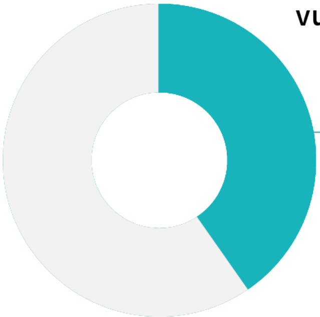
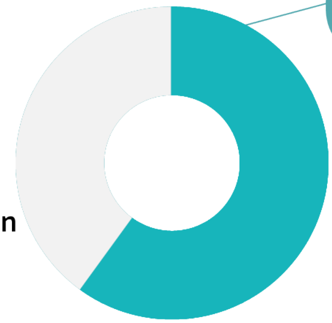
YO-MALLIVASTAUKSET

PITKÄ MATEMATIIKKA

KEVÄT 2019

Tiesitkö tämän?





60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti ja Teemu perustivat MAFY:n vuonna 2008. Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ennen MAFY:n perustamista ja Antti työskenteli tuntiopettajana TKK:lla.

Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista PK-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetin oppimateriaalien kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Timo Kalinainen, Tuomas Hauvala ja Katja Niemistö.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:

1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1 ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ (2 p.)

1.6. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ (2 p.)

Ratkaisu.

Lasketaan jokaisesta lukujonosta neljä ensimmäistä jäsentä ja valitaan oikea vastausvaihtoehto:

1.1. $a_n = 2n - 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1 - 1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \cdot 2 - 1 &= 3 \\ a_3 &= 2 \cdot 3 - 1 &= 5 \\ a_4 &= 2 \cdot 4 - 1 &= 7 \end{aligned}$$

Vastaus: **C.** (1, 3, 5, 7, . . .) 2p

1.2. $a_n = n^2$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 &= 1 \\ a_2 &= 2^2 &= 4 \\ a_3 &= 3^2 &= 9 \\ a_4 &= 4^2 &= 16 \end{aligned}$$

Vastaus: **D.** $(1, 4, 9, 16, \ldots)$ 2p(4p)

1.3. $a_n = n^3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^3 &= 1 \\ a_2 &= 2^3 &= 8 \\ a_3 &= 3^3 &= 27 \\ a_4 &= 4^3 &= 64 \end{aligned}$$

Vastaus: **E.** $(1, 8, 27, 64, \ldots)$ 2p(6p)

1.4. $a_n = 2^n$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^1 &= 2 \\ a_2 &= 2^2 &= 4 \\ a_3 &= 2^3 &= 8 \\ a_4 &= 2^4 &= 16 \end{aligned}$$

Vastaus: **G.** $(2, 4, 8, 16, \ldots)$ 2p(8p)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a_1 & & = 2 \\ a_2 & = 2 + 2 & = 4 \\ a_3 & = 4 + 2 & = 6 \\ a_4 & = 6 + 2 & = 8 \end{aligned}$$

Vastaus: **F.** $(2, 4, 6, 8, \ldots)$

2p (10p)

1.6. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$

$$\begin{aligned} a_1 & & = 1 \\ a_2 & & = 2 \\ a_3 & = 1 + 2 & = 3 \\ a_4 & = 2 + 3 & = 5 \end{aligned}$$

Vastaus: **B.** $(1, 2, 3, 5, \ldots)$

2p (12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

2. Vektorien pistetulo (12 p.)

Määritä sellainen vektori $\bar{c} = a\bar{i} + b\bar{j}$, että $\bar{c} \cdot (\bar{i} + \bar{j}) = 2$ ja $\bar{c} \cdot (\bar{i} - \bar{j}) = 3$.

Ratkaisu.

$$\bar{c} = a\bar{i} + b\bar{j}.$$

Tehtävänannon ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{aligned} \bar{c} \cdot (\bar{i} + \bar{j}) &= 2 \\ (a\bar{i} + b\bar{j}) \cdot (\bar{i} + \bar{j}) &= 2 \\ a + b &= 2 \qquad (1) \end{aligned}$$

2p

Tehtävänannon toisesta yhtälöstä:

$$\begin{aligned} \bar{c} \cdot (\bar{i} - \bar{j}) &= 3 \\ (a\bar{i} + b\bar{j}) \cdot (\bar{i} - \bar{j}) &= 3 \\ a - b &= 3 \qquad (2) \end{aligned}$$

2p(4p)

Lasketaan yhtälöt (1) ja (2) puolittain yhteen:

$$\begin{aligned} a + b + a - b &= 2 + 3 \\ 2a &= 5 \quad \| : 2 \\ a &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

4p(8p)

Sijotetaan tämä yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} + b &= 2 \\ b &= 2 - \frac{5}{2} \\ b &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4p (12p)

Vastaus: Kysytty vektori on siis

$$\bar{c} = \frac{5}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}.$$

Pisteytyksestä: Jos on annettu vain kertoimet a ja b, eikä selkeästi vektoria $\bar{c}$ vastaukseksi, menettää 2p.

3. Luonnollinen logaritmi (12 p.)

Selvitä, kumpi lauseke on suurempi muuttujan arvoilla $x > 1$:

$$\ln(2x+1) - \ln(2x) \quad \text{tai} \quad \ln(x+1) - \ln x.$$

Ratkaisu.

Vinkki: Tässä tehtävässä pystyi tarkistamaan vastauksensa KCALC-laskimen avulla laskemalla molempien lausekkeiden arvon esimerkiksi, kun $x = 2$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Tarkastellaan lausekkeiden erotusta.

Tarkoituksena on saada sievennettyä erotus sellaiseen muotoon, että voidaan päätellä, onko se positiivinen tai negatiivinen. Merkitään $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$ ja $g(x) = \ln(2x+1) - \ln(2x)$. Jos erotus $f(x) - g(x)$ on positiivinen, $f(x) > g(x)$, ja vastaavasti jos erotus on negatiivinen, $f(x) < g(x)$.

$$\begin{aligned}
&\ln(x+1) - \ln(x) - (\ln(2x+1) - \ln(2x)) \\
&= \ln(x+1) - \ln(x) - \ln(2x+1) + \ln(2x) \\
&= \ln(x+1) + \ln(2x) - (\ln(2x+1) + \ln(x)) \\
&= \ln((x+1)\cdot 2x) - \ln((2x+1)\cdot x) \\
&= \ln\left(\frac{(x+1)\cdot 2x}{(2x+1)\cdot x}\right) \qquad \text{5p} \\
&= \ln\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right) \qquad \text{2p(7p)}
\end{aligned}$$

Pisteytyksestä: Ensimmäisistä 5 pisteestä 3p tulee, kun saa yhdistetyä logaritmit siten, että jäljelle jää vain kahden logaritmin summa tai erotus. Loput 2p tulee, kun saa yhdistettyä myös em. logaritmit yhdeksi logaritmiksi.

Tässä kohdassa voidaan päätellä, että logaritmin sisällä oleva lauseke $\dfrac{2x+2}{2x+1}$ on suurempi kuin 1. Jos sitä ei näe suoraan, lauseketta voi vielä muokata seuraavasti:

$$\frac{2x+2}{2x+1} = \frac{2x+1+1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} = 1 + \frac{1}{2x+1},$$

jos on muotoa yksi plus positiivinen luku, eli varmasti suurempi kuin 1.

