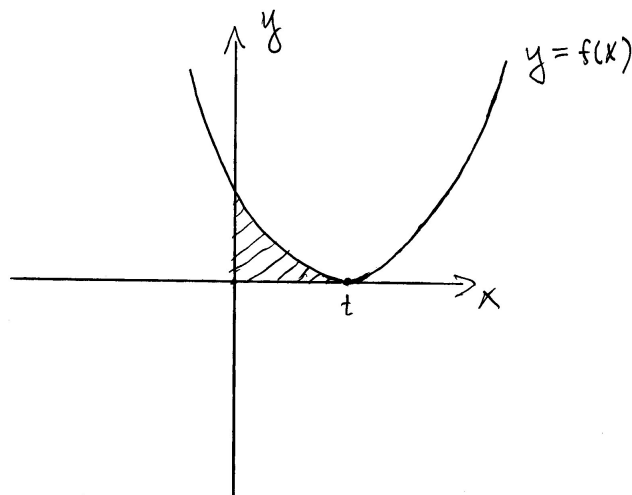
Vastaus: $a = \frac{1}{t^3}$, $b = -\frac{2}{t^2}$ ja $c = \frac{1}{t}$.

1 p (3 p)

b) Merkitään

$$f(x) = \frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}, \quad \text{missä } t > 0.$$

Paraabeli on siis ylöspäin aukeava, koska $\frac{1}{t^3} > 0$ ja huippu on x -akselilla kohdassa $x = t$ kuvan mukaisesti.



1 p (4 p)

Kysytty pinta-ala on siis

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t f(x) \, dx \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t} \right) \, dx \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{t}x \right) \\ &= \frac{1}{t^3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{t}x \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{t^3} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}t - 0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1 p (5 p)

Siis paraabelin ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen ala on $\frac{1}{3}$, eikä siten riipu t :n arvosta. $\square$

1 p (6 p)

8.

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}}, \quad \text{missä } t \geq 0$$

- a) Luennot peruutetaan, kun yli 50 %, eli yli 2500 opiskelijaa on sairastunut. Siis, kun

$$\begin{aligned} f(t) &> 2500 \\ \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}} &> 2500 \quad \| \cdot (1 + 4999e^{-0,8t}) \quad (> 0) \\ 2500 + 12497500e^{-0,8t} &< 5000 \\ 12497500e^{-0,8t} &< 2500 \quad \| : 12497500 \quad \mathbf{1 \text{ p}} \\ e^{-0,8t} &< \frac{1}{4999} \quad \| \ln(\cdot) \\ -0,8t &< \ln\left(\frac{1}{4999}\right) \quad \| : (-0,8) \\ t &> -\frac{\ln\left(\frac{1}{4999}\right)}{0,8} \\ t &> 10,6462 \dots \end{aligned}$$

Vastaus: Luennot peruutetaan 11 vuorokauden kuluttua ensimmäisestä sairastumisesta. 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{0 - 5000 \cdot (-0,8 \cdot 4999e^{-0,8t})}{(1 + 4999e^{-0,8t})^2} \\ &= \frac{19996000e^{-0,8t}}{(1 + 4999e^{-0,8t})^2} \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}} \end{aligned}$$

Eksponenttifunktio $e^x > 0$ kaikilla x . Siis myös

$$1,9996000e^{-0,8t} > 0 \quad \forall t.$$

Derivaatan nimittäjä on myös positiivinen, joten

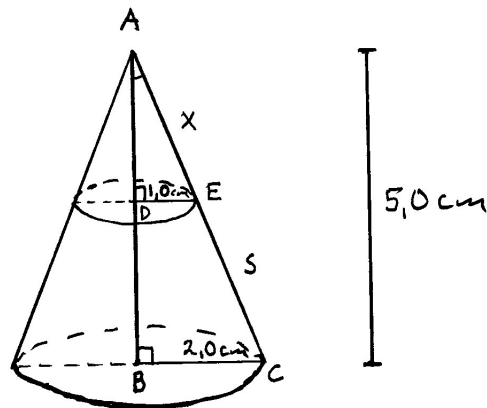
$$f'(t) > 0.$$

Näin ollen $f(t)$ on kasvava funktio, kun $t > 0$. 1 p (4 p) □

c)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}} \\ &= \frac{5000}{1 + 0} \\ &= \underline{\underline{5000}} \quad \mathbf{2 \text{ p (6 p)}} \end{aligned}$$

9.



