YO-MALLIVASTAUKSET

PITKÄ MATEMATIIKKA

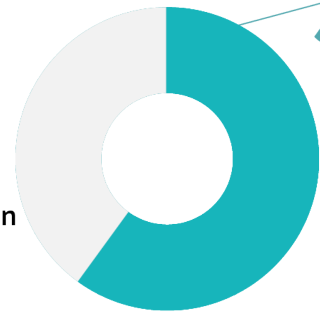
SYKSY 2018

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät vuoden 2018 haussa

40 %

kaikista lääketieteellisten opiskelupaikoista.



58 %

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

58 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös lukion 1. vuoden kursseille

MAFYNETTI

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti ja Teemu perustivat MAFY:n vuonna 2008. Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ennen MAFY:n perustamista ja Antti työskenteli tuntiopettajana TKK:lla.

Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista PK-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetin oppimateriaalien kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Timo Kalinainen, Tuomas Hauvala ja Katja Niemistö.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto

1. a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 \leq 4$.
   b) Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat molemmat epäyhtälöt $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ja $x^2 - 4 \leq 0$?

Ratkaisu.

a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Huomautus lukijalle: Tämä on yleinen tapa ratkaista toisen asteen epäyhtälö.

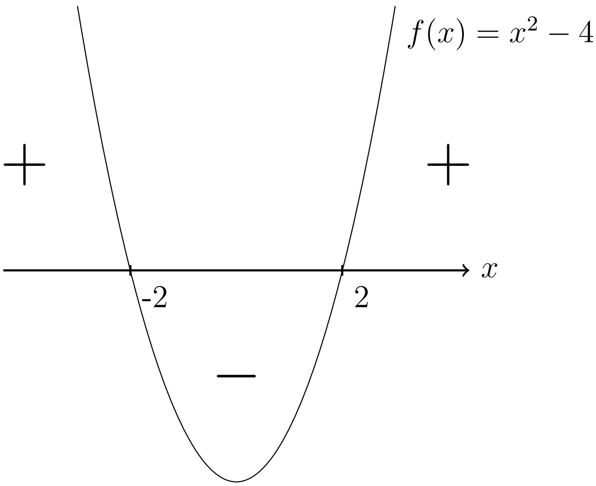
$$x^2 \leq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 4 \leq 0$$

Halutaan siis ratkaista epäyhtälö $x^2 - 4 \leq 0$. Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

1p

Funktion $f(x) = x^2 - 4$ nollakohdat ovat siis 2 ja -2. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



1p(2p)

Kuvaajasta nähdään, että $f(x) \leq 0$, kun $-2 \leq x \leq 2$, joten epäyhtälön $x^2 \leq 4$ ratkaisu on $\underline{\underline{-2 \leq x \leq 2}}$.

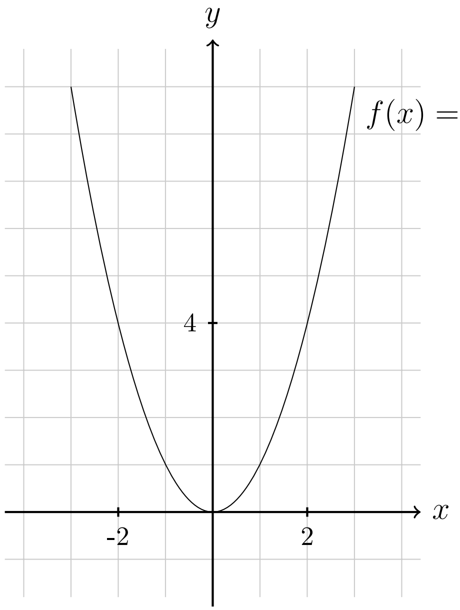
1p(3p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

Funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa $x = 0$ ja joka kulkee pisteiden $(2, 4)$ ja $(-2, 4)$ kautta, sillä

$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4.$$

1p



1p(2p)

Kuvaajasta nähdään, että $x^2 \leq 4$, kun $-2 \leq x \leq 2$, joten epäyhtälön ratkaisu on $-2 \leq x \leq 2$.

1p(3p)

Ratkaisuvaihtoehto 3

Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiiviset, joten voidaan ottaa neliöjuuri.

$$x^2 \leq 4 \qquad \|\sqrt{}$$
$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$$
$$|x| \leq 2$$

1p

$$-2 \leq x \leq 2$$

Epäyhtälön ratkaisu on $\underline{\underline{-2 \leq x \leq 2}}$. 2p(3p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 4

$$x^2 \leq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 4 \leq 0$$

Halutaan siis ratkaista epäyhtälö $x^2 - 4 \leq 0$. Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

1p

Funktio on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan. Tehdään merkkikaavio.

$$\begin{array}{rcrcr} f(-3) & = & (-3)^2 - 4 & = & 5 > 0 \\ f(0) & = & 0^2 - 4 & = & \text{-}4 < 0 \\ f(3) & = & 3^2 - 4 & = & 5 > 0 \end{array}$$

		-2		2	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

1p(2p)

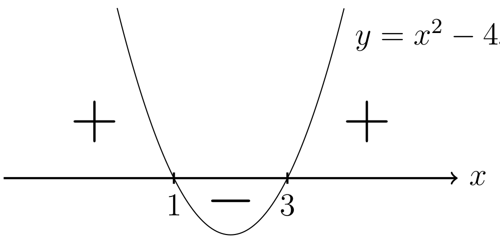
Epäyhtälön ratkaisu on $\underline{\underline{-2 \leq x \leq 2}}$. 1p(3p) b)

Ratkaistaan epäyhtälö $x^2 - 4x + 3 \leq 0$. Selvitetään ensin funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\
&= \frac{4 \pm 2}{2} \\
&= 2 \pm 1
\end{aligned}
$$

$x = 1 \quad$ tai $\quad x = 3$ 1p(4p)

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Kuvaajasta nähdään, että $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, kun $1 \leq x \leq 3$. 1p(5p)
Luvut $-2 \leq x \leq 2$ toteuttavat epäyhtälön $x^2 - 4 \leq 0$. Näin ollen luvut, jotka toteuttavat sekä epäyhtälön $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ että epäyhtälön $x^2 - 4 \leq 0$ kuuluvat välille $\underline{\underline{1 \leq x \leq 2}}$. 1p(6p)

2. a) Sievennä lauseke $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq -1$.

b) Aseta luvut $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ja $\sqrt[5]{5}$ suuruusjärjestykseen ja perustele vastauksesi.

Ratkaisu.

a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x} + {}^{x)}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x\cdot 1 + x\cdot\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x+1} && \text{1p} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} \\
&= \frac{1+x}{1+x} && \text{1p(2p)} \\
&= \underline{\underline{1}}. && \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

$$
\begin{aligned}
&{}^{1+\frac{1}{x})}\frac{1}{1+x} + {}^{1+x)}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)} + \frac{1+x}{(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{1+\frac{1}{x}}{1+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot x} + \frac{1+x}{1+\frac{1}{x}+x+x\cdot\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{x}}{2+x+\frac{1}{x}} + \frac{1+x}{2+x+\frac{1}{x}} && \text{1p} \\
&= \frac{1+\frac{1}{x}+1+x}{2+x+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{2+x+\frac{1}{x}}{2+x+\frac{1}{x}} && \text{1p(2p)} \\
&= \underline{\underline{1}}. && \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\
=&\frac{1}{1+x}+\frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\\
=&\frac{1}{1+x}+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\\
=&\frac{1}{1+x}+1:\frac{x+1}{x}\\
=&\frac{1}{1+x}+1\cdot\frac{x}{x+1}\\
=&\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x} && \text{1p}\\
=&\frac{1+x}{1+x} && \text{1p(2p)}\\
=&\underline{\underline{1}} && \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 4

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\
=&\frac{1}{1+x}^{(x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\
=&\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\
=&\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\
=&\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}} && \text{1p}\\
=&\frac{\frac{1}{x}+1}{1+\frac{1}{x}} && \text{1p(2p)}\\
=&\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\
=&\underline{\underline{1}} && \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

b)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Pohditaan lukujen $\sqrt[3]{3}$ ja $\sqrt{2}$ suuruusjärjestystä.

Kahdesta positiivisesta luvusta se on suurempi, jonka toinen potenssi on suurempi. Samoin kahdesta positiivisesta luvusta se on suurempi, jonka kolmas potenssi, tai vaikkapa kuudes potenssi, on suurempi. 1p(1p)

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3\cdot 2}=\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right]^2=3^2=9$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot 3}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3=2^3=8 \qquad \text{1p(2p)}$$

Koska $9>8$, niin $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$. 1p(3p)

Pohditaan lukujen $\sqrt{2}$ ja $\sqrt[5]{5}$ suuruusjärjestystä.

Kahdesta positiivisesta luvusta se on suurempi, jonka viides potenssi, tai vaikkapa kymmenes potenssi, on suurempi.

$$\left(\sqrt{2}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot 5} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right]^{5} = 2^5 = 32$$

$$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{10} = \left(\sqrt[5]{5}\right)^{5\cdot 2} = \left[\left(\sqrt[5]{5}\right)^{5}\right]^{2} = 5^2 = 25$$ 1p(4p)

Koska $32 > 25$, niin $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$. 1p(5p)

Vastaus: $\underline{\underline{\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}}}$ 1p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Värillisellä tekstillä on näytetty idea, kuinka ratkaisun voi keksiä, ja mustalla tekstillä se mitä tulee kirjoittaa vastauspaperiin.

Juurten arvoja ei pysty laskemaan ilman laskinta, mutta tehdään aluksi asiantunteva arvaus suuruusjärjestyksistä. Arvataan, että $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$. Mahdollinen virhearvio ei tässä vaiheessa ole vaarallista, koska se paljastuisi seuraavassa tarkastelussa.

