

MAFYNETTI



Miten opit
parhaiten?

Valmistaudu täydellisesti lääkiksen pääsykokeeseen!

- Voit harjoitella kotoa käsin huippusuositulla Mafynetti-ohjelmalla. Mukaan kuuluu 4 täysimittaista harjoituskoetta!!
- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä tekemällä. Tehtävät kattavat yksityiskohtaisesti pääsykokeessa tarvittavat biologian, fysiikan ja kemian asiat.
- Vastaaminen tehdään kynällä ja paperilla. Mafynetti opettaa ja näyttää sinulle aina malliratkaisun.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.

Kokeile ilmaiseksi mafyyvalmennus.fi/mafynetti



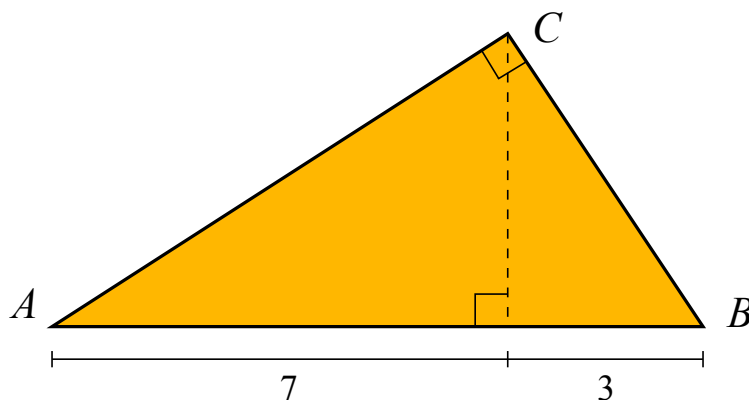
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (*) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. a) Ratkaise yhtälö $(x-4)^2 = (x-4)(x+4)$.
 b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$.
 c) Suora kulkee pisteiden $(1,7)$ ja $(2,4)$ kautta. Missä pisteessä se leikkaa x -akselin?

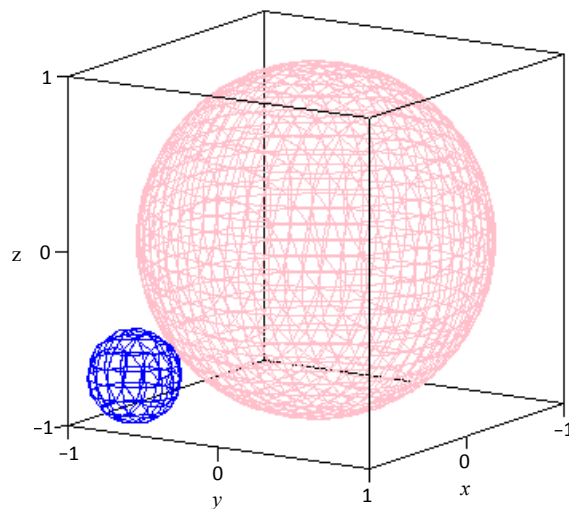
2. a) Laske funktion $f(x) = \sin(3x)$ derivaatan tarkka arvo kohdassa $x = \frac{\pi}{9}$.
 b) Määritä vektoreiden $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ erotusvektori $\vec{a} - \vec{b}$ sekä erotusvektorin pituus.
 c) Kulma α toteuttaa ehdot $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ja $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Määritä luvun $\cos \alpha$ tarkka arvo.

3. a) Laske lausekkeen $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja ja lukujen a ja b keskiarvo on 2.
 b) Sievennä lauseke $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$.

4. Laske oheisen kuvan suorakulmaisen kolmion ABC pinta-alan tarkka arvo.



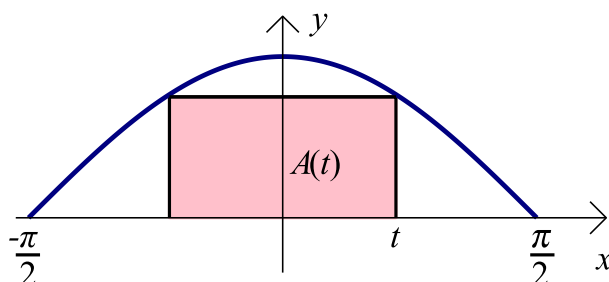
5. Määritä funktion $(x^2 - x - 5)e^{-x}$ suurin ja pienin arvo, kun $x \geq 0$.
6. Veriryhmien B ja O esiintymistodennäköisyydet ovat $P(B) = 0,17$ ja $P(O) = 0,33$. Vampyyri puree kahtatoista ihmistä. Laske todennäköisyys sille, että
- joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O.
 - joukossa on kolme tai neljä ihmistä, joiden veriryhmä on B.
7. Pisteiden $A(2,0,1)$ ja $B(3,1,3)$ yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä tämä taso leikkaa y -akselin?
8. a) Määritä käyrien $y = 12x^3 - 36x$ ja $y = -12x^2 + 36x$ leikkauspisteet.
b) Näiden käyrien väliin jää kaksi rajoitettua aluetta. Laske niiden pinta-alojen summa.
9. Ratkaise yhtälö $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
10. Oheisen kuution särmän pituus on 2. Sen sisällä on vaaleanpunainen pallo, joka sivuaa jo-kaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi sininen pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa kuvion mukaisesti. Laske sinisen pallon säteen tark-ka arvo.



11. Millä muuttujan x arvolla jono $\ln 2, \ln(2^x - 2), \ln(2^x + 2)$ on aritmeettinen?

12. Suorakulmion yksi sivu on x -akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä $y = \cos x$, kun $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- a) Muodosta lauseke suorakulmion pinta-alalle $A(t)$ kuvioon merkityn muuttujan $0 < t < \frac{\pi}{2}$ funktiona.
- b) Ratkaise funktion $A(t)$ derivaatan nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella käyttämällä valitsemaasi numeerista menetelmää.
- c) Määritä suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-alan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.



13. Konnektiivin $\square$ totuustaulu on

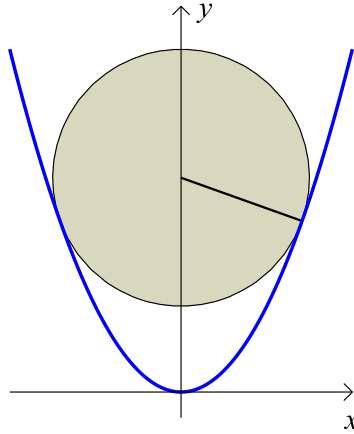
A	B	$A \square B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

- a) Muodosta lauseen $A \square (A \square B)$ totuustaulu.
- b) Esitä lause $A \square (A \square B)$ sellaisessa muodossa, jossa esiintyy ainoastaan konnektiiveja $\neg, \vee$ tai $\wedge$.