Merkitään katkaistun kartion sivujanaa s :llä, jota vastaa kuvan katkaisematoman kartion sivujanana osa CE .

Merkitään

a on janan AB pituus

b on janan BC pituus

c on janan AC pituus

Kolmiossa ABC :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5,0^2 + 2,0^2 = c^2$$

$$c = (\pm) \sqrt{5,0^2 + 2,0^2}$$

$$c = \sqrt{29} \quad 1 \text{ p}$$

Kolmio $ABC \sim$ kolmio ADE (kk). Vastinsivujen suhteilla saadaan

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

$$\frac{x}{c} = \frac{1,0}{2,0} \quad || \cdot c$$

$$x = \frac{1}{2}c$$

$$x = \frac{\sqrt{29}}{2} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Saadaan

$$s = c - x$$

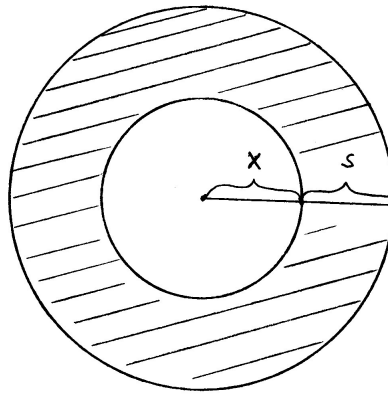
$$s = \sqrt{29} - \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$s = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$(\approx 2,69 \text{ cm})$$

1 p (3 p)

Rengasalueen mitat ovat ao. kuvan mukaiset.



Siten viivoitetun (sinisen) alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \pi(x + s)^2 - \pi x^2 && 2 \text{ p (5 p)} \\ &= \pi \left(\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} \right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{29}}{2} \right)^2 \\ &= \pi \cdot 29 - \pi \cdot \frac{29}{4} \\ &= \frac{87\pi}{4} \\ &= 68,3296 \dots (\text{cm}^2) \\ &\approx 68 (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

Vastaus: Rengasalueen pinta-ala on 68 cm².

1 p (6 p)

10. a)

$$3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$3 \tan \frac{x}{2} = -3 \quad \| : 3$$

$$\tan \frac{x}{2} = -1 \quad 1 \text{ p}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \| \cdot 2 \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n}} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

b)

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0, \quad \text{sij. } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0 \quad \| \cdot (-1)$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$\cos x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

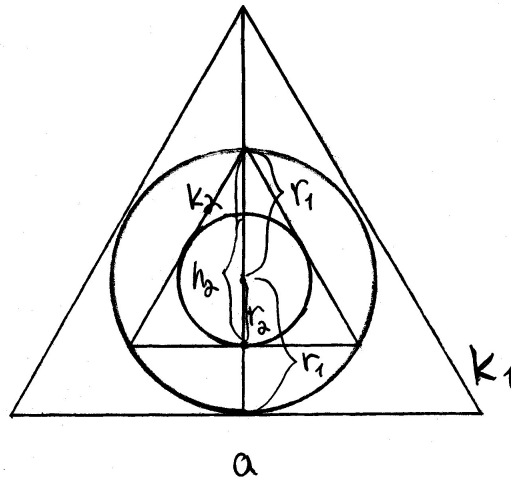
$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad \cos x = 1 \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$\underline{\underline{x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x = 2\pi n}} \quad 1 \text{ p (6 p)}$$

11. Tasasivuisen kolmion K_1 sisään piirretyn ympyrän säde on

$$r_1 = \frac{1}{3}h_1,$$

missä h_1 on tasasivuisen kolmion K_1 korkeus.