Tutkitaan, mitä siitä seuraisi, jos arvio on oikea. Korotetaan epäyhtälön molemmat puolet sopiviin potensseihin, jotta pääsemme juurilausekkeista eroon.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{3} &> \sqrt{2} && \|(\quad)^3 \\
3 &> \sqrt{2}^3 && \|(\quad)^2 \\
3^2 &> 2^3 \\
9 &> 8
\end{aligned}$$

Viimeinen väite $9 > 8$ on ilmeisesti tosi, eli alussa tehty arvio $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ vaikuttaisi olevan tosi.

Yleisesti väite on todistettu oikeaksi vasta sitten, kun on osoitettu, että todeksi tiedetyistä asioista seuraa väite. Kirjoitetaan todistus siis niin, että aloitetaan todesta väitteestä $9 > 8$ ja edetään vastaavat vaiheet kuin yllä, mutta toiseen suuntaan.

Osoitetaan, että $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

$$
\begin{aligned}
9 &> 8 \\
3^2 &> 2^3 && \|\sqrt{} \\
3 &> \sqrt{2}^3 && \|\sqrt[3]{} \\
\sqrt[3]{3} &> \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Siis $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$. 2p(5p)

Vastaavasti pohditaan lukujen $\sqrt[5]{5}$ ja $\sqrt{2}$ suuruusjärjestystä.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &> \sqrt[5]{5} && \|(\quad)^2 \\
2 &> \sqrt[5]{5}^2 && \|(\quad)^5 \\
2^5 &> 5^2 \\
32 &> 25
\end{aligned}
$$

Vaikuttaa siltä, että $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$. Muotoillaan vielä formaali todistus. Aloitetaan todeksi tiedetystä ja yritetään päätyä osoitettavaan väitteeseen.

Osoitetaan, että $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$.

$$
\begin{aligned}
32 &> 25 \\
2^5 &> 5^2 && \|\sqrt[5]{} \\
2 &> \sqrt[5]{5}^2 && \|\sqrt{} \\
\sqrt{2} &> \sqrt[5]{5}
\end{aligned}
$$

Siis $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$.

Vastaus: $\underline{\underline{\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}}}$ 1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

3. Laske integraalit a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\,dx$ ja b) $\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,dx$.

Ratkaisu.

a)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\,\mathrm{d}x &= \Big/_{-1}^{1} (\ln|x+3|) && \text{1p} \\
&= \ln|1+3| - \ln|-1+3| \\
&= \ln(4) - \ln(2) && \text{1p(2p)} \\
&= \ln\left(\frac{4}{2}\right) \\
&= \underline{\underline{\ln(2)}}. && \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

b)

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1}}$

Funktio $e^{2|x|}$ on y-akselin suhteen symmetrinen, joten

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x && \text{1p(4p)} \\
&= 2 \Big/_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) && \text{1p(5p)} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \underline{\underline{e^2 - 1}} && \text{1p(6p)}
\end{aligned}
$$

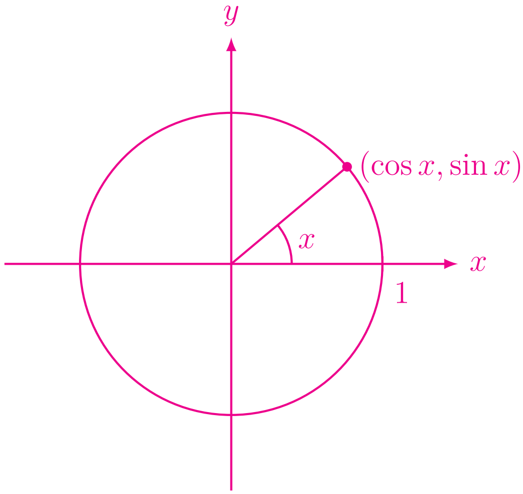
RATKAISUVAIHTOEHTO 2

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} e^{2(-x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{1p(4p)}\\
&= \int_{-1}^{0} e^{-2x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x\\
&= \bigg/_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + \bigg/_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) \qquad \text{1p(5p)}\\
&= -\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0} - \left(-\frac{1}{2}e^{-2\cdot(-1)}\right) + \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}\\
&= \underline{\underline{e^{2} - 1}} \qquad \text{1p(6p)}
\end{aligned}
$$

4. Ratkaise seuraavat yhtälöt välillä $[0, 2\pi]$:

a) $\sin x = 1$
b) $f'(t) = 0$, kun $f(t) = \cos(t)$
c) $\sin z = (1 + \cos z)(1 - \cos z)$.

Ratkaisu.
Huomautus lukijalle: Yksikköympyrä:



a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Yksikköympyrästä nähdään, että $\sin x = 1$, kun

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

joten ainoa ratkaisu välillä $[0, 2\pi]$ on $x = \frac{\pi}{2}$. 2p

Jos on osannut kirjoittaa yleisen ratkaisun (kaikki ratkaisut) muodossa $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, mutta ei ole osannut rajata niistä kysytylle välille kuuluvaa ratkaisua, saa 1p. Jos on löytänyt ratkaisun $x = \frac{\pi}{2}$, muttei ole mistään päätellyt, että se on ainoa ratkaisu kysytyllä välillä, saa 1p.

Huomautus lukijalle: Yleistä ratkaisua ei ollut välttämätöntä esittää, vaan riitti, jos päätteli suoraan yksikköympyrästä kaikki kysytylle välille kuuluvat ratkaisut.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Taulukkokirjasta saadaan, että eräs yhtälön $\sin x = 1$ ratkaisu on $x_0 = \frac{\pi}{2}$. 1p

Tiedetään, että kaikki ratkaisut saadaan seuraavasti.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 2\pi n && \text{tai} && x = \pi - x_0 + 2\pi n \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n && \text{tai} && x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n && \text{tai} && x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{aligned}$$

Ainoa näistä ratkaisuista, joka on välillä $[0, 2\pi]$, on $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$. 1p(2p)

b)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Derivoidaan $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t \\ f'(t) &= -\sin t. \end{aligned}$$ 1p(3p)

Ratkaistaan kysytyt nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ -\sin t &= 0 \\ \sin t &= 0. \end{aligned}$$

Yksikköympyrästä nähdään, että ratkaisut ovat

$$t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

joten välillä $[0, 2\pi]$ yhtälön ratkaisuja ovat $\underline{\underline{t = 0,\ t = \pi \text{ ja } t = 2\pi}}$. 1p(4p)

Huomautus lukijalle: Yleisiä ratkaisuja ei ollut välttämätöntä esittää, vaan riitti, jos päätteli suoraan yksikköympyrästä kaikki kysytylle välille kuuluvat ratkaisut.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Derivoidaan $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t \\ f'(t) &= -\sin t. \end{aligned}$$

1p(3p)

Ratkaistaan kysytyt nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ -\sin t &= 0 \\ \sin t &= 0. \end{aligned}$$

Taulukkokirjasta saadaan, että eräs ratkaisu on $x_0 = 0$. Tiedetään, että kaikki ratkaisut saadan seuraavasti:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 2\pi n \quad &&\text{tai} \quad && x = \pi - x_0 + 2\pi n \\ x &= 0 + 2\pi n \quad &&\text{tai} \quad && x = \pi - 0 + 2\pi n \\ x &= 2\pi n \quad &&\text{tai} \quad && \pi + 2\pi n \end{aligned}$$

Näistä välillä $[0, 2\pi]$ ovat $\underline{\underline{x = 0,\ x = \pi \text{ ja } x = 2\pi}}$.

1p(4p)

c) Sievennetään yhtälöä:

$$\sin z = (1 + \cos z)(1 - \cos z)$$

Lisäselitys: Sievennetään oikea puoli muistikaavalla $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ tai kertomalla sulut auki seuraavasti:

$$\sin z = 1^2 - 1 \cdot \cos z + 1 \cdot \cos z + \cos z \cdot (-\cos z)$$

$$\sin z = 1 - \cos^2 z$$

Tiedetään, että $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, eli $1 - \cos^2 z = \sin^2 z$.

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin^2 z \\ \sin^2 z - \sin z &= 0 \\ \sin z(\sin z - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin z &= 0 \quad &&\text{tai} \quad && \sin z - 1 = 0 \\ \sin z &= 0 \quad &&\text{tai} \quad && \sin z = 1. \end{aligned}$$

1p(5p)

Kohtien a ja b nojalla ratkaisut ovat siis $\underline{\underline{z = 0,\ z = \pi,\ z = 2\pi \text{ ja } z = \frac{\pi}{2}}}$.

1p(6p)

5. Olkoot $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{v} = -\bar{i} - 7\bar{k}$ vektoreita. Laske summa $\bar{u} + 2\bar{v}$, pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{v}$ sekä vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välisen kulman likiarvo asteen tarkkuudella.

Ratkaisu.
Lasketaan kysytty vektorien summa.

$$\begin{aligned} \overline{u} + 2\overline{v} &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} + 2 \cdot (-\overline{i} - 7\overline{k}) \\ &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} - 2\overline{i} - 14\overline{k} \\ &= \underline{\underline{-\overline{i} + 2\overline{j} - 11\overline{k}}} \end{aligned}$$

2p

Jos summassa yksi kerroin on väärin ja kaksi on oikein, saa 1p.

Lasketaan kysytty pistetulo.

$$\begin{aligned} \overline{u} \cdot \overline{v} &= (\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}) \cdot (-\overline{i} - 7\overline{k}) \\ &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-7) \\ &= \underline{\underline{-22}} \end{aligned}$$

2p(4p)

Jos tekee pienen laskuvirheen, saa 1p.