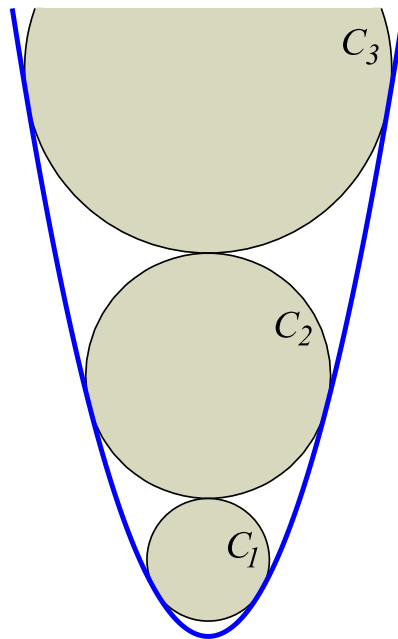
*14. Olkoon $P(x) = x^2 + x - 2$.

- a) Jaa $P(x)$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)
- b) Määritä sellaiset vakiot A ja B , että $\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ kaikilla $x \geq 2$. (2 p.)
- c) Määritä funktion $\frac{1}{P(x)}$ integraalifunktiot, kun $x \geq 2$. (2 p.)
- d) Laske epäoleellinen integraali $\int_2^{\infty} \frac{1}{P(x)} dx$. (3 p.)

- *15. a)** Ympyrä, jonka säde on $r > \frac{1}{2}$, asetetaan paraabelin $y = x^2$ sisäpuolelle alla olevan kuvan mukaisesti. Näytä, että ympyrän keskipisteen y -koordinaatti on $r^2 + \frac{1}{4}$. (3 p.)



- b)** Ympyrä C_1 saadaan valitsemalla a-kohdassa $r = r_1 = 1$. Sitä sivuamaan asetetaan toinen ympyrä C_2 , joka sivuaa myös paraabelia. Jatkamalla näin saadaan alla olevan kuvan mukainen jono ympyröitä $C_1, C_2, C_3, \dots$. Määritä ympyrän C_2 säde r_2 . (2 p.)
- c)** Osoita, että peräkkäisten ympyröiden C_n ja C_{n+1} säteet r_n ja r_{n+1} toteuttavat rekursio-kaavan $(r_{n+1})^2 - r_{n+1} = (r_n)^2 + r_n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ (2 p.)
- d)** Osoita c-kohdan avulla, että $r_{n+1} = r_n + 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ (2 p.)



Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Pitkä matematiikka, kevät 2013

Mallivastaukset, 20.3.2013

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fyysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet: www.mafyvalmennus.fi
s-posti: info@mafyvalmennus.fi
puhelin: (09) 3540 1373

1. a)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= (x-4)(x+4) \\ x^2 - 8x + 16 &= x^2 - 16 && 1 \text{ p} \\ -8x &= -32 \quad || : (-8) \\ \underline{\underline{x &= 4}} &&& 1 \text{ p (2 p)}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} &< -\frac{2}{15}x \\ \text{Ratkaistaan laskimella} \\ x &< \underline{\underline{\frac{21}{22}}} && 2 \text{ p (4 p)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \quad y_1 = 7 \\ x_2 &= 2, \quad y_2 = 4 \\ \text{Suoran yhtälö on muotoa} \\ y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 7 &= \frac{4 - 7}{2 - 1}(x - 1) \\ y &= -3x + 3 + 7 \\ y &= -3x + 10 && 1 \text{ p (5 p)}\end{aligned}$$

Lasketaan suoran ja x -akselin leikkauspiste:

$$\begin{aligned}y &= 0 \\ -3x + 10 &= 0 \\ 3x &= 10 \quad || : 3 \\ x &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Vastaus: Leikkauspiste on $(\frac{10}{3}, 0)$. 2 p (6 p)

2. a)

$$f(x) = \sin(3x)$$

$$f'(x) = 3 \cos(3x)$$

1 p

$$f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = 3 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad (\text{laskimesta})$$

1 p (2 p)

b)

$$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

Erotusvektori on

$$\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} - (2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

1 p (3 p)

Erotusvektorin pituus on

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}$$

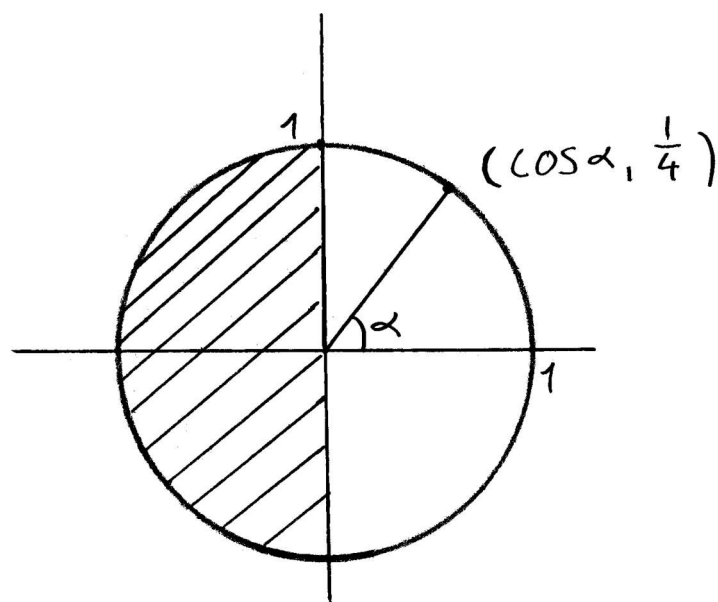
$$= 2\sqrt{6} \quad (\text{laskimesta})$$

Vastaus: Erotusvektori on $2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ja sen pituus on $2\sqrt{6}$.

1 p (4 p)

c)

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Piirretään kulma α yksikköympyrään, kun $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

1 p (5 p)

Käytetään trigonometrian lausetta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \parallel \text{ sij. } \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\cos \alpha = (\pm) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\text{laskimella})$$

1 p (6 p)

3. a) a ja b ovat toistensa käänteislukuja, joten

$$a = \frac{1}{b} \iff ab = 1$$

Lukujen a ja b keskiarvo on 2, joten

$$\frac{a+b}{2} = 2 \iff a+b = 4 \quad 1 \text{ p}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= a + 2\sqrt{ab} + b \\ &= (a+b) + 2\sqrt{ab} \quad 1 \text{ p (2 p)} \\ &= 4 + 2 \cdot \sqrt{1} \\ &= 6 \quad 1 \text{ p (3 p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Tarkka arvo on 6.