Seuraavan kolmion K_2 sisään piirretyn ympyrän säde on

$$r_2 = \frac{1}{3}h_2, \quad (1)$$

missä h_2 on kolmion K_2 korkeus.

Toisaalta

$$h_2 = r_1 + r_2 \quad 1 \text{ p} \quad (2)$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{3}(r_1 + r_2) \\ r_2 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3}r_2 \\ \frac{2}{3}r_2 &= \frac{1}{3}r_1 \quad \parallel \cdot \frac{3}{2} \\ r_2 &= \frac{1}{2}r_1 \quad 1 \text{ p (2 p)} \end{aligned}$$

Seuraavan kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r_{n+1} on siis puolet edellisestä säteestä r_n :

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n.$$

Ympyrän pinta-ala on

$$\begin{aligned}A_{n+1} &= \pi r_{n+1}^2 \\&= \pi \left(\frac{1}{2}r_n\right)^2 \\&= \frac{1}{4}\pi r_n^2 \\&= \frac{1}{4}A_n\end{aligned}\quad \text{1 p (3 p)}$$

Pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $q = \frac{1}{4}$. Ensimmäisen tasasivuisen kolmion sivu on a , jolloin sisään piirretyn ympyrän säde on

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}a. \quad \text{1 p (4 p)}$$

Siten

$$\begin{aligned}A_1 &= \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 \\&= \frac{\pi}{12}a^2.\end{aligned}\quad \text{1 p (5 p)}$$

Pinta-alojen summa on geometrisen sarjan summa

$$S = \frac{A_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi}{12}a^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{9}a^2.$$

Vastaus: Pinta-alojen summa on $\frac{\pi}{9}a^2$. 1 p (6 p)

12. Tarkistusmerkin ehto on

$$3(d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

a) Saadaan kongruenssiyhtälö:

$$\begin{aligned} 3(1 + 2 + 8 + 5 + 0 + 2) + 4 + 6 + 2 + 9 + 3 + d_{12} &\equiv 0 \pmod{10} \\ 78 + d_{12} &\equiv 0 \pmod{10} \quad || -78 \\ d_{12} &\equiv -78 \pmod{10} \end{aligned} \quad \mathbf{1\ p}$$

Luvun -78 jakoyhtälö on

$$-78 = -8 \cdot 10 + 2.$$

d_{12} :lla täytyy olla sama jakojäännös 2 ja sen täytyy olla välillä $0 \dots 9$, joten $d_{12} = 2$.

Vastaus: Tarkistusmerkki on $d_{12} = 2$. **1 p (2 p)**

b) Lasketaan tarkastusehdon mukainen summa:

$$3(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 2) + 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 = 105.$$

Tehdään jakoyhtälö.

$$105 = 10 \cdot 10 + 5, \quad \mathbf{1\ p\ (3\ p)}$$

joten

$$105 \not\equiv 0 \pmod{10}.$$

Näin ollen viivakoodi on virheellinen. **1 p (4 p)** □

c) Tiedetään, että d_3 on virheellinen. Tehdään kongruenssiyhtälö.

$$\begin{aligned} 3(1 + d_3 + 5 + 7 + 9 + 2) + 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 &\equiv 0 \pmod{10} \\ 3d_3 + 72 + 24 &\equiv 0 \pmod{10} \\ 3d_3 + 96 &\equiv 0 \pmod{10} \quad || -96 \\ 3d_3 &\equiv -96 \pmod{10} \end{aligned}$$

$\text{syt}(3, 10) = 1$, joten yhtälö voidaan jakaa 3:lla.

$$d_3 \equiv -32 \pmod{10} \quad \mathbf{1\ p\ (5\ p)}$$

Luvun -32 jakoyhtälö on

$$-32 = -4 \cdot 10 + 8.$$

d_3 :lla täytyy olla sama jakojäännös 8 ja sen täytyy olla välillä $0 \dots 9$, joten $d_3 = 8$.