Ratkaistaan vektorien välinen kulma α.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|} \\ \cos\alpha &= \frac{-22}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}} \\ \cos\alpha &= -0{,}83152\ldots \\ \alpha &= \underset{(-)}{+} 146{,}255\ldots^\circ \\ &\approx \underline{\underline{146^\circ}} \end{aligned}$$

1p(5p)

1p(6p)

6. Suora $y = kx$ sivuaa ympyrää $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$.

   a) Määritä kulmakertoimen k kaikki mahdolliset arvot.

   b) Määritä suurempaa kulmakerrointa vastaavan sivuamispisteen koordinaatit.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

a) Ympyrän

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$$

keskipiste on $(5, 5)$ ja säde on 1. Suora $y = kx$ on yleisessä muodossa $kx - 1 \cdot y + 0 = 0$ ja se sivuaa kyseistä ympyrää, jos suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä on ympyrän säteen pituinen. 1p

$$\frac{|k \cdot 5 - 1 \cdot 5 + 0|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 1$$ 1p(2p)

$$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \quad \| \cdot \sqrt{k^2+1}$$

$$5|k-1| = \sqrt{k^2+1}$$

Molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten voidaan korottaa toiseen.

$$(5|k-1|)^2 = k^2 + 1$$

$$25(k-1)^2 = k^2 + 1$$ 1p(3p)

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella, tai käsin sieventäen, kuten alla.

$$25(k^2 - 2k + 1) = k^2 + 1$$

$$25k^2 - 50k + 25 = k^2 + 1$$

$$24k^2 - 50k + 24 = 0 \quad \| : 2$$

$$12k^2 - 25k + 12 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan.

$$k = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{2 \cdot 12}$$
$$k = \frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad k = \frac{3}{4}.$$

Vastaus: Mahdolliset kulmakertoimen arvot ovat $k = \frac{4}{3}$ tai $k = \frac{3}{4}$. 1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Suoran $y = kx$ ja ympyrän

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$$

sivuamispiste saadaan, kun ratkaistaan niiden leikkauspisteet ja etsitään sellainen k:n arvo, jolla leikkauspisteitä on täsmälleen yksi. 1p

Sijoitetaan $y = kx$ ympyrän yhtälöön.

$$\begin{aligned}(x-5)^2 + (kx-5)^2 &= 1\\ x^2 - 10x + 25 + k^2x^2 - 10kx + 25 &= 1\\ (k^2+1)x^2 - 10(k+1)x + 49 &= 0.\end{aligned}$$ 1p(2p)

Leikkauspisteitä löytyy täsmälleen yksi, kun diskriminantti on nolla. Ratkaistaan k.

$$\begin{aligned}D &= 0\\ (-10(k+1))^2 - 4 \cdot (k^2+1) \cdot 49 &= 0\end{aligned}$$ 1p(3p)

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$\begin{aligned}100(k+1)^2 - 4 \cdot 49(k^2+1) &= 0 \quad \| : 4\\ 25(k+1)^2 - 49(k^2+1) &= 0\\ 25(k^2+2k+1) - 49(k^2+1) &= 0\\ 25k^2 + 50k + 25 - 49k^2 - 49 &= 0\\ -24k^2 + 50k - 24 &= 0 \quad \| : (-2)\\ 12k^2 - 25k + 12 &= 0.\end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan:

$$k = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{2 \cdot 12}$$
$$k = \frac{25 \pm 7}{24}$$
$$k = \frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad k = \frac{3}{4}.$$

1p(4p)

Vastaus: Mahdolliset kulmakertoimen arvot ovat $k = \frac{4}{3}$ tai $k = \frac{3}{4}$.

b) Suurempi kulmakerroin on $k = \frac{4}{3}$. Sijoitetaan ympyrän yhtälöön $y = \frac{4}{3}x$.

$$(x-5)^2 + \left(\frac{4}{3}x - 5\right)^2 = 1$$

1p(5p)

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}x \cdot 5 + 5^2 = 1$$
$$x^2 - 10x + 25 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25 = 1$$
$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{70}{3}x + 49 = 0 \quad \| \cdot 9$$
$$25x^2 - 210x + 441 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{-(-210) \pm \sqrt{(-210)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 441}}{2 \cdot 25}$$
$$x = \frac{21}{5}.$$

Lasketaan y-koordinaatti:

$$y = \frac{4}{3} \cdot x = \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{5} = \frac{28}{5}.$$

Vastaus: Sivuamispisteen koordinaatit ovat $x = \frac{21}{5}$ ja $y = \frac{28}{5}$.

1p(6p)

7. Tšernobylin vuoden 1986 ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen radioaktiivista cesium-137-isotooppia levisi suureen osaan Eurooppaa ja myös Suomeen. Koska tämän isotoopin puoliintumisaika on 30 vuotta, niin tietylle alueelle laskeutuneen isotoopin määrä oli puoliintunut vuoteen 2016 mennessä. Oletetaan, että tietylle alueelle laskeutuneen isotoopin määrä oli y_0 vuonna 1986.

   a) Määritä alueen cesium-137-isotoopin määrää kuvaavassa funktiossa
   $$y(t) = y_0 e^{-kt}$$
   esiintyvä vakio k, kun muuttujana t on aika vuosina alkaen vuodesta 1986.

   b) Minä vuonna kyseistä isotooppia on alueella jäljellä enää 10 % vuoden 1986 määrästä?

   c) Kuinka suurella nopeudella kyseisen isotoopin määrä vähenee alueella 40 vuotta onnettomuuden jälkeen? Anna vastaus yksikkönä y_0/vuosi.

Ratkaisu.

a) Tiedetään, että $y(30) = y_0/2$. Ratkaistaan k:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 e^{-kt} \\
y(30) &= y_0 e^{-k\cdot 30} \\
\frac{\cancel{y_0}}{2} &= \cancel{y_0} e^{-k\cdot 30} \\
\frac{1}{2} &= e^{-30k}
\end{aligned}$$

1p

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -30k \quad \| : (-30) \\
k &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-30} \\
k &= \frac{\ln(2^{-1})}{-30} \\
k &= \frac{-\ln(2)}{-30} \\
k &= \underline{\underline{\frac{\ln(2)}{30}}}.
\end{aligned}$$

1p(2p)

b) Ratkaistaan t, kun $y(t) = 0{,}1y_0$.

$$0{,}1\cancel{y_0} = \cancel{y_0}e^{-\frac{\ln(2)}{30}\cdot t} \quad \| \ln()$$ 1p(3p)

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$\ln(0{,}1) = -\frac{\ln(2)}{30}\cdot t \quad \| \cdot \left(-\frac{30}{\ln(2)}\right)$$

$$t = -\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(2)}\cdot 30$$

$$t = 99{,}657\ldots \quad \text{(vuotta)}$$

Näin ollen jos onnettomuus tapahtui vuoden 1986 alussa, isotooppia on jäljellä 10% hetkellä

$$1986 + 99{,}65\ldots = 2085{,}65\ldots \text{(vuotta)}$$

ja jos onnettomuus tapahtui vuoden 1986 lopussa, isotooppia on jäljellä 10% hetkellä

$$1987 + 99{,}65\ldots = 2086{,}65\ldots \text{(vuotta)},$$

joten isotooppia on jäljellä 10% vuonna 2085 tai 2086. 1p(4p)

Huomautus lukijalle: Riippuen siitä, missä vaiheessa vuotta 1986 onnettomuus tapahtui, isotoopin määrä saattoi alittaa 10% joko vuonna 2085 tai 2086. Jos sattuu muistamaan, että onnettomuus tapahtui 26.4.1986, laskun tulokseksi tuli, että määrä alitti 10% juuri ja juuri vuoden 2085 puolella, mutta tätä ei voi vaatia muistettavan matematiikan kokeessa. Paras vastaus oli siis, että isotoopin määrä alitti 10% joko vuonna 2085 tai vuonna 2086, mutta jos vastasi kumman tahansa näistä vuosista, se luultavasti hyväksytään.

c) Kyseessä on siis funktion $y(t)$ derivaatta vuoden $t = 40$ kohdalla. Derivoidaan $y(t)$.

$$y(t) = y_0e^{-kt}$$

$$y'(t) = -ky_0e^{-kt}.$$ 1p(5p)

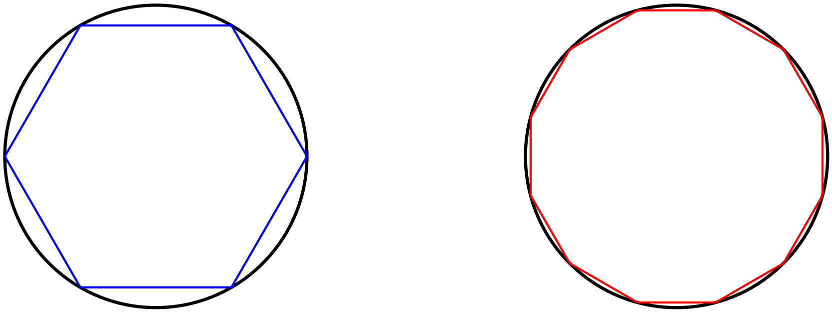
Lasketaan $y'(40)$.

$$\begin{aligned}
y'(40) &= -ky_0e^{-k\cdot 40}\\
y'(40) &= -\frac{\ln(2)}{30}e^{-\frac{\ln(2)}{30}\cdot 40}\cdot y_0\\
y'(40) &= -\frac{\ln(2)}{30}e^{-\frac{4\ln(2)}{3}}\cdot y_0\\
y'(40) &= -0{,}00916\ldots\cdot y_0\\
y'(40) &\approx -0{,}0092\cdot y_0
\end{aligned}$$

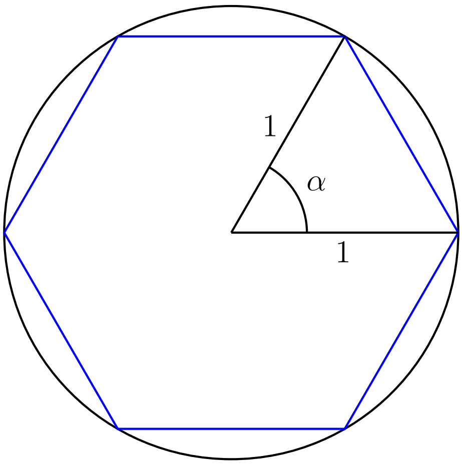
Vastaus: Isotoopin määrä vähenee 40 vuotta onnettomuuden jälkeen nopeudella 0,0092 y_0/ vuosi.