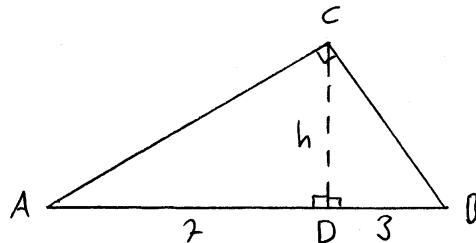
- b) Sievennetään laskimella:

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = \underline{\underline{x+y}} \quad 3 \text{ p (6 p)}$$

Käsin:

$$\begin{aligned} &\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \quad 1 \text{ p (4 p)} \\ &= x - \cancel{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} + \cancel{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} + \cancel{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} - \cancel{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} + y \\ &= \underline{\underline{x+y}} \quad 2 \text{ p (6 p)} \end{aligned}$$

4.



Kolmiot ADC ja DBC ovat yhdenmuotoiset, koska

$$\sphericalangle ADC = 90^\circ = \sphericalangle CDB$$

ja

$$\sphericalangle CAD = 90^\circ - \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCD$$

eli kolmoilla on kaksi yhtä suurta kulmaa.

1 p

Saadaan verranto:

$$\frac{h}{7} = \frac{3}{h} \quad || \cdot 7h \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

$$h^2 = 21$$

$$h = (\pm) \sqrt{21} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

Pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}|AB|h = \frac{1}{2}(7+3)\sqrt{21} = 5\sqrt{21}. \quad 2 \text{ p (5 p)}$$

Vastaus: Pinta-ala on $5\sqrt{21}$.

1 p (6 p)

5.

RATKAISUTAPA 1

$$f(x) = (x^2 - x - 5)e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Määritetään funktion suurin ja pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(x) = (-x^2 + 3x + 4)e^{-x} \quad (\text{laskimella}) \quad 1 \text{ p}$$

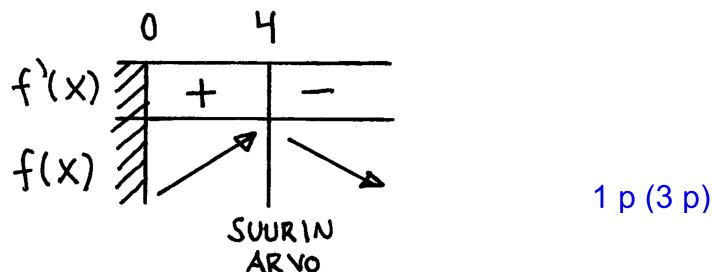
Etsitään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (-x^2 + 3x + 4)e^{-x} &= 0 \\ x &= -1 \quad \text{tai} \quad x = 4 \quad (\text{laskimella}) \end{aligned} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Lasketaan derivaatan arvot testipisteissä.

$$\begin{aligned} f'(1) &= (-1^2 + 3 \cdot 1 + 4) \cdot e^{-1} = 2,207 \dots > 0 \\ f'(5) &= -0,040 \dots < 0 \end{aligned}$$

Tehdään funktion kulkukaavio.



Lasketaan funktion arvot:

$$\begin{aligned} f(0) &= (0^2 - 0 - 5) \cdot e^0 = -5 \\ f(4) &= 7 \cdot e^{-4} \quad (\approx 0,128 \dots) \end{aligned} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

Osoitetaan, että $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 4$.

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 5)e^{-x} &\geq 0 \\ x &\leq \frac{-\sqrt{21} + 1}{2} \quad \text{tai} \quad x \geq \frac{\sqrt{21} + 1}{2} \quad (\text{laskimella}) \quad 1 \text{ p (5 p)} \\ x &\leq -1,79 \dots \quad \text{tai} \quad x \geq 2,79 \dots \end{aligned}$$

Näin ollen $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 4$, joten funktion pienin arvo on $f(0) = -5$ ja suurin arvo on $f(4) = 7 \cdot e^{-4}$.

1 p (6 p)

RATKAISUTAPA 2

Alku kuten ratkaisutavassa 1. Pienimmän arvon etsiminen ilman symbolista laskinta:

$$f(4) = 7e^{-4} > 0$$

Tutkitaan, onko $f(0) = -5$ pienin arvo. Lasketaan $f(x)$:n nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x^2 - x - 5)e^{-x} &= 0 \\ x^2 - x - 5 &= 0 & \text{tai} & e^{-x} = 0 \\ & & & \text{ei ratkaisua} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2}$$

$$x = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{21}}{2} \approx 2,79 \dots \\ \frac{1-\sqrt{21}}{2} \approx -1,79 \dots \end{cases}$$

1 p (5 p)

Funktiolla on yksi nollakohta ($x \approx 2,79$), kun $x \geq 0$.

Tiedetään, että $f(4) \geq 0$ ja että f on vähenevä, kun $x \geq 4$.

Näin ollen jatkuvana funktiona $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 4$.

Siten $f(0) = -5$ on funktion pienin arvo.

Vastaus: Suurin arvo on $f(4) = 7e^{-4}$ ja pienin arvo on $f(0) = -5$.

1 p (6 p)

RATKAISUTAPA 3

Pienimmän arvon voi määrittää myös laskemalla arvon $f(0) = -5$ ja määrittämällä raja-arvon $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ esimerkiksi l'Hospitalin säännöllä, joka opetetaan kirjassa Laudatur 13.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

2 p (6 p)

6.

$$P(B) = 0,17$$

$$P(O) = 0,33$$

a) Merkitään:

$$p = P(O) = 0,33$$

$$q = P(\bar{O}) = 1 - 0,33 = 0,67$$

A : ”12 ihmisestä enintään 9:llä veriryhmä O”

$\bar{A}$: ”12 ihmisestä vähintään 10:llä veriryhmä O”

Kyseessä on toistokoe. Satunnaismuuttuja X on esiintyvien O veriryhmien lukumäärä.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= 1 - P(X = 10 \text{ tai } X = 11 \text{ tai } X = 12) \quad \text{1 p}$$

$$= 1 - \left[\binom{12}{10} \cdot 0,33^{10} \cdot 0,67^2 + \binom{12}{11} \cdot 0,33^{11} \cdot 0,67^1 + \binom{12}{12} \cdot 0,33^{12} \cdot 0,67^0 \right] \quad \text{1 p (2 p)}$$

$$= 1 - 0,000496 \dots$$

$$= 0,9995 \dots$$

$$\approx 99,95 \%$$

Vastaus: Todennäköisyys on 99,95 %.

1 p (3 p)

b) Toistokoe, jossa $p = P(B) = 0,17$.

$$P(3 \text{ tai } 4) = P(3) + P(4) \quad \text{1 p (4 p)}$$

$$= \binom{12}{3} \cdot 0,17^3 \cdot (1 - 0,17)^9 + \binom{12}{4} \cdot 0,17^4 \cdot (1 - 0,17)^8 \quad \text{1 p (5 p)}$$

$$= 0,2951 \dots$$

$$\approx 30 \%$$

Vastaus: Todennäköisyys on 30 %.