Logaritmi on aidosti kasvava funktio 2p(9p)
ja $\dfrac{2x+2}{2x+1} > 1$ 2p (11p)
joten

$$\ln\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right) > \ln(1) = 0.$$

Erotus on suurempi kuin nolla, joten

$$\ln(x+1) - \ln(x) > \ln(2x+1) - \ln(2x).$$

Vastaus: Lauseke $\ln(x+1) - \ln(x)$ on suurempi kuin lauseke $\ln(2x+1) - \ln(2x)$ muuttujan arvoilla $x > 1$. 1p (12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Huomataan, että vasemman- ja oikeanpuoleiset lausekkeet ovat varsin saman näköiset, mutta vasemmanpuoleisessa lausekkeessa on x:n kertoimena lukuja 2, joita oikeanpuoleisessa lausekkeessa ei ole. Yritetään muokata oikeanpuoleista lauseketta niin, että siitä tulee mahdollisimman samanlainen kuin vasemmanpuoleiseta lausekkeesta ja toivotaan, että näin saadaan johdettua muoto, josta voidaan päätellä, että toinen lausekkeista on suurempi.

Tarkastellaan oikeanpuoleista lauseketta.

$$\begin{aligned}\ln(x+1) - \ln(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) && \text{2p}\\ &= \ln\left(\frac{2(x+1)}{2x}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2x+2}{2x}\right) && \text{2p(4p)}\\ &= \ln\left(\frac{2x+1}{2x} + \frac{1}{2x}\right) && \text{3p(7p)}\end{aligned}$$

Logaritmi on aidosti kasvava funktioja 2p (9p)

$$\frac{2x+1}{2x} + \frac{1}{2x} > \frac{2x+1}{2x}, \quad \text{2p (11p)}$$

joten

$$\ln\left(\frac{2x+1}{2x}+\frac{1}{2x}\right) > \ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$$
$$= \ln(2x+1) - \ln(2x).$$

Vastaus: Lauseke $\ln(x+1) - \ln(x)$ on suurempi kuin lauseke $\ln(2x+1) - \ln(2x)$ muuttujan arvoilla $x > 1$.

1p (12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Huomataan, että vasemman- ja oikeanpuoleiset lausekkeet ovat varsin saman näköiset, mutta vasemmanpuoleisessa lausekkeessa on x:n kertoimena lukuja 2, joita oikeanpuoleisessa lausekkeessa ei ole. Yritetään muokata molempia lausekkeita niin, että niistä tulee mahdollisimman samanlaiset ja toivotaan, että saadaan johdettua lausekkeet muotoon, josta voidaan päätellä, että toinen lausekkeista on suurempi. Alla olevassa ratkaisussa on ensin muokattu vasemmanpuoleinen lauseke lopulliseen muotoonsa ja sitten vasta oikeanpuoleinen lauseke, mutta siinä vaiheessa kun ratkaisua yrittää keksiä, kannattaa muokata molempia lausekkeita samaan aikaan esimerkiksi vierekkäin suttupaperilla.

Muokataan vasemmanpuolista lauseketta:

$$\ln(2x+1) - \ln(2x) = \ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$$

2p

$$= \ln\left(\frac{2x}{2x}+\frac{1}{2x}\right)$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right).$$

2p(4p)

Muokataan oikeanpuolista lauseketta:

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

3p(7p)

Pisteytyksestä: Jos muokkasi ensin oikeanpuolisen lausekkeen ja sitten vasemmanpuolisen, saa vastaavasti 2p + 2p ensin muokatusta ja 3p toiseksi muokatusta lausekkeesta.

Tehtävänannon mukaan $x > 1$, joten

$$\frac{1}{2x} < \frac{1}{x}$$ 2p(9p)

$$1 + \frac{1}{2x} < 1 + \frac{1}{x}$$

Logaritmi on aidosti kasvava funktio, 2p (11p)
joten myös

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Näin ollen siis

$$\ln(2x + 1) - \ln(2x) < \ln(x + 1) - \ln(x).$$

Vastaus: Lauseke $\ln(x + 1) - \ln(x)$ on suurempi kuin lauseke $\ln(2x + 1) - \ln(2x)$ muuttujan arvoilla $x > 1$. 1p (12p)

MAFY-valmennus kiittää Munkkiniemen yhteiskoulun lukion Pekka Kontkasta vastausvaihtoehtojen lisäykseen johtaneesta palautteesta!

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

4. Lauseke kuvaajasta (12 p.)

Aineisto:

4.A Kuva: Rationaalifunktion kuvaaja

Kuvassa 4.A on esitetty muotoa

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$$

olevan funktion kuvaaja $y = f(x)$, kun kertoimet a, b, c ja d ovat kokonaislukuja.

Päättele kuvaajan perusteella kertoimien arvot ja selitä sanallisesti, miten päädyit ratkaisuun.

Ratkaisu.

Kuvaajasta nähdään, että

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \infty,$$

joten nimittäjä $2x + d = 0$ kohdassa $x = -1$. 2p

Saadaan siis

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1) + d &= 0 \\ d &= 2. \end{aligned}$$

2p(4p)

Pisteytyksestä: 2p vakion d arvosta ja 2p sen selvittämiseen liittyvästä selityksestä.

Funktion lauseke on siis

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + 2}.$$

Kuvaajasta nähdään, että $f(0) = 2$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c}{2 \cdot 0 + 2} &= 2 \\ \frac{c}{2} &= 2 \quad \| \cdot 2 \\ c &= 4. \end{aligned}$$

3p(7p)

Pisteytyksestä: 2p tulee vakion c arvosta ja 1p tulee sen selvittämiseen liittyvästä selityksestä.

Funktion lauseke on siis

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{2x + 2}.$$

Kuvaajasta nähdään, että $f(6) = 2$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 4}{2 \cdot 6 + 2} &= 2 \\
\frac{36a + 6b + 4}{14} &= 2 \quad \| \cdot 14 \\
36a + 6b + 4 &= 28 \\
36a + 6b &= 24 \quad \| : 6 \\
6a + b &= 4 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Kuvaajasta nähdään, että $f(-8) = -6$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{a \cdot (-8)^2 + b \cdot (-8) + 4}{2 \cdot (-8) + 2} &= -6 \\
\frac{64a - 8b + 4}{-14} &= -6 \quad \| \cdot (-14) \\
64a - 8b + 4 &= 84 \\
64a - 8b &= 80 \quad \| : 8 \\
8a - b &= 10 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Lasketaan yhtälöt (1) ja (2) puolittain yhteen. Saadaan

$$\begin{aligned}
6a + b + 8a - b &= 4 + 10 \\
14a &= 14 \quad \| : 14 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

2p(9p)

Sijoitetaan tämä yhtälöön (1):

$$\begin{aligned}
6 \cdot 1 + b &= 4 \\
b &= 4 - 6 = -2.
\end{aligned}$$

3p (12p)

Pisteytyksestä: 2p vakioiden a ja b arvoista kummastakin, ja 1p niiden selvittämiseen liittyvästä selityksestä.