1p(6p)

8. Yksikköympyrän kehän pituus on 2π. Arvioi tätä lukua approksimoimalla ympyrää sen sisään piirretyllä säännöllisellä kuusikulmiolla ja laskemalla kuusikulmion piirin pituus. Muodosta toinen arvio säännöllisen 12-kulmion avulla ja määritä kummankin approksimaation suhteellinen virhe vertaamalla tuloksia laskimen antamaan luvun 2π likiarvoon.



Ratkaisu.
Selvitetään yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen kuusikulmion sivun pituus.



Kuusikulmio jakaa 360° keskuskulman kuuteen yhtä suureen osaan, joten

$$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°.$$

Yllä olevaan kuvaan piirretty kolmio on tasakylkinen, joten kaksi muuta kulmaa ovat keskenään yhtä suuret. Kolmion kulmien summa on 180°, joten niiden suuruus on siis

$$\frac{180° - 60°}{2} = 60°.$$

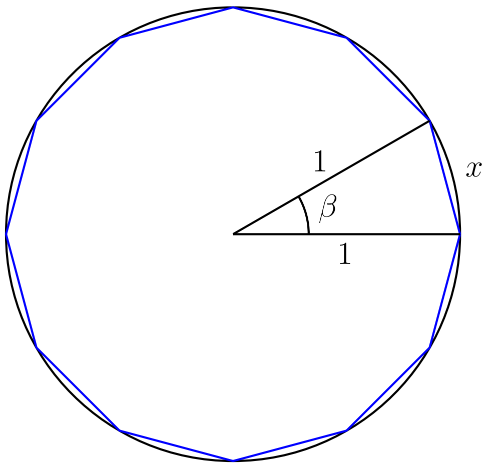
Kolmio on siis tasasivuinen, joten myös kuusikulmion sivun pituus on 1. Näin ollen kuusikulmion piirin pituus on 6. 1p

Lasketaan suhteellinen virhe:

$$\frac{2\pi - 6}{2\pi} = 0{,}0450\ldots \approx \underline{\underline{4{,}5\%}}.$$ 1p(2p)

Ratkaisuvaihtoehto 1: 12-kulmio

Lasketaan seuraavaksi yksikköympyrän sisäänpiirretyn säännöllisen 12-kulmion piiri.



Säännöllinen 12-kulmio jakaa 360° keskuskulman 12 yhtä suureen osaan, joten

$$\beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$ 1p(3p)

Ratkaistaan sivun pituus x kosinilauseella:

$$x^2 = 1^1 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos(30^\circ)$$ 1p(4p)

$$x^2 = 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$x = (\pm)\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Huomautus lukijalle: Värillisellä merkityt välivaiheet voi tehdä käsin tai lopullisen lausekkeen voi saada suoraan laskimesta.

Näin ollen yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen 12-kulmion piiri on

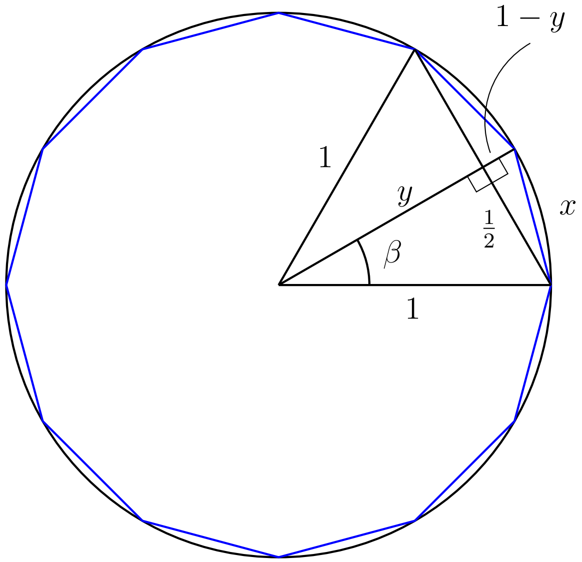
$$\underline{\underline{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}}.$$ 1p(5p)

Lasketaan suhteellinen virhe:

$$\frac{2\pi - 12\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\pi} = 0{,}01138\ldots \approx \underline{\underline{1{,}1\,\%}}.$$ 1p(6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2: 12-kulmio

Lasketaan seuraavaksi yksikköympyrän sisäänpiirretyn säännöllisen 12-kulmion piiri.



Lasketaan y yllä olevasta kuvasta Pythagoraan lauseella.

$$1^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$ 1p(3p)

$$1 = y^2 + \frac{1}{4}$$

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Huomautus lukijalle: Värillisellä merkityt välivaiheet voi tehdä käsin tai lopullisen lausekkeen voi saada suoraan laskimesta.

Näin ollen siis

$$1-y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Lasketaan x Pythagoraan lauseella pienemmästä suorakulmaisesta kolmiosta.

$$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$ 1p(4p)

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$\begin{aligned}
x^2&=\frac{1}{4}+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}\\
x^2&=\frac{1+(2-\sqrt{3})^2}{4}\\
x^2&=\frac{1+2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}{4}\\
x^2&=\frac{1+4-4\sqrt{3}+3}{4}\\
x^2&=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}\\
x^2&=2-\sqrt{3}\\
x&=\underset{(-)}{+}\sqrt{2-\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Näin ollen yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen 12-kulmion piiri on

$$\underline{\underline{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}}.$$ 1p(5p)

Lasketaan suhteellinen virhe:

$$\frac{2\pi-12\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\pi}=0{,}01138\ldots\approx\underline{\underline{1{,}1\%}}.$$ 1p(6p)

9. Weibullin (λ, k)-jakauman avulla voidaan kuvata mm. maantiepölyn hiukkasten kokoa. Tutkitaan tapausta $\lambda = 1$, jolloin jakauman tiheysfunktio määritellään kaavalla

$$w(t,k) = kt^{k-1}e^{-t^k},$$

kun $t \geq 0$ ja $k > 0$. Weibullin kertymäfunktio määritellään kaavalla

$$W(x,k) = \int_0^x w(t,k)\,dt.$$

a) Määritä $\lim\limits_{t\to 0+} w(t,k)$ vakion k eri arvoilla.

b) Määritä kertymäfunktion $W(x,k)$ lauseke, kun $x \geq 0$.

Ratkaisu.

a) Tarkastellaan ensin eksponenttifunktion e^{-t^k} käyttäytymistä.

Kun $k > 0$,

$$\lim_{t\to 0+} t^k = 0,$$

joten

$$\lim_{t\to 0+} e^{-t^k} = e^0 = 1.$$

Tarkastellaan sitten funktion t^{k-1} käyttäytymistä eri k:n arvoilla.

Kun $0 < k < 1$,

$$\lim_{t\to 0+} t^{k-1} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^{1-k}} = +\infty.$$

Kun $k = 1$,

$$\lim_{t\to 0+} t^{k-1} = \lim_{t\to 0+} 1 = 1.$$

Kun $k > 1$,

$$\lim_{t\to 0+} t^{k-1} = 0.$$

Näin ollen siis

$$\lim_{t\to 0+} kt^{k-1}e^{-t^k} = \underline{\underline{\infty, \quad \text{kun } 0 < k < 1}}$$ 1p

$$\lim_{t\to 0+} kt^{k-1}e^{-t^k} = k = \underline{\underline{1, \quad \text{kun } k = 1}}$$ 1p(2p)

$$\lim_{t\to 0+} kt^{k-1}e^{-t^k} = \underline{\underline{0, \quad \text{kun } k > 1.}}$$ 1p(3p)

b) Huomautus lukijalle: Derivoidaan e^{-t^k}.

$$\mathrm{D}\, e^{-t^k} = e^{-t^k} \cdot \mathrm{D}(-t^k) = e^{-t^k} \cdot -kt^{k-1} = -kt^{k-1}e^{-t^k}.$$

Tämän avulla saadaan integroitua $w(t, k)$.

Määritetään kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} W(x,k) &= \int_0^x w(t,k)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x kt^{k-1}e^{-t^k}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^x -kt^{k-1}e^{-t^k}\,\mathrm{d}t \\ &= -\bigg/_{\!0}^{x} e^{-t^k} && \text{2p(5p)} \\ &= -e^{-x^k} + e^{0^k} \\ &= \underline{\underline{1 - e^{-x^k}}} && \text{1p(6p)} \end{aligned}$$

10. Tässä tehtävässä on käytössä kaksi mittakeppiä sekä kynä, jolla voi tehdä merkintöjä. Tarkoituksena on mitata keppien avulla pituuksia. Silmämääräisiä arvioita ei sallita.

a) Voidaanko 5 metrin ja 3 metrin keppien avulla mitata 4 metrin pituus? (1 p.)
b) Voidaanko 10 metrin ja 6 metrin keppien avulla mitata 7 metrin pituus? (1 p.)
c) Määritä ne positiiviset kokonaisluvut k, joilla on seuraava ominaisuus: $2k$ metrin ja $k+1$ metrin pituisten keppien avulla voidaan mitata $k+2$ metrin pituus. (4 p.)