Vastaus: Oikea koodi on $(1, 2, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$. **1 p (6 p)**

13. Funktioiden

$$f(x) = 1 - x$$

ja

$$g(x) = 3 \cos x$$

leikkauskohdat saadaan yhtälön

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

ratkaisusta.

Yhtälö (1):

$$\begin{aligned} 1 - x &= 3 \cos x \\ 3 \cos x + x - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

1 p

Ratkaistaan yhtälö (2) Newtonin menetelmällä.

Merkitään

$$\begin{aligned} h(x) &= 3 \cos x + x - 1 \\ h'(x) &= -3 \sin x + 1, \end{aligned}$$

jolloin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \tag{3}$$

1 p (2 p)

1° Alkuarvauksella $x_0 = -1$ saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - \frac{3 \cos(-1) + (-1) - 1}{-3 \sin(-1) + 1} \\ &= -0,892437 \dots \\ x_2 &= -0,889472 \dots \\ x_3 &= -0,889470 \dots \\ x_4 &= -0,889470 \dots \\ &\approx -0,89 \end{aligned} \tag{3}$$

1 p (3 p)

2° Alkuarvauksella $x_0 = 2$ saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,856217 \dots \\ x_2 &= 1,862356 \dots \\ x_3 &= 1,862364 \dots \\ x_4 &= 1,862364 \dots \\ &\approx 1,86 \end{aligned} \tag{4}$$

3° Alkuarvauksella $x_0 = 3,5$ saadaan

$$\begin{aligned}x_1 &= 3,650739 \dots \\x_2 &= 3,638045 \dots \\x_3 &= 3,637957 \dots \\x_4 &= 3,637957 \dots \\&\approx 3,64\end{aligned}\tag{5}$$

1 p (4 p)

Leikkauspisteiden x -koordinaatteja (3), (4) ja (5) vastaavat y :n arvot ovat

1°

$$\begin{aligned}y &= f(-0,8894 \dots) \\&= 1 - (-0,8894 \dots) \\&= 1,8894 \dots \\&\approx 1,89\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}y &= 1 - 1,8623 \dots \\&= -0,8623 \dots \\&\approx -0,86\end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned}y &= 1 - 3,6379 \dots \\&= -2,6379 \dots \\&\approx -2,64\end{aligned}$$

Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(-0,89; 1,89)$, $(1,86; -0,86)$ ja $(3,64; -2,64)$.

2 p (6 p)

*14. a)

$$\begin{aligned}
 (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right]^2 - \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) \\
 &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 \cdot 1 + e^{-2x}) \\
 &= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

1 p

□ 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right] \\
 &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} \cdot (-1)e^{-x} \\
 &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \\
 &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
 &= \cosh x
 \end{aligned}$$

1 p (3 p)

□ 1 p (4 p)

c) $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

Etsitään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
 \cosh x &= 0 \\
 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &= 0 \quad || \cdot 2 \\
 e^x + e^{-x} &= 0
 \end{aligned}$$

Molemmat termit yhtälön vasemmalla puolella ovat positiivisia, joten summa ei voi olla 0 millään x . Derivaatalla ei ole nollakohtia, joten se on kaikkialla saman merkkinen. Näin ollen funktio $\sinh x$ on aidosti monotoninen ja siten sillä on käänteisfunktio.