Vastaus: Kertoimien arvot ovat siis

$$\begin{aligned}
a &= 1 \\
b &= -2 \\
c &= 4 \\
d &= 2.
\end{aligned}$$

5. Paraabeleja pohjapiirroksessa (12 p.)

Aineisto:

5.A Kuva: Kalevalakehto

5.B Kuva: Koordinaatistopiirros

Suomalais-amerikkalainen arkkitehtiopiskelijaryhmä rakensi Helsingin Seurasaareen Kalevalakehto-nimisen rakennuksen (aineisto 5.A). Tulos oli niin onnistunut, että on keskusteltu toisenkin samantapaisen rakennuksen rakennuttamisesta. Uuden rakennuksen pohjan muotoa kuvaavat vastakkaisiin suuntiin aukeavat paraabelit, kuten koordinaatistopiirroksessa (aineisto 5.B). Pohjan pituus on 10 metriä ja leveys 4 metriä.

5.1. Muodosta paraabelien yhtälöt. (6 p.)
5.2. Laske rakennuksen pohjan pinta-ala. (6 p.)

Ratkaisu.

5.1.
Paraabelit ovat muotoa

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ylempi paraabeli kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(5, 2)$ ja $(10, 0)$ kautta, joten se toteuttaa yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 &= a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \\ 2 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c. \end{aligned}$$

Ratkaistaan kertoimet a, b ja c CAS-ohjelmalla:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ 0=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c \\ 2=a\cdot 5^2+b\cdot 5+c \end{cases}, \{a,b,c\}\right) \blacktriangleright a=\frac{-2}{25} \text{ and } b=\frac{4}{5} \text{ and } c=0$$

Ylemmän paraabelin yhtälö on siis

$$y_1(x) = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{4}{5}x.$$

5p

Pisteytyksestä: Ensimmäisen paraabelin yhtälön selvittämisestä saa yhteensä 5p, joka jakautuu seuraavasti:

- nollakohdat = 1p
- huippu = 1p
- kertoimet a, b ja c = 3p

Alempi paraabeli kulkee pisteiden $(0,0)$, $(5,-2)$ ja $(10,0)$ kautta, joten se toteuttaa yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} 0 &= a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 0 &= a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c \\ -2 &= a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c. \end{aligned}$$

Ratkaistaan kertoimet a, b ja c CAS-ohjelmalla:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ 0=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c \\ -2=a\cdot 5^2+b\cdot 5+c \end{cases},\{a,b,c\}\right) \blacktriangleright a=\frac{2}{25} \text{ and } b=\frac{-4}{5} \text{ and } c=0$$

Vaihtoehtoisesti alemman paraabelin yhtälön voi päätellä suoraan siitä, että se on ylemmän paraabelin peilikuva x-akselin suhteen, joten kertoimet ovat ylemmän paraabelin kertoimien vastalukuja.

Alemman paraabelin yhtälö on siis

$$y_2(x) = \frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{5}x.$$

1p(6p)

5.2.

Lasketaan rakennuksen pohjan pinta-ala:

$$\mathbf{y1}(x):=\frac{-2}{25}\cdot x^2+\frac{4}{5}\cdot x$$

$$\mathbf{y2}(x):=\frac{2}{25}\cdot x^2-\frac{4}{5}\cdot x \blacktriangleright \textit{Valmis}$$

$$\int_0^{10}\left(\mathbf{y1}(x)-\mathbf{y2}(x)\right)\mathrm{d}x \blacktriangleright \frac{80}{3}$$

4p (10p)

Pisteytyksestä: Ensimmäiset 4 pistettä saa, kun muodostaa integraalin lausekkeen, johon on joko sijoittanut paraabelien lausekkeet suoraan tai yllä olevan kuvan tavoin. Loput 2 pistettä saa integroinnin suorittamisesta lopulliseen vastaukseen asti. Jos opiskelija on laskenut integraalifunktion lausekkeen oikein, mutta numeerinen vastaus on väärin, ratkaisu on 5 pisteen arvoinen.

Pinta-ala on siis

$$A = \frac{80}{3}$$
$$A = 26{,}66\ldots$$
$$A \approx 27 \quad (\mathrm{m}^2)$$

Vastaus: Rakennuksen pohjan pinta-ala on 27 neliömetriä.

2p (12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

6. Shakkilauta ja riisinjyvät (12 p.)

Shakkilaudassa on 8×8 ruudukko ja sitä ympäröi $5\,\mathrm{cm}$ leveä harmaa reuna. Ruudukon joka toinen ruutu on valkoinen ja joka toinen musta. Laudan koko reunoineen on $50\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$.

Laudalle pudotetaan satunnaisesti 30 riisinjyvää. Kuinka suurella todennäköisyydellä vähintään 15 riisinjyvän keskipiste osuu valkoiseen ruutuun?

Ratkaisu.

Laudan mitat ovat 50×50. Koko laudan pinta-ala on siis

$$A_k = 50 \cdot 50 = 2500.$$

1p

Ruudukkoa ympäröi reuna, jonka leveys on 5. Näin ollen ruudukon leveys on

$$50 - 2 \cdot 5 = 40.$$

Puolet ruudukosta on valkoisten ruutujen pinta-alaa, joten valkoisten ruutujen yhteenlaskettu pinta-ala on

$$A_v = \frac{40 \cdot 40}{2} = 800.$$

2p(3p)

Geometrisella todennäköisyydellä saadaan siis, että yhden riisin keskikohdan todennäköisyys osua valkoiselle ruudulle on siis

$$p = \frac{A_v}{A_k} = \frac{800}{2500} = \frac{8}{25}.$$

1p(4p)

RATKAISUN JATKOVAIHTOEHTO 1

Oletetaan, että riisinjyvien sijoittuminen laudalle on toisistaan riippumatonta, jolloin kyseessä on toistokoe.

1p(5p)

Todennäköisyys, että vähintään 15 riisinjyvän keskikohta osuu valkoiselle ruudulle on siis

$$P(\text{vähintään 15}) = \sum_{k=15}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}$$
$$= 0{,}03049\ldots \approx 3{,}0\%.$$

5p (10p)

Vastaus: Vähintään 15 riisinjyvää osuu valkoisille ruuduille todennäköisyydellä $3{,}0\%$.

2p (12p)

Huom! Vastaukseksi käy myös $0{,}030$.

RATKAISUN JATKOVAIHTOEHTO 2

Oletetaan, että riisinjyvien sijoittuminen laudalle on toisistaan riippumatonta, jolloin kyseessä on toistokoe. Tällöin valkoisille ruuduille osuvien riisinjyvien määrä noudattaa binomijakaumaa. 1p(5p)

Todennäköisyydeksi saadaan siis CAS-ohjelman binomijakaumafunktiolla:

$$\mathrm{binomCdf}\left(30,\frac{8}{25},15,30\right) \blacktriangleright 0.030497$$

5p (10p)

Todennäköisyys on siis

$$P(\text{vähintään 15}) = 0{,}03049\ldots \approx 3{,}0\%.$$

Vastaus: Vähintään 15 riisinjyvää osuu valkoisille ruuduille todennäköisyydellä $3{,}0\%$. 2p (12p)

Huom! Vastaukseksi käy myös $0{,}030$.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

7. Polynomin itseisarvo (12 p.)

Anna esimerkki toisen asteen polynomista $ax^2 + bx + c$, jolle yhtälöllä

$$|ax^2 + bx + c| = 4$$

on täsmälleen kolme ratkaisua. Muista myös perustella, miksi esimerkilläsi on vaadittu ominaisuus.