Ratkaisu.
Huomautus lukijalle: Tässä ratkaisussa on tehty oletus, että mittakeppejä voidaan laittaa peräkkäin ja päällekkäin suoralle kynällä tehtäviä merkintöjä apuna käyttäen siten, että saadaan mitattua mikä hyvänsä niiden pituuksien monikertojen summan tai erotuksen pituinen etäisyys.

a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

5 metrin mittakepin pituuden avulla voidaan mitata ensin 10 metrin pituus, sillä 10 metriä on kaksi kertaa 5 metriä. Sitten tästä pituudesta voidaan vähentää kaksi kertaa 3 metrin mittakepin pituus, jolloin saadaan

$$10\,\mathrm{m} - 2 \cdot 3\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m},$$

eli 5 metrin ja 3 metrin mittakepeillä voidaan mitata 4 metrin pituus. 1p

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Jos 5 metrin mittakepin pituudesta vähentää 3 metrin mittakepin pituuden, saadaan 2 metrin pituus, eli 5 metrin ja 3 metrin mittakepeillä voidaan mitata 2 metrin pituus. 4 metrin pituus on kaksi kertaa 2 metrin pituus, joten niillä voidaan mitata myös 2 metrin pituus. 1p

RATKAISUVAIHTOEHTO 3

5 metrin ja 3 metrin mittakepeillä voidaan mitata 4 metrin pituus, jos ja vain jos yhtälöllä

$$5n + 3m = 4$$

on olemassa ratkaisu, missä n ja m ovat kokonaislukuja.

Luvut 5 ja 3 ovat alkulukuja, joten niiden suurin yhteinen tekijä on 1. Näin ollen luku 4 on lukujen 5 ja 3 suurimman yhteisen tekijän monikerta, joten tiedetään, että Diofantoksen yhtälöllä $5n+3m = 4$ on olemassa ratkaisu, ja näin ollen 4 metrin pituus voidaan siis mitata 5 metrin ja 3 metrin mittakepeillä. 1p

RATKAISUVAIHTOEHTO 4

Jos 5 metrin mittakepin pituudesta vähentää 3 metrin mittakepin pituuden, saadaan 2 metrin pituus. Tämän ja 3 metrin kepin pituuden erotus on yksi metri. Vähentämällä viiden metrin kepin pituudesta metri saadaan mitattua 4 metrin pituus. 1p

b)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Huomataan, että

$$10n + 6m = 2(5n + 3m),$$

joka on parillinen luku kaikilla kokonaisluvuilla n ja m,
joten koska luku 7 on pariton luku, yhtälöllä $10n + 6m = 7$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, ja näin ollen 10 metrin ja 6 metrin mittakepeillä ei voida mitata 7 metrin pituutta. 1p(2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

10 metrin ja 6 metrin mittakepeillä voidaan mitata 7 metrin pituus, jos ja vain jos yhtälöllä

$$10n + 6m = 7$$

on olemassa ratkaisu, missä n ja m ovat kokonaislukuja. Lukujen $10 = 5 \cdot 2$ ja $6 = 3 \cdot 2$ suurin yhteinen tekijä on 2.
Luku 7 ei ole luvun 2 monikerta, joten tiedetään, että Diofantoksen yhtälöllä $10n + 6m = 7$ ei ole ratkaisua, ja näin ollen 10 metrin ja 6 metrin mittakepeillä ei voida mitata 7 metrin pituutta. 1p(2p)

c)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Jos $2k$ metrin ja $k+1$ metrin pituisten keppien avulla voidaan mitata $k+2$ metrin pituus, yhtälöllä

$$2kn + (k+1)m = k+2$$

on olemassa ratkaisu, missä n ja m ovat kokonaislukuja. Tällöin täytyy olla, että $k+2$ on lukujen $2k$ ja $k+1$ suurimman yhteisen tekijän monikerta. Lähdetään ratkaisemaan lukujen $2k$ ja $k+1$ suurinta yhteistä tekijää Eukleideen algoritmilla.

$$\begin{aligned} 2k &= 1 \cdot (k+1) + k - 1 \\ k+1 &= 1 \cdot (k-1) + 2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Vaihtoehto 1: Jos k on pariton, luku $k-1$ on parillinen, ja Eukleideen algoritmi jatkuu yhtälöstä (1) seuraavasti:

$$k - 1 = \frac{k-1}{2} \cdot 2 + 0,$$

jolloin lukujen $2k$ ja $k+1$ suurin yhteinen tekijä on siis 2. Toisaalta jos luku k on pariton, luku $k+2$ on myös pariton, joten se ei ole lukujen $2k$ ja $k+1$ suurimman yhteisen tekijän 2 monikerta, jolloin tiedetään, että diofantoksen yhtälöllä $2kn + (k+1)m = k+2$ ei ole ratkaisuja. 2p(4p)

Vaihtoehto 2: Jos k on parillinen, luku $k-1$ on pariton, ja Eukleideen algoritmi jatkuu yhtälöstä (1) seuraavasti:

$$k - 1 = \frac{k-2}{2} \cdot 2 + 1,$$

eli lukujen $2k$ ja $k+1$ suurin yhteinen tekijä on siis 1. Tällöin luku $k+2$ on joka tapauksessa lukujen $2k$ ja $k+1$ suurimman yhteisen tekijän 1 monikerta, joten tiedetään, että Diofantoksen yhtälölle $2kn+(k+1)m = k+2$ löytyy ratkaisu. 2p(6p)

Vastaus: Näin ollen siis $2k$ metrin ja $k+1$ metrin pituisten keppien avulla voidaan mitata $k+2$ metrin pituus kaikilla parillisilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Etsitään ensin ratkaisuja, kun k on parillinen, eli $k = 2n$. Tällöin siis $2k = 4n$, $k+1 = 2n+1$ ja $k+2 = 2n+2 = 2(n+1)$, joten saadaan täysin otsalla

$$\begin{aligned} 2(k+1) - 2k &= 2 \quad \| \cdot (n+1) \\ (n+1)(2(k+1) - 2k) &= 2(n+1) \\ 2(n+1) \cdot (k+1) - (n+1) \cdot 2k &= k+2, \end{aligned}$$

joten kun k on parillinen, löytyy aina sellainen kokonaisluku $n = \frac{k}{2}$, että kun mitataan ensin $2(n+1)$ kertaa $k+1$ metrin mittakepillä ja sitten vähennetään siitä $n+1$ kertaa $2k$ metrin mittakepin pituus, saadaan $k+2$ metriä. 2p(4p)

Etsitään sitten ratkaisuja, kun k on pariton, eli $k = 2n-1$. Tällöin siis $2k = 2(2n-1)$ ja $k+1 = 2n$ ovat molemmat parillisia lukuja. Näin ollen mikä tahansa pituus, joka mitataan niiden monikertojen summana tai erotuksena, on myös parillinen luku. Luku $k+2 = 2n+1$ on pariton luku, joten $2k$ metrin ja $k+1$ metrin pituisilla kepeillä ei voi mitata $k+2$ metrin pituutta millään parittomalla positiivisella kokonaisluvulla k. 2p(6p)

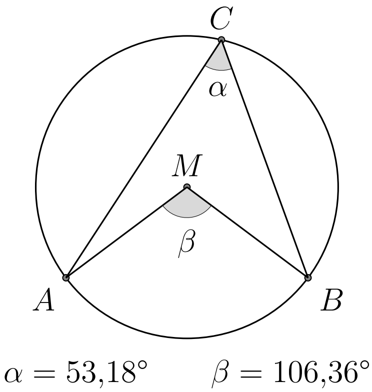
Vastaus: Näin ollen siis $2k$ metrin ja $k+1$ metrin pituisten keppien avulla voidaan mitata $k+2$ metrin pituus kaikilla parillisilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

11. Alla olevien kuvioiden kaksi tilannetta ovat syntyneet erään abiturientin harjoitellessa dynaamisen matematiikkaohjelman käyttöä. Tehtävänä on auttaa häntä viemään tarkastelu loppuun molemmissa tapauksissa.

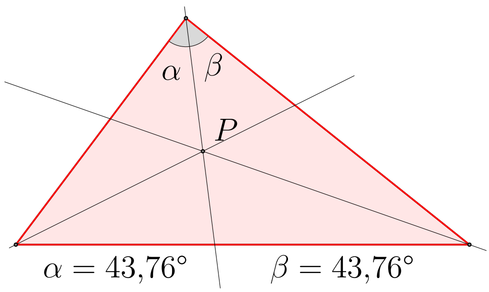
a) Mitä ympyrään liittyvää lausetta abiturientti tutkii kuvassa 1? Kirjoita lause mahdollisimman täsmällisiä termejä käyttämällä. (1 p.)

b) Abiturientti tarkastelee kuvassa 2 näkyvän kolmion merkillistä pistettä P. Mikä tämä piste on? Minkä pisteeseen P liittyvän geometrisen ominaisuuden abiturientti todentaa, jos hän piirtää ympyrän, jonka keskipisteenä on P ja jonka säde on sopivan mittainen. (1 p.)

c) Perustele **joko** a-kohdan lause, kun pisteet A, M ja C ovat samalla suoralla, **tai** b-kohdan ominaisuus. (4 p.)



Kuva 1.



Kuva 2.

Ratkaisu.

a) Abiturientti tutkii kehäkulmalausetta, jonka mukaan kehäkulma α on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta β. 1p

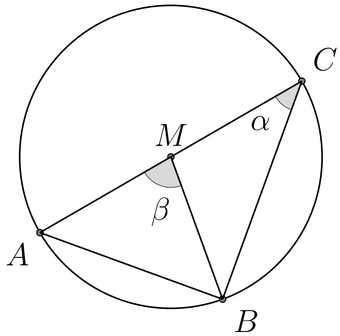
b) Abiturientin tarkastelema piste P on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Piste P on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. 1p(2p)

Huomautus lukijalle: Kolmion sisään piirretty ympyrä tarkoittaa sellaista ympyrää, joka sivuaa jokaista kolmion sivua, eli juuri ja juuri mahtuu kolmion sisälle.

c) HUOM! Tehtävässä pyydettiin perustelemaan vain **toinen** lauseista a tai b. Tässä on esitetty perustelu kumpaankin.