1 p (6 p)

7.

RATKAISUTAPA 1

Lasketaan janan AB keskipiste.

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \\
 M &= \left(\frac{2 + 3}{2}, \frac{0 + 1}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) \\
 M &= \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right)
 \end{aligned}$$

1 p

Muodostetaan janan eräs suuntavektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} &= (3 - 2)\vec{i} + (1 - 0)\vec{j} + (3 - 1)\vec{k} \\
 \overline{AB} &= \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}
 \end{aligned}$$

1 p (2 p)

 $\overline{AB}$ on tason normaalivektori.

$$\overline{AB} = \vec{n}$$

Tämän tason yhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Nyt

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{5}{2}, & y_0 &= \frac{1}{2}, & z_0 &= 2 \\
 a &= 1, & b &= 1, & c &= 2
 \end{aligned}$$

1 p (3 p)

$$\begin{aligned}
 1 \left(x - \frac{5}{2} \right) + 1 \left(y - \frac{1}{2} \right) + 2(z - 2) &= 0 \\
 x - \frac{5}{2} + y - \frac{1}{2} + 2z - 4 &= 0 \\
 x + y + 2z &= 7
 \end{aligned}$$

2 p (5 p)

 y -akselin leikkauspiste on kohdassa, jossa x - ja z -koordinaatit ovat nollia, eli

$$\begin{aligned}
 0 + y + 2 \cdot 0 &= 7 \\
 y &= 7
 \end{aligned}$$

Vastaus: Taso leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 7, 0)$.

1 p (6 p)

RATKAISUTAPA 2

$$A = (2, 0, 1)$$

$$B = (3, 1, 3)$$

Janan eräs suuntavektori on

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad 1 \text{ p}$$

Olkoon $\overrightarrow{T_1}$ jokin vektori, jolle $\overrightarrow{T_1} \perp \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{T_1} = t_1\vec{i} + t_2\vec{j} + t_3\vec{k}$$

Vektorien kohtisuoruusehdosta saadaan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_1} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ t_1 + t_2 + 2t_3 &= 0 \\ t_3 &= -\frac{t_1 + t_2}{2} \end{aligned} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Merkitään

$$\overrightarrow{T_2} = 2\overrightarrow{T_1} = 2t_1\vec{i} + 2t_2\vec{j} - (t_1 + t_2)\vec{k}$$

Täten siis tason pinnalla olevat vektorit ovat muotoa $\overrightarrow{T_2}$. Janan AB keskipiste on

$$M = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right),$$

joten keskipisteen paikkavektori on

$$\overrightarrow{K} = \frac{5}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

Etsitään sellainen $\overrightarrow{T_2}$, että

$$\overrightarrow{K} + \overrightarrow{T_2} = 0\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k},$$

missä y on kysytty tason ja y -akselin leikkauspiste.

$$\overrightarrow{K} + \overrightarrow{T_2} = \left(\frac{5}{2} + 2t_1\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2} + 2t_2\right)\vec{j} + (2 - t_1 - t_2)\vec{k} = 0\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

Vektorien yksikäsitteisyydestä seuraa, että

$$\begin{cases} \frac{5}{2} + 2t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{5}{4} \\ 2 - t_1 - t_2 = 0 \end{cases}$$

$$t_2 = 2 - t_1 = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

1 p (5 p)

Eli

$$y = \frac{1}{2} + 2t_2 = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{14}{2} = 7$$

Vastaus: Taso leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 7, 0)$.

1 p (6 p)

8. a)

VAIHTOEHTO 1

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet yhtälöparista laskimella.

$$\begin{cases} y = 12x^3 - 36x \\ y = -12x^2 + 36x \end{cases}$$

Ratkaisut ovat

$$\begin{array}{lll} x = -3 & \text{ja} & y = -216 \quad \text{tai} \\ x = 0 & \text{ja} & y = 0 \quad \text{tai} \\ x = 2 & \text{ja} & y = 24. \end{array}$$

Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(-3, -216)$, $(0, 0)$ ja $(2, 24)$.

3 p

VAIHTOEHTO 2

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet yhtälöparista.

$$\begin{cases} y = 12x^3 - 36x & (1) \\ y = -12x^2 + 36x & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} 12x^3 - 36x &= -12x^2 + 36x \\ 12x^3 + 12x^2 - 72x &= 0 \quad || : 12 \\ x^3 + x^2 - 6x &= 0 \\ x(x^2 + x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

1 p

Tulon nollasäännön nojalla joko

$$x = 0$$

tai

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3)(x - 2) &= 0 \quad (\text{tulon nollasääntö}) \\ x + 3 &= 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0 \\ x &= -3 \quad \text{tai} \quad x = 2 \end{aligned}$$

1 p (2 p)

Leikkauspisteiden y -koordinaatit saadaan sijoittamalla löydetty x :n arvot yhtälöön (2):

x	$y = -12x^2 + 36x$
-3	$-12 \cdot (-3)^2 + 36 \cdot (-3) = -216$
0	0
2	24

Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(-3, -216)$, $(0, 0)$ ja $(2, 24)$. **1 p (3 p)**

b) Merkitään

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 12x^3 - 36x, \\ f_2(x) &= -12x^2 + 36x. \end{aligned}$$

Lasketaan kysytty pinta-ala määrättynä integraalina.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^2 |f_1(x) - f_2(x)| dx \\ &= \int_{-3}^2 |12x^3 - 36x - (-12x^2 + 36x)| dx && \mathbf{1\ p\ (4\ p)} \\ &= 253 \quad (\text{Vastaus on saatu laskimella.}) && \mathbf{2\ p\ (6\ p)} \end{aligned}$$