Vihje: Voi olla hyödyllistä piirtää tietokoneella funktion $f(x) = |ax^2+bx+c|$ kuvaaja kertoimien a, b ja c eri arvoilla.

Ratkaisu.

Yhtälön

$$|ax^2 + bx + c| = 4$$

ratkaisut ovat kaikki yhtälöiden

$$ax^2 + bx + c = 4 \tag{1}$$
$$ax^2 + bx + c = -4 \tag{2}$$

ratkaisut. 3p

Keksitään esimerkiksi, että ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa suoraa $y = -4$, toteuttaa annetun ehdon, koska sillä on kaksi yhteistä pistettä suoran $y = 4$ kanssa ja yksi yhteinen piste suoran $y = -4$ kanssa, joten ratkaisuja on yhteensä täsmälleen kolme.

Tutkitaan paraabelia $y = x^2 - 4$. Yhtälön (1) ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 4 \\ x &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2p(5p)

ja yhtälön (2) ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= -4 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

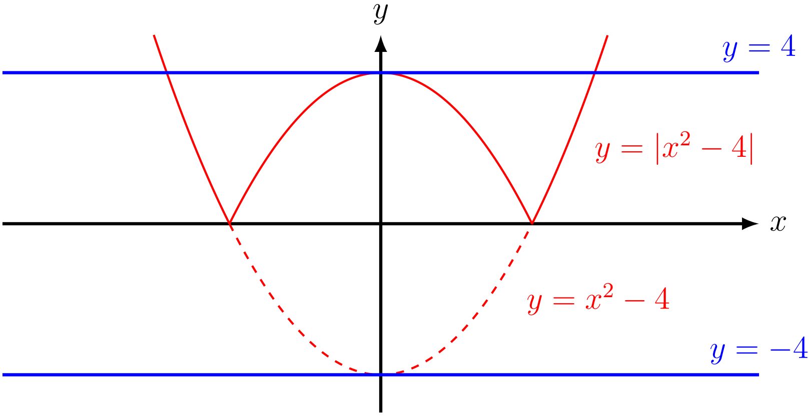
2p(7p)

Näin ollen ratkaisuja on täsmälleen kolme. 2p(9p)

Vastaus: $x^2 - 4$ 3p (12p)

Pisteytyksestä: Yhtälöiden (1) ja (2) sijaan ratkaisujen määrän voi perustella myös vetoamalla paraabelin muotoon ja huipun peilautumiseen x-akselilta.

Lisäselitys: Kuvaaja näyttää siis seuraavalta:



Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

8. Kuinka monta nollaa? (12 p.)

Kuinka moneen nollaan päättyy luku

$$(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000}?$$

Ratkaisu.

Merkitään

$$n = (10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000}.$$

Muodostetaan luvun $9!$ alkutekijähajotelma:

$$\begin{aligned} 9! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \\ 9! &= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7. \end{aligned} \tag{1}$$

Hajotelmasta (1) nähdään, että

$$\begin{aligned} 9! &= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5) \\ 9! &= 10 \cdot (2^6 \cdot 3^4 \cdot 7). \end{aligned} \tag{2}$$

Merkitään

$$p = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7,$$

jolloin (2) saadaan muotoon

$$9! = 10p. \tag{3}$$

Koska

$$(10!)^{1\,000\,000} = (10 \cdot 9!)^{1\,000\,000} = 10^{1\,000\,000} \cdot (9!)^{1\,000\,000},$$

niin

$$\begin{aligned} n &= 10^{1\,000\,000} \cdot (9!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000} \\ n &= (10^{1\,000\,000} - 1)(9!)^{1\,000\,000} \end{aligned} \tag{4}$$

3p

Sijoitetaan (3) yhtälöön (4), saadaan

$$\begin{aligned} n &= (10^{1\,000\,000} - 1)(10p)^{1\,000\,000} \\ &= (10^{1\,000\,000} - 1) \cdot p^{1\,000\,000} \cdot 10^{1\,000\,000}. \end{aligned} \tag{5}$$

Tulo (5) jakautuu siis tekijöihin $10^{1\,000\,000}qr$, missä

$$q = 10^{1\,000\,000} - 1 \quad \text{ja} \quad r = p^{1\,000\,000}.$$

Osoitetaan, että luku qr ei ole jaollinen luvulla 10. Tätä varten riittää osoittaa, että qr ei ole jaollinen luvulla 5.
Koska

$$q = 10^{1\,000\,000} - 1 = \underbrace{9\,999\ldots999}_{1\,000\,000 \text{ kertaa luku } 9},$$

niin sen viimeinen numero on 9 eikä q näin ollen ole jaollinen luvulla 5. 2p(5p)
Lisäksi tiedetään, ettei luvun p alkutekijähajotelma sisällä lukua 5, joten myöskään luvun $r = p^{1\,000\,000}$ alkutekijähajotelma ei sisällä lukua 5. Tästä seuraa, ettei qr voi olla jaollinen luvulla 5 eikä näin ollen myöskään luvulla 10. 2p(7p)
Luvulle n saadaan siis esitys

$$n = 10^{1\,000\,000}m,$$

missä $m = qr$ ei ole jaollinen luvulla 10. Luvussa on yhtä monta nollaa kuin monta kertaa se on jaollinen luvulla 10, 1p(8p)
joten luku $(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000}$ päättyy $1\,000\,000$ nollaan.

Vastaus: Luku $(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000}$ päättyy $1\,000\,000$ nollaan. 4p (12p)

9. Veneen kulkema matka (12 p.)

Aineisto:

9.A Taulukko: Veneen nopeus

Matti seuraa moottoriveneen nopeusmittaria ja kirjaa veneen nopeuden 20 sekunnin välein. Tuloksena on taulukko 9.A.

Arvioi taulukon avulla veneen kulkemaa matkaa

$$s = \int_0^{200} v(t)\,dt$$

käyttämällä numeerisen integroinnin

9.1. puolisuunnikassääntöä (6 p.)
9.2. Simpsonin sääntöä. (6 p.)

Ratkaisu.

9.1.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Aineistosta huomataan, että osavälin pituus on $20\,\mathrm{s}$. 1p
Lasketaan integraali puolisuunnikassäännöllä käyttämällä taulukkolaskentaa apuna. Nopeudet on ensin muutettu yksikköön $\mathrm{m/s}$ jakamalla $3{,}6$:lla, jolloin yksiköt menevät oikein ja laskun tulos saadaan suoraan metreinä.