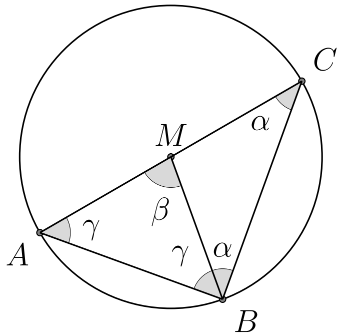
Perustelu a-kohdan lauseeseen

Piirretään kuva tilanteesta, kun A, M ja C ovat samalla suoralla.



Janat AM ja BM ovat ympyrän säteitä, joten $AM = BM$. Siten kolmio ABM on tasakylkinen ja sen kantakulmat ovat yhtäsuuret. Merkitään kantakulmaa muuttujalla γ. 1p(3p)

Janat CM ja BM ovat ympyrän säteitä, joten $CM = BM$. Siten kolmio MBC on tasakylkinen ja sen kantakulmat ovat yhtäsuuret. Siten $\angle MBC = \alpha$. 1p(4p)



Kolmion kulmien summa on 180°, joten kolmiossa ABM

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 180^\circ \\ 2\gamma &= 180^\circ - \beta \qquad (1) \end{aligned}$$ 1p(5p)

Kolmiossa ABC taas

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma + \alpha + \alpha &= 180^\circ \\ 2\alpha &= 180^\circ - 2\gamma \end{aligned}$$

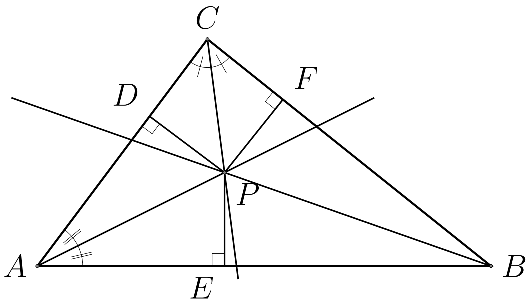
Sijoitetaan viimeiseen yhtälöön lauseke (1).

$$\begin{aligned}2\alpha &= 180° - (180° - \beta)\\ 2\alpha &= 180° - 180° + \beta\\ 2\alpha &= \beta \qquad || : 2\\ \alpha &= \frac{1}{2}\beta.\end{aligned}$$

1p(6p)

Perustelu 1 b-kohdan lauseeseen

Piirretään kolmiolle kaksi kulmanpuolittajaa ja niiden leikkauspiste P.

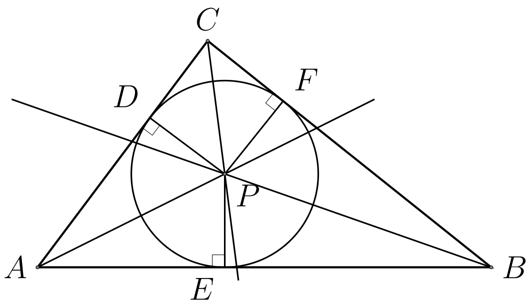


Kuvaan on merkitty pisteen P etäisyys kolmion kustakin sivusta. Etäisyydet on merkitty janoilla DP, EP ja FP. 1p(3p)

Tiedetään, että jokainen kulmanpuolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä. Näin ollen $DP = EP$ ja toisaalta $FP = DP$. Siten kaikki nämä janat ovat yhtä pitkiä, eli $DP = EP = FP$. 1p(4p)

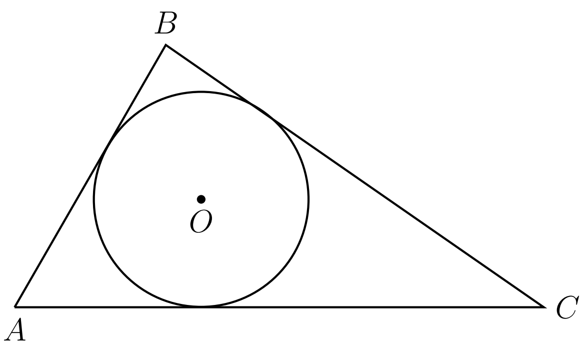
Jos nyt piirretään ympyrä, jonka keskipiste on P ja säde DP, kulkee ympyrä kaikkien pisteiden D, E ja F kautta, koska $DP = EP = FP$. Piste P on siis kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. 2p(6p)

Huomautus lukijalle: Alla olevaa kuvaa ei vaadita ratkaisussa, mutta kolmion sisään piirretty ympyrä näyttäisi tältä.

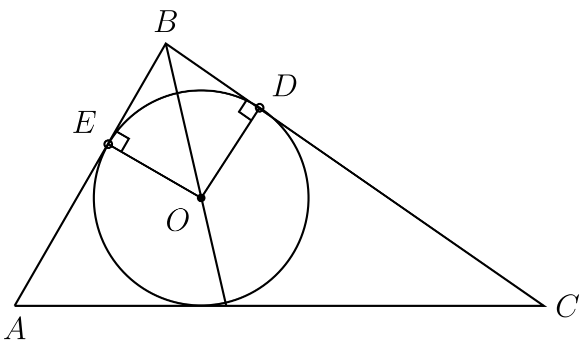


PERUSTELU 2 B-KOHDAN LAUSEESEEN

Piirretään kolmion sisään ympyrä, joka sivuaa kolmion jokaista sivua.



Piirretään ympyrän säteet kolmion sivuille AB ja BC, ja piirretään jana pisteestä B ympyrän keskipisteen läpi kolmion sivulle AC.



1p(3p)

Kolmiot ODB ja OEB ovat molemmat suorakulmaiset ja niillä on yhteinen sivu OB ja keskenään yhtä pitkät (ympyrän säteet) sivut OD ja OE, joten ne ovat keskenään yhtenevät. 1p(4p)

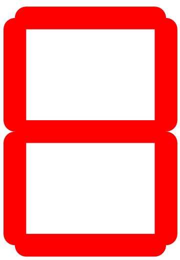
Näin ollen kulma OBE on yhtä suuri kuin kulma DBO, joten kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajalla. 1p(5p)

Samalla päättelyllä voidaan osoittaa, että kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös kahdella muulla kolmion kulmanpuolittajalla. Täten kaikki kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä, ja tämä piste on kolmion sisäänpiirretyn ympyrän leikkauspiste. 1p(6p)

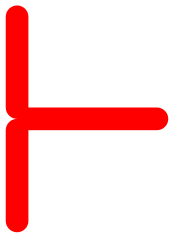
12. Digitaalikellossa numerot nollasta yhdeksään esitetään numeron 8 muotoon asetettujen seitsemän LED-valon avulla (ks. kuva 1).

a) Kuinka monta eri merkkiä ledeillä voidaan esittää, jos merkiltä vaaditaan, että se on yhtenäinen (kuten kuvissa 1 ja 2) ja että ainakin yksi LED-valo palaa? (4 p.)

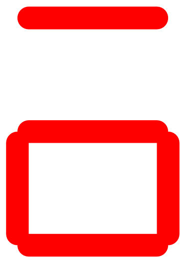
b) Kuinka suurella todennäköisyydellä merkki on yhtenäinen, jos kukin LED-valo on päällä toisista valoista riippumatta todennäköisyydellä 0,5? (Tyhjä merkki, jossa mikään valo ei pala, tulkitaan yhtenäiseksi.) (2 p.)



Kuva 1:
Kaikki 7 LED-valoa



Kuva 2:
Yhtenäinen merkki

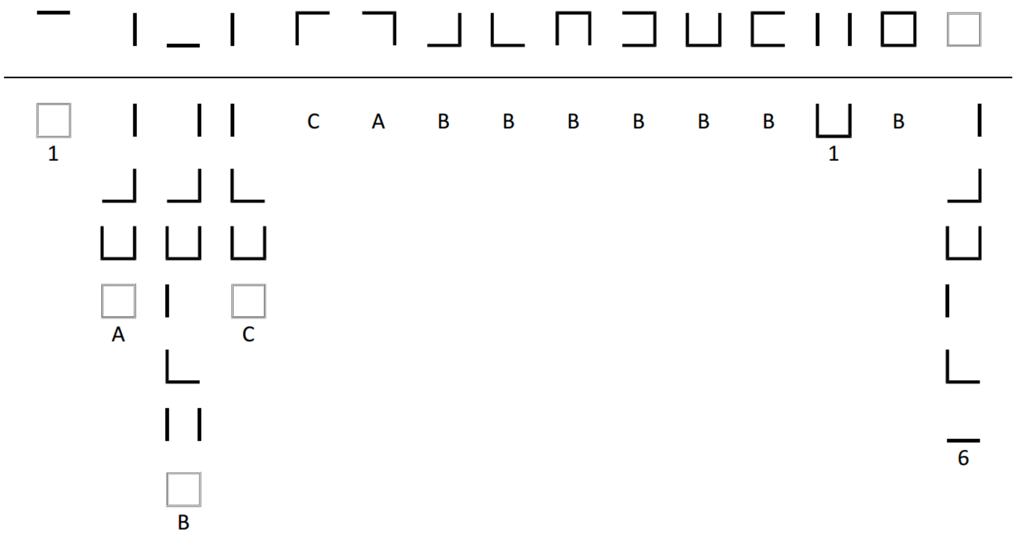


Kuva 3:
Epäyhtenäinen merkki

Ratkaisu.

a)

Ratkaisuvaihtoehto 1



2p

Yllä olevassa kaaviossa on esitetty kaikki vaihtoehdot, jossa vähintään yksi LED palaa ja merkki on yhtenäinen. Kaaviota tulkitaan näin:

- Paksu viiva tarkoittaa, että LED-valo palaa. Tyhjä tai ohut viiva tarkoittaa, että LED ei pala.
- Ylimmällä rivillä on esitetty kaikki 15 tapaa, joilla ylimmät neljä LED:iä voivat palaa sääntöjen mukaisesti.
- Kunkin ylimmän rivin vaihtoehdon alla on esitetty vaihtoehdot, millaisen kuvion kolme alinta LED:iä voivat tällöin muodostaa siten, että merkki on edelleen yhtenäinen.
- Kaavioon on nimetty kuviojoukot A, B ja C. Ne toistuvat seuraavissa sarakkeissa ja kuvioita ei ole tällöin piirretty uudestaan, vaan on vain kirjoitettu, mikä kuviojoukko (A, B tai C) kyseiseen sarakkeeseen kuuluu.