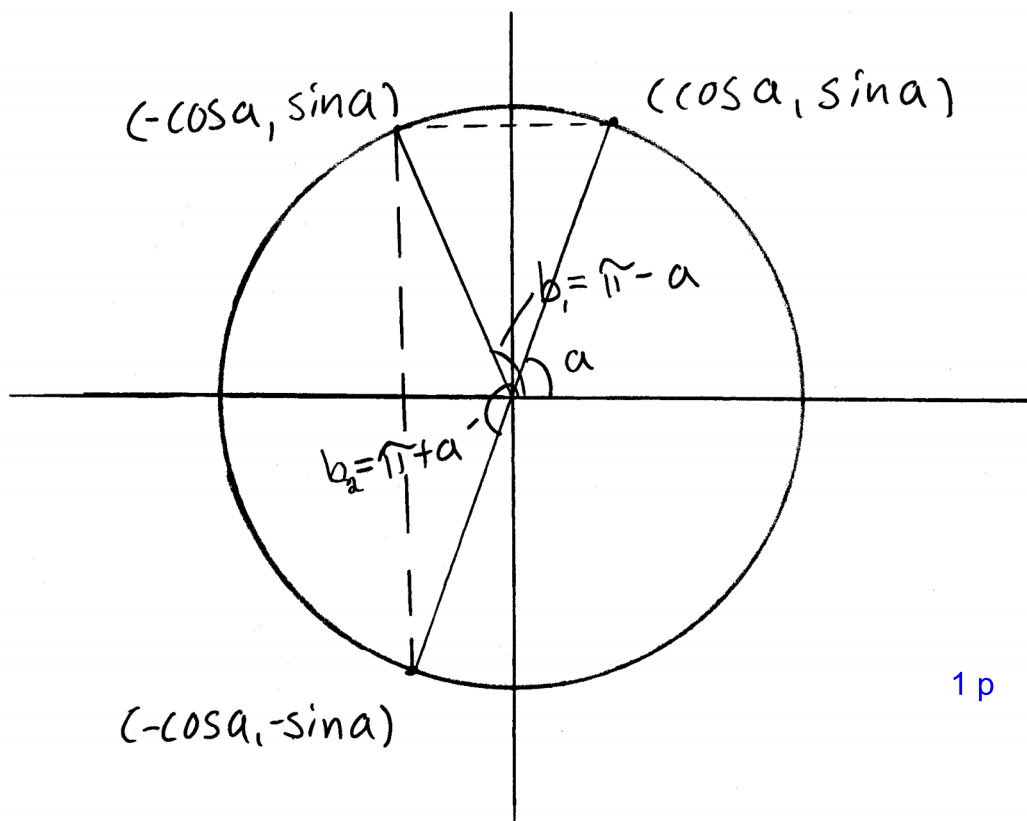
Ilman laskinta pinta-ala saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^2 |f_1(x) - f_2(x)| dx \\ &= \int_{-3}^2 |12x^3 + 12x^2 - 72x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (12x^3 + 12x^2 - 72x) dx \right| + \left| \int_0^2 (12x^3 + 12x^2 - 72x) dx \right| && \mathbf{1\ p\ (4\ p)} \\ &= \left| \int_{-3}^0 \left(\frac{12}{4}x^4 + \frac{12}{3}x^3 - \frac{72}{2}x^2 \right) dx \right| + \left| \int_0^2 \left(\frac{12}{4}x^4 + \frac{12}{3}x^3 - \frac{72}{2}x^2 \right) dx \right| && \mathbf{1\ p\ (5\ p)} \\ &= |0 - [3 \cdot (-3)^4 + 4 \cdot (-3)^3 - 36 \cdot (-3)^2]| + |3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2^2 - 0| \\ &= |189| + |-64| \\ &= 189 + 64 = 253 \end{aligned}$$

Vastaus: Pinta-ala on 253. **1 p (6 p)**

9.

$$\begin{aligned}\cos(2x) + \cos(3x) &= 0 \\ \cos(3x) &= -\cos(2x)\end{aligned}\quad (1)$$



Ylläolevasta kuvasta saadaan sääntö

$$\cos b = -\cos a \iff b = \pi - a \text{ tai } b = \pi + a. \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Sovelletaan sääntöä yhtälöön (1), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}3x &= \pi - 2x + 2\pi n \\ 5x &= \pi + 2\pi n \quad || : 5 \\ x &= \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}\quad 2 \text{ p (4 p)} \quad (2)$$

tai

$$\begin{aligned}3x &= \pi + 2x + 2\pi m \\ x &= \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\end{aligned}\quad 2 \text{ p (6 p)} \quad (3)$$

Valitaan $n = 5m + 2$, jolloin yhtälö (2) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}x &= \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \cdot (5m + 2) \\x &= \frac{\pi}{5} + \frac{10\pi m}{5} + \frac{4\pi}{5} \\x &= \pi + 2\pi m.\end{aligned}$$

Yhtälö (2) sisältää siten kaikki yhtälön (3) ratkaisut.

Vastaus: $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \cdot n$, jossa n on kokonaisluku.

Ratkaisujen yhdistämistä tuskin vaaditaan täysiin pisteisiin.

10.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Vaaleanpunainen pallo sivuaa kuution kaikkia tahkoja, joten sen halkaisija on kuution sivun pituus 2, eli sen säde r_1 on 1.

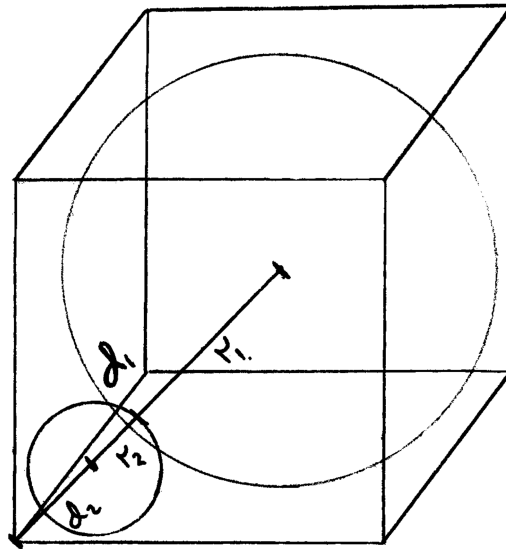
Tarkastellaan kuutiota, jonka yksi kärki on vaaleanpunaisen pallon keskipisteessä ja sen vastakkainen kärki alkuperäisen kuution kärjessä. Tämän kuution särmä on pallon säde r_1 ja lävistäjä on siten

$$d_1 = \sqrt{r_1^2 + r_1^2 + r_1^2} = \sqrt{3r_1^2} = \sqrt{3}r_1. \quad 1 \text{ p}$$

Toisaalta d_1 on etäisyys vaaleanpunaisen pallon keskipisteestä kärkeen.

Olkoon sinisen pallon säde r_2 . Samalla päättelyllä etäisyys sinisen pallon keskipisteestä kärkeen on $d_2 = \sqrt{3}r_2$.