D2 =20*(0.5*C2+SUM(C3:C11)+0.5*C12)

	A	B	C	D
1	*t* (s)	*v(t)* (km/h)	v(t) (m/s)	Puolisuunnikassääntö
2	0	0	0.00	841.666666666666
3	20	5	1.39	
4	40	12	3.33	
5	60	15	4.17	
6	80	12	3.33	
7	100	15	4.17	
8	120	18	5.00	
9	140	20	5.56	
10	160	22	6.11	
11	180	22	6.11	
12	200	21	5.83	

3p(4p)

Saadaan siis

$$s = \int_0^{200} v(t)\,\mathrm{d}t = 841{,}66\ldots\,\mathrm{m} \approx 840\,\mathrm{m}.$$

Vastaus: Veneen kulkemaksi matkaksi saadaan puolisuunnikassäännöllä 840 metriä.

2p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Huomataan aineistosta, että jakoväli $h = 20$. 1p

Tallennetaan jokainen nopeuden arvo muuttujiin v_0, v_1, $\ldots$ jne CAS-ohjelmaan. Lasketaan integraali puolisuunnikassäännöllä:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{200} v(t)\,\mathrm{d}x \\ &\approx h\left(\frac{1}{2}v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{11} + \frac{1}{2}v_{12}\right) \\ &= 841{,}66\ldots\,\mathrm{m} \\ &\approx 840\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

3p(4p)

Vastaus: Veneen kulkemaksi matkaksi saadaan puolisuunnikassäännöllä 840 metriä.

2p(6p)

Jos integraalin laskee suoraan annetuilla arvoilla, yksiköksi tulee $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{s}$. Tämän saa vältettyä joko muuntamalla ensin kaikki nopeudet yksikköön $\mathrm{m/s}$ tai vaihtoehtoisesti syöttämällä jakovälin $h = 20\,\mathrm{s}$ ja nopeudet TI-Nspiressa yksiköineen, jolloin ohjelma sieventää yksiköt automaattisesti.

9.2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Aineistosta huomataan, että osavälin pituus on $20\,\mathrm{s}$. Lasketaan integraali Simpsonin säännöllä käyttämällä taulukkolaskentaa apuna. Nopeudet on ensin muutettu yksikköön $\mathrm{m/s}$ jakamalla $3{,}6$:lla, jolloin yksiköt menevät oikein ja laskun tulos saadaan suoraan metreinä.

D2 =(20/3)*(C2+4*C3+2*C4+4*C5+2*C6+4*C7+2*C8+4*C9+2*C10+4*C11+C12)

	A	B	C	D
1	t (s)	v(t) (km/h)	v(t) (m/s)	Simpsonin sääntö:
2	0	0	0.00	846.296296296296
3	20	5	1.39	
4	40	12	3.33	
5	60	15	4.17	
6	80	12	3.33	
7	100	15	4.17	
8	120	18	5.00	
9	140	20	5.56	
10	160	22	6.11	
11	180	22	6.11	
12	200	21	5.83	

4p (10p)

Pisteytyksestä: Simpsonin säännön käytöstä ennen vastauksen tarkkaan arvoon päätymistä saa 4p, ja numeerisesta vastaukesta pyöristyksineen yhteensä 2p.

Saadaan siis

$$s = \int_0^{200} v(t)\,\mathrm{d}t = 846{,}29\ldots\ \mathrm{m} \approx 850\,\mathrm{m}.$$

Vastaus: Veneen kulkemaksi matkaksi saadaan Simpsonin säännöllä 850 metriä. 2p (12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Huomataan aineistosta, että jakoväli $h = 20\,\mathrm{s}$. Tallennetaan jokainen nopeuden arvo muuttujiin $v_0, v_1, \ldots$ jne CAS-ohjelmaan. Lasketaan integraali Simpsonin säännöllä:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{200} v(t)\,\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{h}{3}\left(v_0 + 4v_1 + 2v_2 + 4v_3 + \ldots + 4v_{11} + v_{12}\right) \\ &= 846{,}29\ldots\ \mathrm{m} \\ &\approx 850\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

4p (10p)

Vastaus: Veneen kulkemaksi matkaksi saadaan Simpsonin säännöllä 850 metriä. 2p (12p)

Jos integraalin laskee suoraan annetuilla arvoilla, yksiköksi tulee $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{s}$. Tämän saa vältettyä joko muuntamalla ensin kaikki nopeudet yksikköön $\mathrm{m/s}$ tai vaihtoehtoisesti syöttämällä jakovälin $h = 20\,\mathrm{s}$ ja nopeudet TI-Nspiressa yksiköineen, jolloin ohjelma sieventää yksiköt automaattisesti.

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

10. Pohditaan sarjoja (12 p.)

10.1. Mikä seuraavassa päättelyssä on väärin?

$$\text{"Koska} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ niin } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1."$$

(3 p.)

10.2. Määritä jokin sellainen luku $x \in \mathbb{R}$, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tan(x))^n = \frac{3}{2}.$$

Anna vastaus radiaaneissa kolmen desimaalin tarkkuudella. (9 p.)

Ratkaisu.

10.1.
Geometrisen sarjan summan kaava

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pätee vain, kun $|x| < 1$. 2p
Sarja hajaantuu, kun $|x| \geq 1$, eli esimerkiksi silloin, kun $x = 2$. 1p(3p)

Pisteytyksestä: Jos opiskeija on vastannut vain, että positiivisten lukujen summa ei voi olla negatiivinen, saa korkeintaan 2p.

10.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tan(x))^n = \frac{3}{2}.$$

Kun $|\tan(x)| < 1$, pätee geometrisen sarjan summan kaava

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tan(x))^n = \frac{1}{1-\tan(x)}$$ 1p(4p)

Ratkaistaan CAS-ohjelman avulla, millä $\tan(x)$ tästä tulee $\frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{1-\tan(x)} = \frac{3}{2}$$ 2p(6p)

$$\tan(x) = \frac{1}{3}.$$ 2p(8p)

Luku $\frac{1}{3} < 1$, joten tämä toteuttaa tehtävänannon yhtälön. Yhtälön $\tan(x) = \frac{1}{3}$ ratkaisu on

2p (10p)

$$x = 0{,}3217\ldots \approx 0{,}322.$$

Vastaus: Eräs ratkaisu on $x \approx 0{,}322$.

2p (12p)

11. Trigonometrinen yhtälö (12 p.)

Olkoot

$$f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$$

ja

$$g(x) = \sin(x)^{\cos(x)},$$

kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu, ja määritä se.

Ratkaisu.