1 p (5 p)

Määritetään käänteisfunktio.

$$\begin{aligned}y &= \sinh x \\y &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad || \cdot 2 \\2y &= e^x - \frac{1}{e^x}\end{aligned}$$

Sijoitetaan $e^x = u$, jolloin $u > 0$.

$$\begin{aligned}2y &= u - \frac{1}{u} \quad || \cdot u \\2yu &= u^2 - 1 \\u^2 - 2yu - 1 &= 0 \\u &= \frac{2y \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\&= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \\&= \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} \\&= y \pm \sqrt{y^2 + 1}\end{aligned}$$

1 p (6 p)

Osoitetaan, että vain ratkaisu $u = y + \sqrt{y^2 + 1}$ toteuttaa määrittelyehdon $u > 0$. Koska

$$y^2 < y^2 + 1$$

ja koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, saadaan

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2} &< \sqrt{y^2 + 1} \\|y| &< \sqrt{y^2 + 1}.\end{aligned}$$

Koska $y \leq |y|$, niin

$$y - \sqrt{y^2 + 1} \leq |y| - \sqrt{y^2 + 1} < 0.$$

Siis $y - \sqrt{y^2 + 1}$ ei toteuta määrittelyehtoa. Koska $y \geq -|y|$, niin

$$y + \sqrt{y^2 + 1} \geq -|y| + \sqrt{y^2 + 1} > 0,$$

ja näin ollen $y + \sqrt{y^2 + 1}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Sijoitetaan $u = e^x$, saadaan

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \parallel \ln() \\ x &= \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

Vastaus: Funktion $\sinh x$ käänteisfunktio on $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1 p (7 p)

- d) Käänteisfunktion määrittelyjoukko on sama kuin funktion arvojoukko. Määritetään funktion $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ arvojoukko.

$\sinh x$ on aidosti monotoninen, joten sillä ei ole ääriarvokohtia. Lasketaan raja-arvot, kun x kasvaa tai vähenee rajatta.

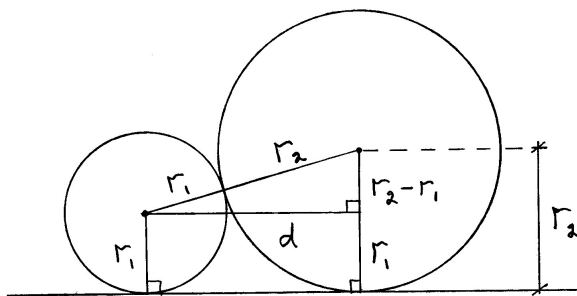
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x} \rightarrow \infty - 0 = \infty, \text{ kun } x \rightarrow \infty. \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &= \frac{1}{2}\frac{1}{e^{-x}} - \frac{1}{2}e^{-x} \rightarrow 0 - \infty = -\infty, \text{ kun } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

1 p (8 p)

$\sinh x$:n arvojoukko on $] -\infty, \infty[$, joten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $] -\infty, \infty[$.

1 p (9 p)

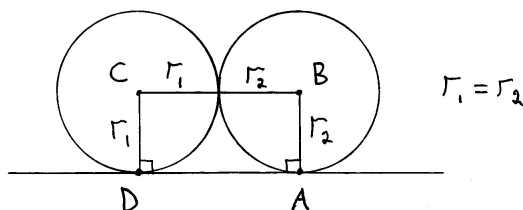
- *15. a) Tutkitaan ensin tapausta, jossa $r_1 \neq r_2$. Merkitään pienemmän ympyrän sädettä r_1 :llä.



Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2)^2 &= d^2 + (r_2 - r_1)^2 & 1 \text{ p} \\ r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 &= d^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2 \\ d^2 &= 4r_1r_2 \\ d &= (\pm) 2\sqrt{r_1r_2} & 1 \text{ p (2 p)} \quad (1)\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä tapaus, jossa $r_1 = r_2$.