1 p (2 p)



Nyt koska pallojen keskipisteet ja sivuamispiste ovat kuution halkaisijalla,

täytyy olla

$$d_1 = r_1 + r_2 + d_2 \quad 2 \text{ p (4 p)}$$

$$\sqrt{3}r_1 = r_1 + r_2 + \sqrt{3}r_2$$

$$\sqrt{3}r_1 - r_1 = \sqrt{3}r_2 + r_2$$

$$(\sqrt{3} - 1)r_1 = (\sqrt{3} + 1)r_2 \quad || : (\sqrt{3} + 1)$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}r_1 \quad || r_1 = 1$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

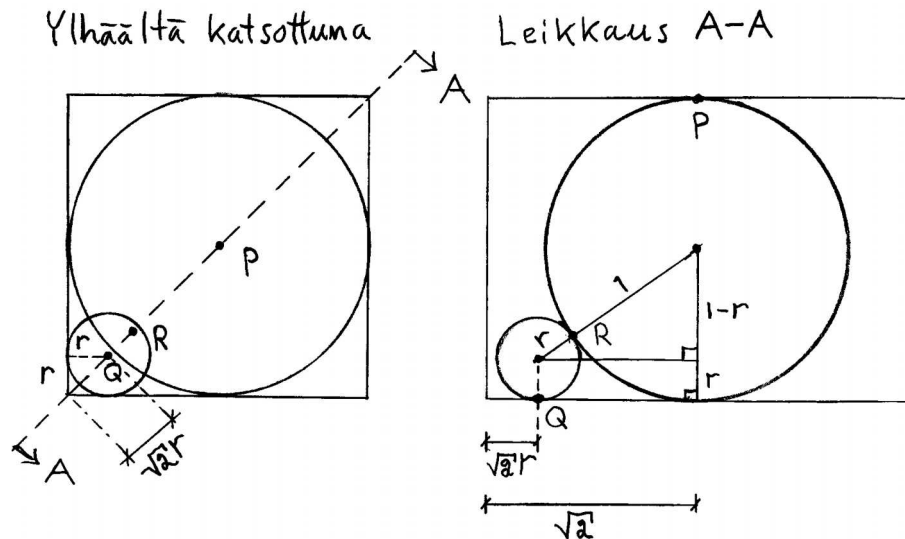
$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

2 p (6 p) Tässä ratkaisussa vastausta on vielä sievennetty, mutta sitä tuskin edellytetään täysien pisteiden saamiseksi.

Vastaus: Sinisen pallon säde on $2 - \sqrt{3}$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2



Kuvassa on esitetty tilanne suoraan ylhäältä katsottuna sekä leikkauskuva pystysuuntaisella tasolla, joka sisältää kuution lävistäjän.

Vasemmanpuoleisessa kuvassa neliön sivu on sama kuin kuution sivu eli 2. Neliön lävistäjä on siten $2\sqrt{2}$. Leikkauskuvassa suorakaiteen pidempi sivu on sama kuin em. neliön lävistäjä eli $2\sqrt{2}$.

1 p

P on suuremman pallon se piste, joka sivuaa kuution ylintä tahkoa. Näin ollen P sijaitsee ylhäältä katsottuna isoympyrän keskipisteessä ja keskellä neliön lävistäjää. Näin ollen leikkauskuvassa P sijaitsee suorakaiteen ylemmän sivun keskellä.

Q on pienemmän pallon se piste, joka sivuaa kuution alinta tahkoa. Näin ollen Q sijaitsee ylhäältä katsottuna pienen pallon isoympyrän keskipisteessä. Leikkauskuvassa Q sivuaa suorakaiteen alinta sivua.

R on piste, jossa pallot sivuavat toisiaan. Symmetrian vuoksi R sijaitsee kuution lävistäjällä, joten R sisältyy leikkaustasoon $A-A$. Sen vuoksi isoympyrät sivuavat leikkauskuvassa $A-A$.

1 p (2 p)

Merkitään pienen pallon sädettä r :llä. Ison pallon säde on puolet kuution korkeudesta, joten se on 1.

Nyt saadaan mitat leikkauskuvassa olevan suorakulmaisen kolmion kaikille sivuille. Hypotenuusa on $1 + r$, vaakasuuntainen kateetti on $\sqrt{2} - \sqrt{2}r$ ja pystykateetti $1 - r$. Pythagoraan lauseesta saadaan

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2}r)^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2$$

2 p (4 p)

Laskimella saadaan

$$r = 2 - \sqrt{3} = 0,2679 \dots \text{ tai } r = 2 + \sqrt{3} = 3,73205 \dots > 1.$$

1 p (5 p)

Jälkimmäinen ratkaisu hylätään, sillä näin iso pallo ei mahtuisi kuution sisään.

Vastaus: Sinisen pallon säde on $2 - \sqrt{3}$.

1 p (6 p)

11. Jonon jäsenet ovat

$$a_1 = \ln 2, \quad a_2 = \ln(2^x - 2), \quad a_3 = \ln(2^x + 2).$$

Jono on aritmeettinen, kun peräkkäisten jäsenten erotus on vakio

$$a_{n+1} - a_n = d,$$

jolloin

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= a_3 - a_2 \\ \ln(2^x - 2) - \ln 2 &= \ln(2^x + 2) - \ln(2^x - 2). \end{aligned} \quad 2 \text{ p}$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella, jolloin saadaan

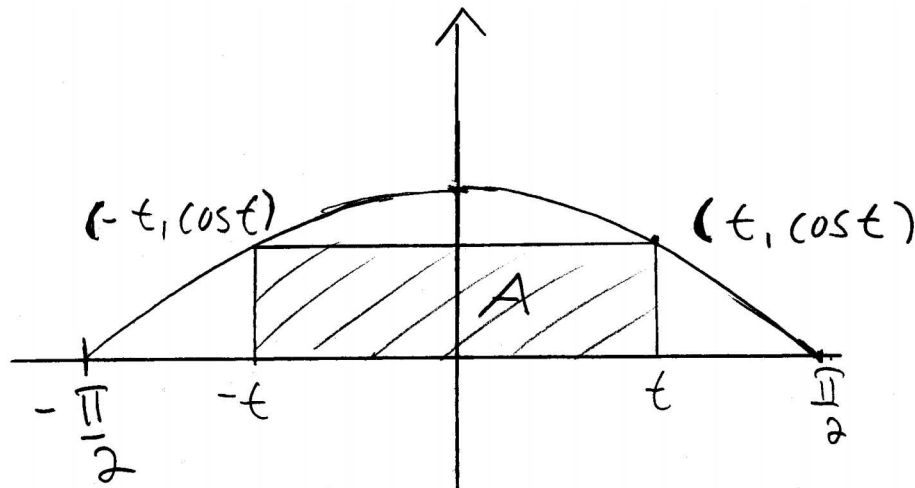
$$x = \frac{\ln 6}{\ln 2}.$$

Vastaus: Jono on aritmeettinen, kun $x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$. 4 p (6 p)