Halutaan osoittaa, että yhtälöllä

$$(\cos x)^{\sin x} = (\sin x)^{\cos x}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu. Yhtälö on yhtäpitävää yhtälön

$$(\cos x)^{\sin x} - (\sin x)^{\cos x} = 0$$

kanssa. Osoitetaan, että funktiolla

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x} - (\sin x)^{\cos x}$$

on korkeintaan yksi nollakohta. Tällöin myös alkuperäisellä yhtälöllä on korkeintaan yksi ratkaisu. Osoitetaan, että funktio f on aidosti vähenevä. Tällöin sillä on korkeintaan yksi nollakohta. Laskinohjelmalla saadaan funktion f derivaatta:

$$f'(x) = \frac{\begin{array}{c}\sin x\left((\cos x)^2\ln(\cos x) - (\sin x)^2\right)(\cos x)^{\sin x} \\ +\cos x\left((\sin x)^2\ln(\sin x) - (\cos x)^2\right)(\sin x)^{\cos x}\end{array}}{\sin x\cos x}$$ 2p

Koska $0 < x < \frac{\pi}{2}$, niin $\sin x > 0$ ja $\cos x > 0$. Tällöin nimittäjä $\sin x\cos x$ on positiivinen, joten osoittaja määrää derivaatan merkin. 1p(3p)

Osoitetaan, että kummatkin osoittajan termeistä

1. $\sin x\left((\cos x)^2\ln(\cos x) - (\sin x)^2\right)(\cos x)^{\sin x}$
2. $\cos x\left((\sin x)^2\ln(\sin x) - (\cos x)^2\right)(\sin x)^{\cos x}$

ovat negatiivisia:

1. Koska $\sin x > 0$ ja $\cos x > 0$, niin lausekkeen

$$\sin x\left((\cos x)^2\ln(\cos x) - (\sin x)^2\right)(\cos x)^{\sin x}$$

ensimmäinen tekijä $\sin x > 0$ ja viimeinen tekijä $(\cos x)^{\sin x} > 0$. Tällöin lausekkeen merkin määrää tekijä

$$(\cos x)^2 \ln(\cos x) - (\sin x)^2 .$$

Koska $0 < \cos x < 1$, niin $\ln(\cos x) < 0$. Tällöin myös

$$(\cos x)^2 \ln(\cos x) < 0.$$

Koska $-(\sin x) < 0$, niin myös summa

$$(\cos x)^2 \ln(\cos x) - (\sin x)^2 < 0.$$

2p(5p)

2. Koska $\sin x > 0$ ja $\cos x > 0$, niin lausekkeen

$$\cos x \left((\sin x)^2 \ln(\sin x) - (\cos x)^2\right) (\sin x)^{\cos x}$$

ensimmäinen tekijä $\cos x > 0$ ja viimeinen tekijä $(\sin x)^{\cos x} > 0$. Tällöin lausekkeen merkin määrää tekijä

$$(\sin x)^2 \ln(\sin x) - (\cos x)^2 .$$

Koska $0 < \sin x < 1$, niin $\ln(\sin x) < 0$. Tällöin myös

$$(\sin x)^2 \ln(\sin x) < 0.$$

Koska $-(\cos x) < 0$, niin myös summa

$$(\sin x)^2 \ln(\sin x) - (\cos x)^2 < 0.$$

2p (7p)

Derivaatta on siis negatiivinen, joten funktio f on aidosti vähenevä. Funktiolla f on siis korkeintaan yksi nollakohta. Tehtävänannon yhtälöllä on siis korkeintaan yksi ratkaisu.

2p(9p)

Selvitetään yhtälön ratkaisu: Jos $\sin x = \cos x$, niin myös

$$(\cos x)^{\sin x} = (\sin x)^{\cos x} .$$

Huomataan, että, kun $x = \frac{\pi}{4}$, niin $\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Yhtälöllä on siis täsmälleen yksi ratkaisu, joka on $x = \frac{\pi}{4}$.

3p (12p)

Pisteytyksestä: Viimeisestä kolmesta pisteestä 2p tulee ratkaisusta ja 1p tulee sen päättelemisestä, että ratkaisuja on täsmälleen yksi (aiemmin sai jo pisteet siitä, että osoitti ratkaisuja olevan korkeintaan yksi).

12. Kolmion piirin ja pinta-alan suhde (12 p.)

Aineisto:

12.A Tiedosto: Dynaaminen kolmio

Erään kolmion piiri on p ja sen pinta-ala on A. Toisen, tasasivuisen kolmion piiri on myös p ja sen pinta-ala on B. Osoita, että $A \leq B$.

Voit käyttää aineistoa 12.A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Ratkaisu.

Ratkaisu jakautuu kahteen osaan

- Vaihe 1: Osoitetaan, että kun kolmion kanta ja korkeus on kiinnitetty, sen pinta-ala on suurimmillaan, kun se on tasakylkinen.
- Vaihe 2: Osoitetaan, että kun tasakylkisen kolmion piiri on kiinnitetty, sen pinta-ala on suurimmillaan, kun se on tasasivuinen.

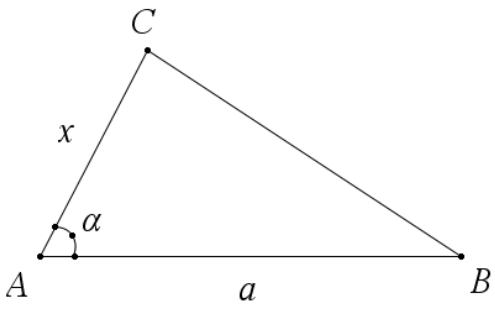
Huom! Vaiheen 1 voisi osoittaa myös lyhyemmin vetoamalla ellipsin ominaisuuksiin. Koko tehtävän voi myös ratkaista helpommin vetoamalla Heronin kaavaan. Näistä ei ole kirjoitettu erillisiä ratkaisuvaihtoehtoja, koska niitä ei tavallisesti käsitellä lukion kursseilla.

Pisteytyksestä vaiheessa 1: Jos opiskelija on vain todennut vaiheen 1 tuloksen tai vastaavan tuloksen, josta vaiheen 1 tuloksen voi helposti päätellä, kannattaa antaa siitä täydet pisteet, sillä YTL:n hyvän vastauksen piirteissä (luettu 26.3.2019) on ratkaisussa tehty niin.

Huomautus opiskelijalle: Vaikka tässä tapauksessa saattaa saada täydet pisteet ilman vaiheen 1 kunnollista perustelua, yleensä tämänkaltaisissa tehtävissä tällaiset asiat täytyy perustella. Kyse on osoitustehtävästä ja vaihe 1 on suurin osa tehtävän ratkaisua.

VAIHE 1, VAIHTOEHTO 1

Tutkitaan kolmiota ABC, jonka kannan AB pituus on a, kyljen AC pituus on x ja piiri on p.



Kyljen BC pituus on siis $p-a-x$. Merkitään kannan AB ja kyljen AC välistä kulmaa α:lla. Kosinilauseella saadaan

$$(p-a-x)^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{a^2+x^2-(p-a-x)^2}{2ax}.$$

1p

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ax\sin(\alpha) \quad \|(\quad)^2$$
$$A^2 = \frac{1}{4}a^2x^2\sin^2(\alpha)$$
$$A^2 = \frac{1}{4}a^2x^2(1-\cos^2(\alpha))$$

Sijoitetaan yllä johdettu $\cos(\alpha)$:n lauseke.

$$A^2 = \frac{1}{4}a^2x^2\left(1-\left(\frac{a^2+x^2-(p-a-x)^2}{2ax}\right)^2\right)$$

1p(2p)

Kolmion piiri p ja kannan pituus a ovat vakioita, joten saatu pinta-alan neliön lauseke on vain muuttujan x funktio. Kolmion pinta-ala on suurimmillaan, kun pinta-alan neliö on suurimmillaan. Ratkaistaan CAS-ohjelman toiminnolla, millä x:n arvolla pinta-ala on suurin.