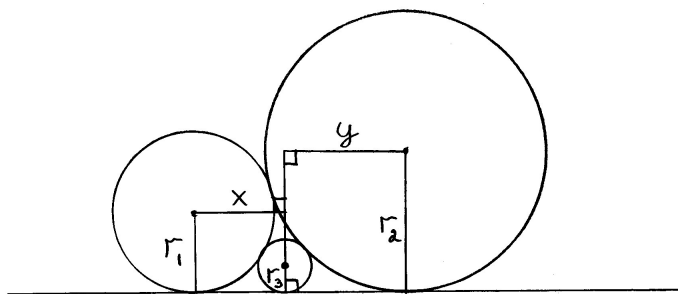


Nyt $ABCD$ on suorakaide, koska $r_1 = r_2$. Siten $d = DA = CB = r_1 + r_2 = 2r_1 = 2\sqrt{r_1^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Näin ollen (1) pätee myös silloin, kun $r_1 = r_2$.

Vastaus: Vaakasuora etäisyys $d = 2\sqrt{r_1r_2}$.

1 p (3 p)

b)



Soveltamalla kaavaa (1) ympyröihin 1 ja 3 sekä 2 ja 3 saadaan

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{r_1 r_3} \\ y = 2\sqrt{r_2 r_3} \end{cases} \quad (2)$$

(3) 1 p (4 p)

Toisaalta $x + y = d = 2\sqrt{r_1 r_2}$. Sijoitetaan tähän (2) ja (3), saadaan

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_2 r_3} &= 2\sqrt{r_1 r_2} \quad || : 2 \\ \sqrt{r_1}\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2}\sqrt{r_3} &= \sqrt{r_1 r_2} \\ (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\sqrt{r_3} &= \sqrt{r_1 r_2} \quad || : (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) \\ \sqrt{r_3} &= \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \quad || ()^2 \\ r_3 &= \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} \end{aligned} \quad (4) \quad 1 \text{ p (6 p)}$$

c) Väite: $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$

Todistus.

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 + k_3)^2 &= 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \\ k_1^2 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_2 + k_2^2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 + k_2 k_3 + k_3^2 &= 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_1 k_2 + 2k_1 k_3 + 2k_2 k_3 &= 2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_1 k_2 - 2k_1 k_3 - 2k_2 k_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Näin on saatu väitteen kanssa yhtäpitävä yhtälö (5). Yhtälöstä (4) seuraa

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} \quad || \cdot \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{r_3} \\ (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 &= \frac{r_1 r_2}{r_3} \\ r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 &= \frac{r_1 r_2}{r_3} \\ 2\sqrt{r_1 r_2} &= \frac{r_1 r_2}{r_3} - r_1 - r_2 \quad || : (r_1 r_2) \\ 2\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 r_2} &= \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 r_3} - \frac{r_1}{r_1 r_2} - \frac{r_2}{r_1 r_2} \\ 2\frac{\sqrt{r_1}}{r_1} \cdot \frac{\sqrt{r_2}}{r_2} &= \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \\ 2\sqrt{\frac{1}{r_1}} \sqrt{\frac{1}{r_2}} &= \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \end{aligned} \quad 1 \text{ p (7 p)}$$

Merkitään $\frac{1}{r_1} = k_1$, $\frac{1}{r_2} = k_2$ ja $\frac{1}{r_3} = k_3$.

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{k_1}\sqrt{k_2} &= k_3 - k_2 - k_1 \quad || ()^2 \\
 4k_1k_2 &= k_3^2 - k_2k_3 - k_1k_3 - k_2k_3 + k_2^2 + k_1k_2 - k_1k_3 + k_1k_2 + k_1^2 \\
 4k_1k_2 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_1k_2 - 2k_1k_3 - 2k_2k_3 \\
 0 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_1k_2 - 2k_1k_3 - 2k_2k_3 \quad (6)
 \end{aligned}$$

1 p (8 p)

Saatu tosi yhtälö (6) on sama kuin väitteen kanssa yhtäpitävä yhtälö (5).

Näin ollen (5) on tosi ja siten myös väite on tosi.

1 p (9 p)