Ratkaisu ilman symbolista laskinta:

$$\begin{aligned} \ln(2^x - 2) - \ln 2 &= \ln(2^x + 2) - \ln(2^x - 2) & 2 \text{ p} \\ \ln(2^x - 2) + \ln(2^x - 2) &= \ln(2^x + 2) + \ln 2 \\ \ln(2^x - 2)^2 &= \ln(2 \cdot (2^x + 2)) & 1 \text{ p (3 p)} \\ (2^x - 2)^2 &= 2(2^x + 2) & 1 \text{ p (4 p)} \\ 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 &= 2 \cdot 2^x + 4 \\ 2^{2x} - 6 \cdot 2^x &= 0 \\ 2^x \cdot 2^x - 6 \cdot 2^x &= 0 \\ 2^x \cdot (2^x - 6) &= 0 \quad (\text{tulon nollasääntö}) \\ 2^x = 0 &\quad \text{tai} \quad 2^x - 6 = 0 & 1 \text{ p (5 p)} \\ \text{ei ratkaisua} &\quad 2^x = 6 \quad \parallel \ln() \\ &\quad \ln 2^x = \ln 6 \\ &\quad x \cdot \ln 2 = \ln 6 \quad \parallel : \ln 2 \\ &\quad \underline{\underline{x = \frac{\ln 6}{\ln 2}}} & 1 \text{ p (6 p)} \end{aligned}$$

12. a)



$$\cos(t) = \cos(-t),$$

1 p

joten suorakulmion pinta-ala on

$$\underline{\underline{A(t) = 2t \cdot \cos(t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}}}$$

1 p (2 p)

b) Pinta-alafunktion derivaatta on

$$A'(t) = 2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot t \cdot (-\sin(t))$$

$$A'(t) = 2 \cos(t) - 2t \sin(t)$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä:

Merkitään $A'(t) = f(t)$. Nollakohta:

$$f(t) = 0$$

$$2 \cos(t) - 2t \sin(t) = 0$$

Derivoidaan $f(t)$.

$$f'(t) = -2t \cos(t) - 4 \sin(t) \quad (\text{Laskimella})$$

1 p (3 p)

Tehdään alkuarvaus $t_0 = 1$.

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

$$t_1 = 1 - \frac{2 \cdot \cos(1) - 2 \cdot 1 \cdot \sin(1)}{-2 \cdot 1 \cdot \cos(1) - 4 \cdot \sin(1)}$$

$$t_1 = 0,86453 \dots$$

$$t_2 = 0,86033 \dots$$

$$t_3 = 0,86033 \dots$$

$$\approx 0,86$$

Vastaus: Derivaatan nollakohta on $t \approx 0,86$.

1 p (4 p)

- c) Muodostetaan pinta-alafunktion kulkukaavio. Lasketaan derivaatan arvot testipisteissä.

$$A'(0,5) = 2 \cdot \cos(0,5) - 2 \cdot 0,5 \cdot \sin(0,5) = 1,275 \dots > 0$$

$$A'(1) = -0,602 \dots < 0$$

	0	0,86	$\frac{\pi}{2}$
$A'(t)$	+	-	
$A(t)$	↗	↘	
	SUURIN ARVO		

1 p (5 p)

Lasketaan suurin pinta-ala:

$$A(0,86033) = 2 \cdot 0,86033 \cdot \cos(0,86033)$$

$$= 1,122 \dots$$

$$\approx 1,1$$

Vastaus: Suurin pinta-ala on 1,1.

1 p (6 p)

13. a)

A	B	$A \square B$	$A \square (A \square B)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

3 p

b)

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Kyseisten lauseiden totuusarvot ovat identtiset ja

$$A \square (A \square B) \Leftrightarrow A \wedge B$$

on siten tautologia.

3 p (6 p)

*14. a)

RATKAISUTAPA 1

$$P(x) = x^2 + x - 2$$

Jaetaan tekijöihin laskimella.

$$\underline{\underline{x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)}} \quad 2 \text{ p}$$

RATKAISUTAPA 2

Jaetaan tekijöihin tekijälauseella.

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \\ x &= \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \end{aligned} \quad 1 \text{ p}$$

Tekijälause:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2), \text{ joten} \\ x^2 + x - 2 &= \underline{\underline{(x - 1)(x + 2)}}. \end{aligned} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(x)} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}, \quad x \geq 2 \quad \parallel \text{ sij. } P(x) = (x - 1)(x + 2) \\ \frac{1}{(x - 1)(x + 2)} &= \frac{x+2}{x-1} \frac{A}{x+2} + \frac{x-1}{x+2} \frac{B}{x+2} \\ \frac{1}{(x - 1)(x + 2)} &= \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x - 1)(x + 2)} \\ \frac{1}{(x - 1)(x + 2)} &= \frac{(A + B)x + 2A - B}{(x - 1)(x + 2)} \end{aligned} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

Kun yhtälö on tosi, on

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

$$\text{Vastaus: } \underline{\underline{A = \frac{1}{3} \text{ ja } B = -\frac{1}{3}}}. \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

c) Olkoon $x \geq 2$.

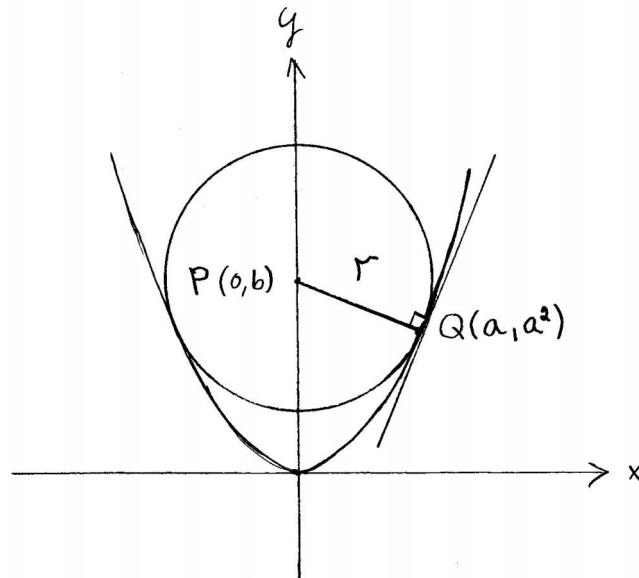
$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int \frac{1}{P(x)} dx = \int \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C \quad (x \geq 2) \quad \text{1 p (5 p)} \\
 &= \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + C \\
 &= \frac{1}{3} [\ln(x-1) - \ln(x+2)] + C \\
 &= \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} + C \quad \text{1 p (6 p)}
 \end{aligned}$$

Symbolinen laskin osaa määrittää $1/P(x)$ integraalifunktion ilman mitään tässä esitettyjä välivaiheita. Emme kuitenkaan suosittele toimimaan näin. YTL:n ohjeen mukaan laskimella voi laskea "laajemman tehtävän rutiiniosia", mutta tätä integrointia on arveluttavaa ajatella rutiiniosana, koska laskinta käyttäen välttään kokonaan käyttämästä osamurtohajotelmaa, joka on tehtävän idea.