$$\mathrm{fMax}\left(\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot x^2\cdot\left(1-\left(\frac{a^2+x^2-(p-a-x)^2}{2\cdot a\cdot x}\right)^2\right),x\right) \blacktriangleright x=\frac{-(a-p)}{2} \text{ and } (2\cdot a-p)\cdot p<0$$

Saadaan siis

$$x = \frac{-(a-p)}{2} = \frac{p-a}{2}.$$

1p(3p)

Toisen kyljen pituus on siis

$$\begin{aligned} p - a - x &= p - a - \frac{p-a}{2} \\ &= \frac{p-a}{2} = x. \end{aligned}$$

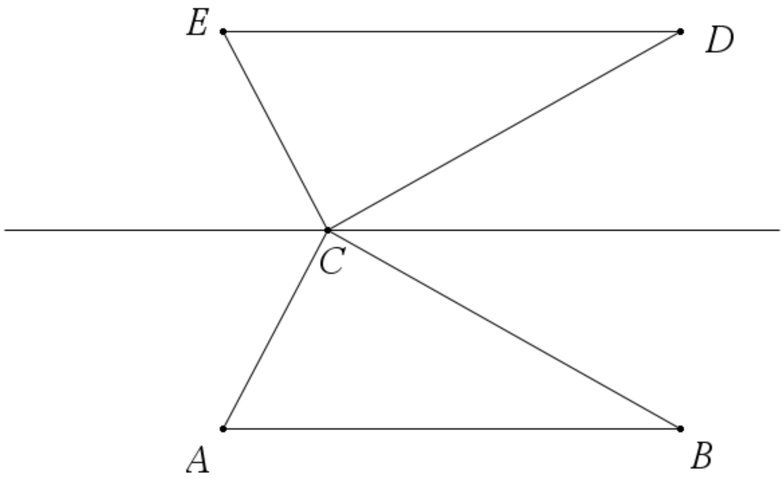
1p(4p)

Kyljet ovat siis keskenään saman pituiset, kun kolmion pinta-ala on suurin. Näin ollen kun kolmion kanta ja piiri on kiinnitetty, sen pinta-ala on suurin, kun se on tasakylkinen.

1p(5p)

VAIHE 1, VAIHTOEHTO 2

Tarkastellaan kolmiota ABC, jonka sivu AB ja sitä vastaan kohtisuora korkeus on kiinnitetty. Piirretään kärjen C läpi sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora, ja peilataan kolmio tämän suoran suhteen.



Kolmiot ABC ja EDC ovat yhtenevät, joten $|CB| = |CD|$, eli kolmion ABC piiri voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} p &= |AB| + |AC| + |CB| \\ &= |AB| + |AC| + |CD| \end{aligned}$$

1p

Lyhin reitti pisteestä A pisteeseen D on suora viiva, joten huomataan, että kolmion ABC piiri on pienimmillään silloin, kun piste C on janalla AD, jolloin $|AC| + |CD| = |AD|$. 1p(2p)

Tällöin kulmat EDC ja BAC ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret, mutta toisaalta myös kulmat EDC ja ABC ovat kolmioiden yhtenevyyden takia yhtä suuret. Näin ollen kolmion ABC kulmat CAB ja ABC ovat yhtä suuret, joten kolmio ABC on tasakylkinen. 1p(3p)

Näin ollen siis kun kolmion kanta ja korkeus ovat vakioita, sen piiri on pienimmillään, kun kaksi muuta sivua ovat keskenään yhtä pitkät. Tutkitaan kolmiota, jonka piiri on p. Jos kolmio ei ole tasakylkinen, sen yhtä kärkeä voidaan siirtää siten, että kolmion kanta ja korkeus pysyvät muuttumattomana, ja kolmiosta tulee tasakylkinen, jolloin kolmion piiri pienenee, mutta pinta-ala pysyy muuttumattomana. Tämän jälkeen kolmion samaa kärkeä voidaan liikuttaa siten, että kolmion korkeus ja piiri kasvavat, kunnes piiri on sama kuin alkuperäisellä kolmiolla. Koska korkeus kasvoi ja kanta pysyi samana, kolmion pinta-ala kasvoi. Lopullisella kolmiolla on siis sama piiri mutta suurempi pinta-ala kuin alkuperäisellä kolmiolla.

Tästä voidaan päätellä, että kolmion, jonka piiri on p, pinta-ala on suurimmillaan, kun se on tasakylkinen. 2p(5p)

VAIHE 2, VAIHTOEHTO 1

Tutkitaan kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c ja piiri on p ja pinta-ala on mahdollisimman suuri.

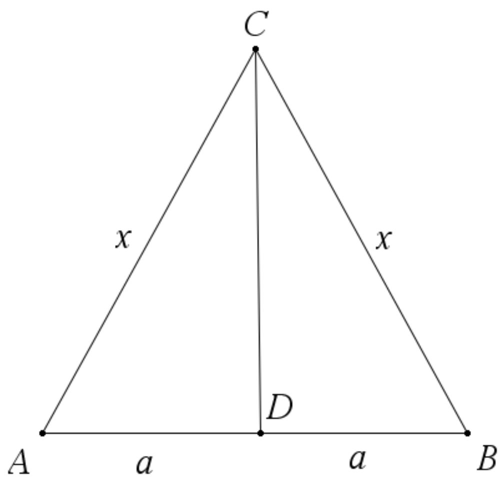
Väite: Kolmion mitkä tahansa kaksi sivua ovat keskenään saman pituiset, eli kolmio on tasasivuinen. 2p(7p)

Vastaoletus: Oletetaan, että $b \neq c$. Vaiheessa 1 johdetun tuloksen nojalla pinta-ala on suurin, kun kolmio on tasakylkinen, eli $b = c$. 2p(9p)
Tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten väite on tosi. 2p (11p)

Kolmion, jonka piiri on p, pinta-ala on siis suurin, kun se on tasasivuinen, mikä piti tehtävässä osoittaa. $\square$ 1p (12p)

VAIHE 2, VAIHTOEHTO 2

Piirretään kolmio ABC, jonka piiri on p ja jonka pinta-ala on mahdollisimman suuri. Vaiheessa 1 johdetun tuloksen nojalla kolmion pinta-ala on suurimmillaan, kun se on tasakylkinen.



Olkoon kannan AB pituus $2a$ ja olkoon kylkien AC ja BC pituudet x. Kantaa vastaan kohtisuora korkeusjana jakaa kannan kahtia, jolloin muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joiden kanta on a ja hypotenuusa on x.

Ratkaistaan a kolmion piirin lausekkeesta:

$$\begin{aligned} p &= 2a + x + x \\ a &= \frac{p}{2} - x \end{aligned}$$

1p(6p)

Pythagoraan lauseella saadaan korkeusjanan pituus h:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + h^2 \\ h &= \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

1p(7p)

Kolmion ABC pinta-ala on siis

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a \cdot h}{2} \\ A &= a\sqrt{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $a = \frac{p}{2} - x$.

$$A(x) = \left(\frac{p}{2} - x\right) \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$$

2p(9p)

CAS-ohjelman toiminnolla saadaan, että funktion $A(x)$ suurin arvo saadaan kohdassa $x = \frac{p}{3}$.