Kuviojoukossa A on 4 eri kuviota, joukossa B on 7 kuviota ja joukossa C on 4 kuviota. Lasketaan kaikkien kuvioiden yhteismäärä.

- Ensimmäisessä sarakkeessa on 1 kuvio.
- Kuviojoukko A löytyy kahdesta sarakkeesta, eli näissä on yhteensä $2 \cdot 4 = 8$ kuviota.
- Kuviojoukko B löytyy kahdeksasta sarakkeesta, eli näissä on yhteensä $8 \cdot 7 = 56$ kuviota.
- Kuviojoukko C löytyy kahdesta sarakkeesta, eli näissä on yhteensä $2 \cdot 4 = 8$ kuviota.
- Kolmanneksi viimeisessä sarakkeessa on 1 kuvio.
- Viimeisessä sarakkeessa on 6 kuviota.

Sääntöjen mukaisia kuvioita on yhteensä $1 + 8 + 56 + 8 + 1 + 6 = 80$.

Vastaus: Yhtenäisiä merkkejä, joissa ainakin 1 ledi palaa, on 80 erilaista. 2p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Led-valoja on yhteensä $n = 7$ kappaletta, joten kaikkiaan k:n palavan ledin yhdistelmiä on siis

$$N_k = \binom{n}{k}$$

kappaletta, joista kaikki tai vain osa on yhtenäisiä riippuen luvusta k. Lasketaan yhtenäisten merkkien määrä erikseen kullekin $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

$k = 7$: Kun kaikki ledit palavat, merkkejä on vain $N_7 = 1$ ja se on yhtenäinen.

$k = 6$: Kun kuusi lediä palaa, merkkejä on

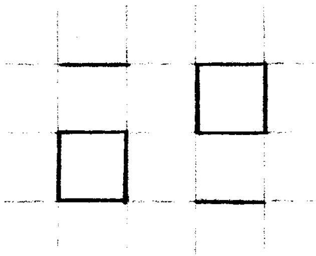
$$N_6 = \binom{7}{6} = 7,$$

ja ne ovat kaikki yhtenäisiä, koska vain yksi ledi ei pala ja kukin ledi on yhteydessä vähintään kahteen muuhun lediin.

$k = 5$: Kun viisi lediä palaa, merkkejä on

$$N_5 = \binom{7}{5} = 21.$$

Ainoastaan ylin ja alin ledi ovat yhteydessä vain kahteen muuhun lediin, joten ainoat ei-yhtenäiset merkit ovat sellaiset, missä joko molemmat ylempään lediin yhteydessä olevat ledit eivät pala tai molemmat alimpaan ledin yhteydessä olevat ledit eivät pala, eli ei-yhtenäisiä merkkejä on 2 kappaletta.



Yhtenäisiä merkkejä on siis tässä tapauksessa

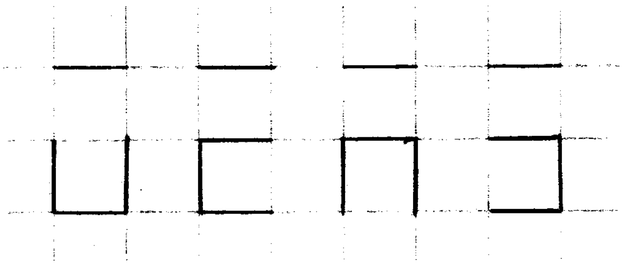
$$N_5 - 2 = 21 - 2 = 19.$$

1p

$k = 4$: Kun neljä lediä palaa, merkkejä on

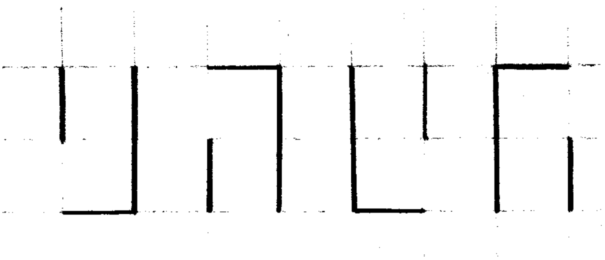
$$N_4 = \binom{7}{4} = 35.$$

Ylin ledi on yhteydessä kahteen lediin, joten jos nämä kaksi lediä eivät pala, ja lisäksi jokin neljästä jäljelle jäävästä keskenään yhteydessä olevasta ledistä ei pala, merkki ei ole yhtenäinen, koska ylin ledi on erillään alhaalla olevista kuvan mukaisesti.



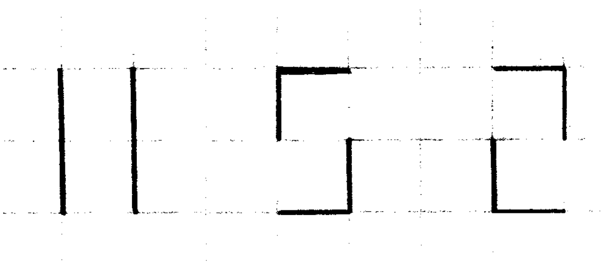
Vastaavat symmetriset neljä vaihtoehtoa löytyvät, jos alin ledi jää erilleen muista, joten löytyy siis yhteensä 8 merkkiä, jotka eivät ole yhtenäisiä, koska joko ylin tai alin ledi jäävät erilleen.

Näiden lisäksi kumpikin vasemmanpuoleisista ja kumpikin oikeanpuoleisista ledeistä ovat jokainen yhteydessä täsmälleen kolmeen muuhun lediin, joten jos juuri nämä kolme muuta lediä eivät pala, kyseinen ledi jää erilleen muista ja merkki ei ole yhtenäinen. Tällaisia ei-yhtenäisiä merkkejä on siis 4 kappaletta.



Keskimmäinen ledi on yhteydessä neljään lediin, joten se ei voi olla erillään muista ledeistä, jos vain kolme lediä ei pala.

Yllä luetellut $4+4+4=12$ vaihtoehtoa ovat kaikki ei-yhtenäiset kuviot, joissa täsmälleen yksi palava ledi jää erilleen muista. On olemassa myös ei-yhtenäisiä merkkejä, joissa kuvio jakautuu kahteen erilliseen osaan, joissa on molemmissa kaksi palavaa lediä yhteydessä toisiinsa. Tällaisia ovat

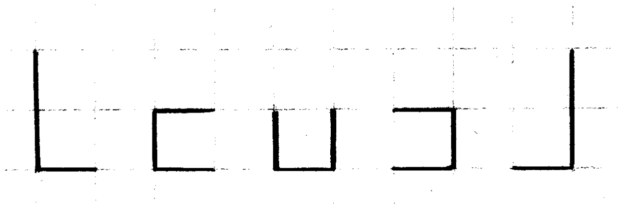


Niitä on siis yhteensä 3 kappaletta.

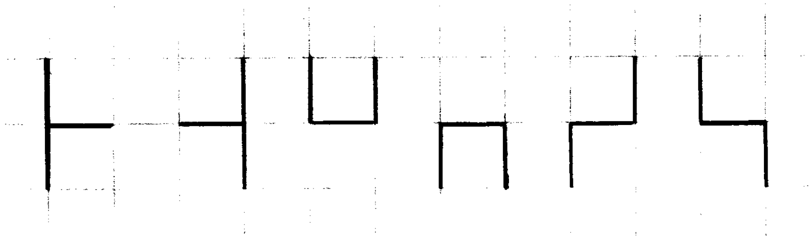
Näin ollen tapauksesssa $k = 4$ on yhteensä $12+3 = 15$ vaihtoehtoa, joissa merkki ei ole yhtenäinen. Yhtenäisiä merkkejä on siis tässä tapauksessa

$$N_4 - 12 = 35 - 15 = 20.$$ 1p(2p)

$k = 3$: Yhtenäisiä kolmen ledin merkkejä, joihin kuuluu alin ledi, on 5 kappaletta.



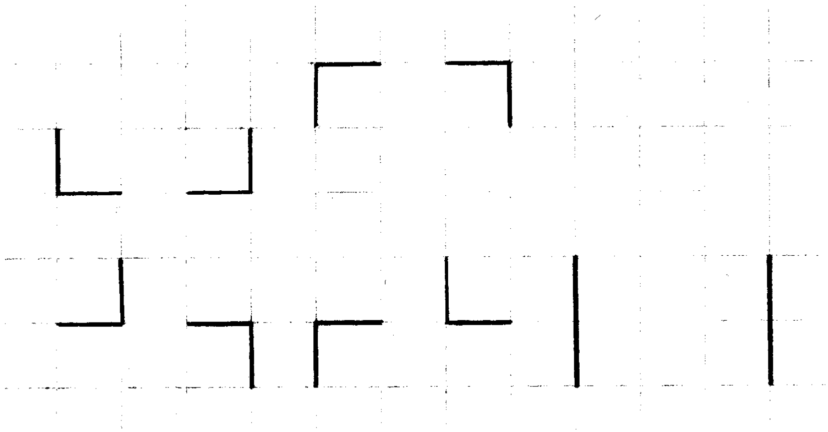
Vastaavasti yhtenäisiä kolmen ledin merkkejä, joihin kuuluu ylin ledi, on myös symmetrisesti samanlaiset 5 kappaletta kuin yllä olevassa kuvassa. Tämän lisäksi yhtenäisiä merkkejä, joihin ei kuulu alin eikä ylin ledi, on 6 kappaletta.