d)

$$\begin{aligned}
 \int_2^\infty \frac{1}{P(x)} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} (I(a) - I(2)) \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{a-1}{a+2} - \frac{1}{3} \ln \frac{2-1}{2+2} \right) \quad \text{1 p (7 p)} \\
 &= \frac{1}{3} \ln \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a-1}{a+2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{3} \ln \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1-1/a}{1+2/a} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{3} \ln \frac{1-0}{1+0} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} \quad \text{1 p (8 p)} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{3} \ln 1}_{=0} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} \\
 &= -\frac{1}{3} \ln(4^{-1}) \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \ln 4 \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{3} \ln 4}} \quad \text{1 p (9 p)}
 \end{aligned}$$

*15. a)



Ympyrällä on sivuamispiste paraabelin kanssa joko origossa tai pisteissä (a, a^2) ja $(-a, a^2)$, missä $a > 0$. Merkitään ympyrän keskipistettä $P(0, b)$ sekä ympyrän ja paraabelin sivuamispistettä $Q(a, a^2)$.

Paraabelin yhtälö on $y = f(x) = x^2$ ja derivaatta $f'(x) = 2x$. Paraabelin tangentin kulmakerroin kohdassa $x = a$ on siten $f'(a) = 2a$. Koska käyrät sivuavat pisteessä Q , niillä on sama tangentti tässä pisteessä, joten myös ympyrän tangentin kulmakerroin pisteessä Q on $2a$. Sivuamispisteeseen piirretty säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten suoran PQ kulmakerroin on $-\frac{1}{2a}$. Pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran kulmakertoimelle pätee

$$\begin{aligned} y_P - y_Q &= k(x_P - x_Q) \\ b - a^2 &= -\frac{1}{2a}(0 - a) \\ b &= a^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

1 p

PQ on säde r , joten

$$\begin{aligned} r^2 &= |PQ|^2 \\ r^2 &= (a-0)^2 + (a^2-b)^2 \quad \text{||sij. (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + \left(a^2 - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\right)^2 \\ r^2 &= a^2 + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

$$r = (\pm) \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \quad (3)$$

Yhtälöstä (2) voidaan ratkaista myös a^2 .

$$a^2 = r^2 - \frac{1}{4} \quad (4)$$

1 p (2 p)

Yhtälöstä (3) nähdään, että kaikilla $a > 0$ löytyy ympyrä, joka sivuaa paraabelia pisteessä (a, a^2) ja tällöin ympyrän säde on $r(a) = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$. Funktio $r(a)$ on aidosti kasvava, kun $a > 0$ ja funktion arvot kasvavat rajatta, kun a kasvaa rajatta. Edelleen $r(0) = \frac{1}{2}$, joten $r(a)$ saa kaikki reaaliarvot $r > \frac{1}{2}$, kun $a > 0$. Kääntäen voidaan todeta, että kaikki ympyrät, joilla $r > \frac{1}{2}$ sivuavat annettua paraabelia pisteissä (a, a^2) ja $(-a, a^2)$, missä $a > 0$. Näille ympyröille on voimassa yhtälö (1). Sijoitetaan yhtälö (4) yhtälöön (1), saadaan $b = (r^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = r^2 + \frac{1}{4}$, mikä oli todistettava.

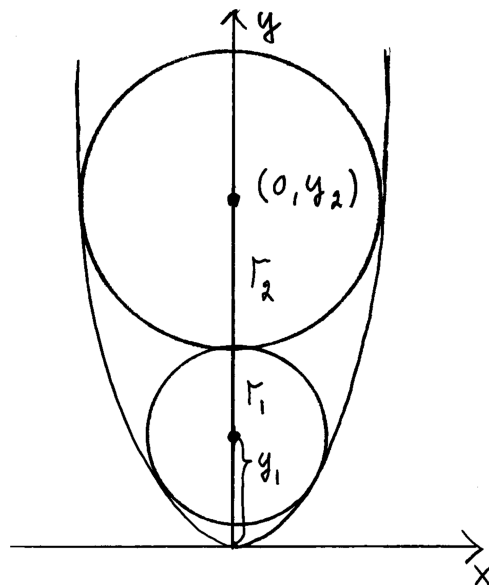
1 p (3 p)

b) a-kohdan nojalla ympyrän C_2 keskipisteen y -koordinaatti on

$$y_2 = r_2^2 + \frac{1}{4}$$

missä r_2 on ympyrän C_2 säde. Ympyrän C_1 keskipisteen y -koordinaatti on

$$y_1 = r_1^2 + \frac{1}{4}$$



Kuvasta nähdään, että

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 + r_1 + r_2 & 1 \text{ p (4 p)} \\
 r_2^2 + \frac{1}{4} &= r_1^2 + \frac{1}{4} + r_1 + r_2 \quad \| r_1 = 1 \\
 r_2^2 &= 1^2 + 1 + r_2 \\
 r_2^2 - r_2 - 2 &= 0 \\
 r_2 &= 2 \quad (\text{tai } r_2 = -1)
 \end{aligned}$$

Vain positiivinen arvo kelpaa.

Vastaus: Ympyrän C_2 säde on 2.

1 p (5 p)

c) Ympyrän C_{n+1} ja C_n keskipisteiden etäisyys toisistaan on

$$r_{n+1} + r_n$$

Toisaalta se on myös niiden y -koordinaattien erotus

$$y_{n+1} - y_n = r_{n+1}^2 + \frac{1}{4} - \left(r_n^2 + \frac{1}{4} \right) = r_{n+1}^2 - r_n^2 \quad 1 \text{ p (6 p)}$$

Eli

$$\begin{aligned}
 r_{n+1} + r_n &= r_{n+1}^2 - r_n^2 \\
 r_{n+1}^2 - r_{n+1} &= r_n^2 + r_n
 \end{aligned}$$

□

1 p (7 p)

d) c-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}r_{n+1}^2 - r_{n+1} &= r_n^2 + r_n \quad \parallel + \frac{1}{4} \\r_{n+1}^2 - r_{n+1} + \frac{1}{4} &= r_n^2 + r_n + \frac{1}{4} \\ \left(r_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(r_n + \frac{1}{2}\right)^2 && \text{1 p (8 p)} \\ r_{n+1} - \frac{1}{2} &= (\pm) \left(r_n + \frac{1}{2}\right) \quad \parallel r \geq 1 \text{ kaikilla } n \\ r_{n+1} &= r_n + 1 && \square \quad \text{1 p (9 p)}\end{aligned}$$