1p (10p)

$$\text{fMax}\left(\left(\frac{p}{2}-x\right)\cdot\sqrt{x^2-\left(\frac{p}{2}-x\right)^2},x\right) \blacktriangleright x=\frac{p}{3} \text{ and } \text{sign}(p)>0 \text{ or } x=\frac{p}{4}$$

Arvolla $x = \frac{p}{4}$ pinta-alaksi tulee nolla, joten pinta-ala on suurimmillaan, kun tasakylkisen kolmion kaksi kylkeä ovat pituudeltaan $\frac{p}{3}$. Tällöin kanta on pituudeltaan

$$p - \frac{p}{3} - \frac{p}{3} = \frac{p}{3},$$

eli kolmio on tasasivuinen. Saadaan siis, että kun kolmion piiri on p, sen pinta-ala on suurin, kun se on tasasivuinen, mikä piti tehtävässä osoittaa. $\square$ 2p (12p)

13. Epäyhtälöitä (12 p.)

13.1. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Osoita, että $2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$. (3 p.)

13.2. Olkoot $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(9 p.)

Ratkaisu.
13.1
Luvun neliö on aina suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla, joten

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)^2 &\geq 0 && \text{1p}\\ a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 &\geq 0 && \text{1p(2p)}\\ a_1^2 + a_2^2 &\geq 2a_1a_2\\ 2a_1a_2 &\leq a_1^2 + a_2^2, && \text{1p(3p)}\end{aligned}$$

mikä oli osoitettava. □

13.2

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Olkoon $i, j \leq n$. Kohdan a nojalla saadaan epäyhtälö

$$2a_ia_j \leq a_i^2 + a_j^2. \qquad \text{1p(4p)}$$

Tämä pätee kaikilla i, joten tietyllä j pätee

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} 2a_ia_j &\leq \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + a_j^2)\\ 2a_j\sum_{i=1}^{n} a_i &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_j^2\\ 2a_j\sum_{i=1}^{n} a_i &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + na_j^2 && \text{1p(5p)}\end{aligned}$$

Tämä puolestaan pätee kaikilla j, joten

$$\sum_{j=1}^{n} 2a_j \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + na_j^2 \right)$$

$$2\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + \sum_{j=1}^{n} (na_j^2)$$

$$2\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\sum_{j=1}^{n} a_j^2$$

$$\cancel{2}\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \cancel{2}n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$ 2p(7p)

Sijoitetaan yhtälön vasemmalle puolelle

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

joten saadaan

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \| : n^2$$ 2p(9p)

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten epäyhtälö säilyy, kun otetaan molemmilta puolilta neljäs juuri.

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{4}}$$ 2p (11p)

Tarkastellaan lukujonoa (b_n), jonka jäsenille pätee $b_i^2 = a_i$. Tällöin yllä oleva epäyhtälö tulee muotoon

$$\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^4\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

mikä oli todistettava. $\square$

1p (12p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Tarkastellaan lukujonoa (b_n), jonka termeille pätee $b_k = a_k^2$. Muokataan tehtävänannon epäyhtälö yhtäpitävään muotoon

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)^{\frac{1}{4}} \\
\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad \|(\quad)^4 \\
\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{2} &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{2} &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \|\cdot n^2 \\
\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{2} &\leq n\sum_{k=1}^{n} b_k^2
\end{aligned}$$

3p(6p)

Todistetaan tämä epäyhtälö todeksi induktion avulla.

1) Tapauksessa $n = 1$ epäyhtälön vasen puoli on

$$\left(\sum_{k=1}^{1} b_k\right)^{2} = (b_1)^2 = b_1^2$$

ja epäyhtälön oikea puoli on

$$1\cdot\sum_{k=1}^{1} b_k^2 = b_1^2.$$

Puolet ovat tässä tapauksessa yhtäsuuret, joten epäyhtälö pätee siis tapauksessa $n = 1$.

1p(7p)

2) Induktio-oletus:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

3) Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa, että epäyhtälö pätee, kun summataan $n+1$ termiä.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right)^2 &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + b_{n+1}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 + 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \cdot b_{n+1} + b_{n+1}^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} 2b_k b_{n+1} + b_{n+1}^2\end{aligned}$$

1p(8p)

Induktio-oletuksen nojalla:

$$\leq n \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2b_k b_{n+1} + b_{n+1}^2$$

1p(9p)

Kohdassa 13.1 osoitetun tuloksen nojalla:

$$\begin{aligned}&\leq n \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (b_k^2 + b_{n+1}^2) + b_{n+1}^2 \\ &= n \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + n \cdot b_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + (n+1) b_{n+1}^2 \\ &= (n+1) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{n+1}^2\right) \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} b_k^2.\end{aligned}$$

1p (10p)

1p (11p)

Näin ollen induktion nojalla epäyhtälö on tosi. $\square$

1p (12p)

MAFY-valmennus kiittää Kannaksen lukion Jukka Kalliolehtoa vastausvaihtoehdon 2 lisäämiseen johtaneesta palautteesta!

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

Tarkastellaan lukujonoa (b_n), jonka termeille pätee $b_i^2 = a_i$. Muokataan tehtävänannon epäyhtälö yhtäpitävään muotoon

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad \|(\quad)^4$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{2} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{2} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \| \cdot n^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{2} \le n\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

3p(6p)

Kirjoitetaan käsin auki yhtälön vasenta puolta:

$$\begin{aligned}
&b_1^2 + b_1b_2 + b_1b_3 + b_1b_4 + \dots\\
&b_2b_1 + b_2^2 + b_2b_3 + b_2b_4 + \dots\\
&b_3b_1 + b_3b_2 + b_3^2 + b_3b_4 + \dots\\
&b_4b_1 + b_4b_2 + b_4b_3 + b_4^2 + \dots
\end{aligned}$$

Huomataan, että rivejä tulee yhteensä n kappaletta.

Kirjoitetaan myös oikea puoli n riviksi:

$$\begin{aligned}
&b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots\\
&b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots\\
&b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots\\
&b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots
\end{aligned}$$

Tarkastellaan molempia auki kirjoitettuja puolia siten, että lähdetään samalta riviltä vasemman puoleisimmasta termistä oikealle yläviistoon alla olevien kuvien mukaisesti.

3p(9p)

$$
\begin{array}{l}
b_1^2 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + \ldots \\
b_2 b_1 + b_2^2 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + \ldots \\
b_3 b_1 + b_3 b_2 + b_3^2 + b_3 b_4 + \ldots \\
b_4 b_1 + b_4 b_2 + b_4 b_3 + b_4^2 + \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \ldots \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \ldots \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \ldots \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \ldots
\end{array}
$$

Huomataan, että ylemmässä summassa on samoja toisia potensseja kuin alemassa summassa ja lisäksi jokaista ylemmän summan termiparia $b_i b_j + b_j b_i$, missä $i \neq j$, vastaa alemmassa summassa termipari $b_i^2 + b_j^2$. Näin ollen a-kohdassa johdetun epäyhtälön nojalla ylempi summa on pienempi tai yhtä suuri kuin alempi summa, joten tehtävänannon epäyhtälö on tosi. $\square$

3p (12p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.