Yhtenäisiä merkkejä on siis tässä tapauksessa yhteensä

$$5 + 5 + 6 = 16.$$

$k = 2$: Yhtenäisiä kahden ledin merkkejä, joihin kuuluu alin ledi, on 2 kappaletta, ja vastaavasti yhtenäisiä kahden ledin merkkejä, joihin kuluuu ylin ledi, on myös 2 kappaletta. Yhtenäisiä kahden ledin merkkejä, joihin kuuluu keskimmäinen ledi, on 4 kappaletta. Jäljelle jäävät enää ne yhtenäiset kahden ledin merkit, joihin eivät kuulu ylin, alin eikä keskimmäinen ledi. Niitä on 2 kappaletta: toiseen kuuluvat molemmat vasemmanpuoleiset ledit ja toiseen molemmat oikeanpuoleiset ledit.



Yhtenäisiä merkkejä on siis tässä tapauksessa yhteensä

$$2 + 2 + 4 + 2 = 10.$$

$k = 1$: Kun yksi ledi palaa, merkkejä on

$$N_1 = 7,$$

ja ne ovat kaikki yhtenäisiä. 1p(3p)

Kaikkiaan yhtenäisiä merkkejä voidaan siis esittää

$$1 + 7 + 19 + 20 + 16 + 10 + 7 = 80.$$

Vastaus: Yhtenäisiä merkkejä, joissa ainakin 1 ledi palaa, on 80 erilaista. 1p(4p)

b) Jos kukin ledi on keskenään yhtä suurella todennäköisyydellä 0,5 päällä, tällöin minkä tahansa yhdistelmän todennäköisyys on

$$P(\text{jokin tietty yhdistelmä}) = 0{,}5^7,$$

eli jokaisen yhdistelmän todennäköisyys on keskenään sama. Todennäköisyys on siis suotuisten alkeistapauksien määrä jaettuna kaikkien alkeistapausten määrällä. Suotuisia alkeistapauksia on a-kohdan nojalla

$$N(\text{suotuisat}) = 80 + 1 = 81,$$

sillä niihin kuuluvat kaikki a-kohdan yhtenäiset merkit ja lisäksi tyhjä merkki, jossa yksikään ledi ei pala. Kaikkiaan alkeistapauksia on

$$N(\text{kaikki}) = 2^7 = 128,$$ 1p(5p)

sillä kullekin seitsemästä ledistä on kaksi vaihtoehtoa: päällä tai ei. Näin ollen todennäköisyys, että merkki on yhtenäinen, on

$$\begin{aligned} P(\text{satunnainen merkki on yhtenäinen}) &= \frac{N(\text{suotuisat})}{N(\text{kaikki})} \\ &= \frac{81}{128} = 0{,}6328\ldots \approx 63{,}3\%. \end{aligned}$$

Vastaus: Satunnainen merkki on yhtenäinen todennäköisyydellä $\frac{81}{128} \approx 63{,}3\%$. 1p(6p)

Huomautus lukijalle: Kun tehtävän ratkaisua lähtee tutkimaan, huomaa melko nopeasti, että kuvioiden määrän laskemiseksi on vaikea keksiä mitään eleganttia kombinatoriikkaan perustuvaa kaavaa. Kun päädyt itse tällaiseen tilanteeseen tehtävän kanssa, kannattaa aina seuraavaksi tarkistaa olisiko niin sanottu ”brute force” ratkaisu ongelmaan. Eli voiko tehdä niin, että tutkii ja luettelee kaikki mahdolliset vaihtoehdot vaikka yksi kerrallaan.

Näytössä on 7 LED-valoa, joista kukin voi olla joko päällä tai pois. Näin ollen näytöllä voi esittää $2^7 = 128$ erilaista kuviota (kaikki niistä eivät ole vaatimusten mukaisia). 128 kpl on vielä kohtuullinen määrä vaihtoehtoja, vaikka ne joutuisi käymään yksi kerrallaan läpi.

Työn ja virheiden minimoimiseksi kannattaa silti vielä hetki pysähtyä ajattelemaan, voisiko työn määrää jotenkin vähentää. Esim. ratkaisuvaihtoehdossa 1 teimme niin, että tutkimme ensin kaikki $2^4 = 16$ eri vaihtoehtoa, miten neljä ylintä LED:iä voivat palaa sääntöjä rikkomatta. Sitten luettelimme kunkin vaihtoehdon alle, kuinka monella eri tavalla jäljelle jäävät 3 LED:iä voidaan asettaa palamaan sääntöjä rikkomatta. Valistuneesti saattoi arvata, että sieltä saattaa löytyä jotain toistuvia kuvioita, niin kuin kävikin, ja työn määrä väheni sen ansiosta.

13. a) Määritä sellainen vakion a tarkka arvo, että yhtälöllä $x^2 = a + \ln x$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. (2 p.)

b) Edellinen kohta voidaan yleistää korvaamalla x^2 kasvavalla funktiolla $f(x)$, jolle pätee $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen vakion a arvo, jolla yhtälöllä $f(x) = a + \ln x$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. (4 p.)

Ratkaisu.

a) Yhtälön $x^2 = a + \ln(x)$ ratkaisut $x > 0$ ovat samat kuin funktion $g(x) = x^2 - \ln(x) - a$ nollakohdat $x > 0$. Tarkastellaan siis vain positiivisia x:n arvoja. Derivoidaan funtio g:

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x}.$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 2x - \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{1}{x} \qquad \| \cdot \frac{x}{2} \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= (\pm)\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (\approx 0{,}707) \end{aligned}$$

Funktion g derivaatalla on siis vain yksi nollakohta positiivisilla x:n arvoilla. Selvitetään derivaatan arvot nollakohdan eri puolilla ja tehdään kulkukaavio.

$$\begin{aligned} g'(0{,}5) &= 2 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{0{,}5} = -1 < 0 \\ g'(1) &= 2 \cdot 1 - \frac{1}{1} = 1 > 0. \end{aligned}$$

Kulkukaavio:

		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$g'(x)$			$-$		$+$
$g(x)$			$\searrow$		$\nearrow$

Näin ollen funktiolla f on positiivisilla x:n arvoilla minimi kohdassa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 1p
joten funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta sellaisella a:n arvolla, jolla

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Ratkaistaan tästä a:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - a &= 0 \end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälön voi ratkaista suoraan laskimella tai käsin, kuten alla.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) - a &= 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) - a &= 0 \\ \frac{1+\ln(2)}{2} - a &= 0 \\ a &= \frac{1+\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Yhtälöllä } x^2 = a + \ln(x) \text{ on täsmälleen yksi ratkaisu } x > 0,}}$
$\underline{\underline{\text{kun } a = \frac{1+\ln(2)}{2}.}}$ 1p(2p)

b) OLETUS: Funktio f on kasvava ja $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$.

VÄITE: On olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että yhtälöllä $f(x) = a + \ln(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$.

TODISTUS: Yhtälön $f(x) = a + \ln(x)$ ratkaisut $x > 0$ on samat kuin funktion $h(x) = f(x) - \ln(x) - a$ nollakohdat $x > 0$. Derivoidaan funktio h kahdesti:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x}$$
$$h''(x) = f''(x) + \frac{1}{x^2}.$$

Toinen derivaatta $h''(x)$ on siis positiivinen kaikilla $x > 0$, koska $\frac{1}{x^2} > 0$ ja oletuksen mukaan $f''(x) > 0$. Näin ollen derivaattafunktio $h'(x)$ on siis aidosti kasvava kaikilla $x > 0$, joten sillä on jatkuvana ja derivoituvana funktiona korkeintaan yksi nollakohta. 1p(3p)

Oletuksen nojalla f on kasvava ja $f''(x) > 0$, joten $f'(x)$ on aidosti kasvava ja $f'(x) \geq 0$. Nyt koska

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

tästä seuraa, että riittävän pienillä x on

$$f'(x) - \frac{1}{x} < 0$$

ja riittävän suurilla x

$$f'(x) - \frac{1}{x} > 0,$$

joten jatkuvalla derivaattafunktiolla $h'(x)$ on olemassa nollakohta. 1p(4p)
Näin ollen derivaattafunktiolla $h'(x)$ on siis täsmälleen yksi nollakohta x_0, jonka vasemmalla puolella se on negatiivinen ja oikealla puolella se on positiivinen. Piirretään funktion $h(x)$ kulkukaavio.

	0	x_0	
$h'(x)$	$-$	$+$	
$h(x)$	↘	↗	

Näin ollen funktiolla h on olemassa minimi $h(x_0) \in \mathbb{R}$. 1p(5p)
Nyt jos $h(x_0) = 0$, x_0 on funktion h ainoa nollakohta. Ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} h(x_0) &= 0 \\ f(x_0) - \ln(x_0) - a &= 0 \\ a &= f(x_0) - \ln(x_0). \end{aligned}$$

Löytyy siis $a = f(x_0) - \ln(x_0) \in \mathbb{R}$, jolle yhtälöllä $f(x) = a + \ln(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. $\square$ 1p(6p)