Yo-mallivastaukset

Kevät 2022
Pitkä matematiikka

Tiesitkö tämän?

Mafylaiset veivät
vuoden 2021
haussa

75%

kaikista lääkiksen
pääsykoekiintiön paikoista.

60%

Pk-seudun lukioista
käyttää **Mafynettiä.**

Mafynetin oppimateriaalit tulossa kaikkiin LOPS 2021 moduuleihin matematiikkaan, fysiikkaan, kemiaan, biologiaan ja maantieteeseen!

Mafynetti

Mallivastausten tekijät:
Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Jori Suominen, Sampsa Kurvinen, Timo Kalinainen ja Sakke Suomalainen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

Mafy oppimateriaalit
Olemme Helsingissä, Tampereella, Turussa ja Jyväskylässä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

Palveluitamme ovat:
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- Kauppatieteellisen valmennusmateriaalit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Käyttöehdot

MAFY Oy:n yhteystiedot:

https://mafy.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa.

Linkit malliratkaisuihin

Malliratkaisut päivitetty 25. maaliskuuta 2022 klo. 16:18.

1. Perustehtäviä (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 5 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin.

1.1. Polynomin $p(x) = x^2 - 6x$ suurempi nollakohta on (2. p)

$$x = \boxed{}$$

1.2. Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ arvo kohdassa $x = 2$ on (2. p)

$$f(2) = \boxed{}$$

1.3. Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ on (2. p)

$$f'(2) = \boxed{}$$

1.4. Yhtälön $5^{k-5} = 25$ ratkaisu on (2. p)

$$k = \boxed{}$$

1.5. Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ raja-arvo kohdassa $x = 4$ on (2. p)

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \boxed{}$$

1.6. Määritä lausekkeen $x^3 + 1$ arvo, kun $x^2 + 1 = 26$ ja $x < 0$. (2. p)

$$x^3 + 1 = \boxed{}$$

Ratkaisu.

1.1 6 2p (yht. 2p)

Lisäselitys lukijalle: Tehtävän polynomi on

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - 6x \\ &= x(x-6). \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön nojalla polynomin arvo on nolla, kun

$$x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} x - 6 &= 0 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Näin ollen suurempi nollakohta on 6.

1.2 5 2p (yht. 4p)

Lisäselitys lukijalle: Funktion arvo saadaan sijoittamalla $x = 2$ funktion lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2^2 + 1 \\ &= 8 - 4 + 1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

1.3 8 2p (yht. 6p)

Lisäselitys lukijalle: Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Funktion derivaatan arvo saadaan sijoittamalla $x = 2$ derivaatan lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 4 - 4 \\ &= 8. \end{aligned}$$

1.4 7 2p (yht. 8p)

Lisäselitys lukijalle: Ratkaistaan k yhtälöstä.

$$5^{k-5} = 25$$
$$5^{k-5} = 5^2$$

Eksponenttifunktio 5^{k-5} on aidosti kasvava, joten tästä seuraa

$$\begin{aligned} k - 5 &= 2 \\ k &= 2 + 5 \\ k &= 7. \end{aligned}$$

1.5 8 2p (yht. 10p)

Lisäselitys lukijalle: Muokataan lauseketta, kun $x \neq 4$.

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{x^2 - 4^2}{x - 4}$$

Käytetään kaavaa $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ osoittajaan. Tässä tapauksessa $a = x$ ja $b = 4$.

$$\begin{aligned} &= \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}} \\ &= x + 4. \end{aligned}$$

Näin ollen kysytty raja-arvo on

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} &= \lim_{x \to 4}(x + 4) \\ &= 4 + 4 \\ &= 8. \end{aligned}$$

1.6 -124 2p (yht. 12p)

Lisäselitys lukijalle: Ratkaistaan x annetusta yhtälöstä.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 26 \\ x^2 &= 26 - 1 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= 5 \qquad \text{tai} \qquad x = -5. \end{aligned}$$

Tehtävänannon mukaan $x < 0$, joten $x = -5$. Sijoitetaan tämä lausekkeeseen $x^3 + 1$, jonka arvoa kysyttiin.

$$(-5)^3 + 1 = -125 + 1 = -124.$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

2. Useita ratkaisutapoja (12 p.)

Yhtälöitä ratkaistaessa käytetään usein osittelulakia eli kerrotaan sulkeet auki tai otetaan yhteinen tekijä;

$$4(x+1) = 4x + 4$$

on esimerkki sulkeiden auki kertomisesta ja

$$4x + 4 = 4(x+1)$$

on esimerkki yhteisen tekijän ottamisesta.

1. Ratkaise yhtälö
$$(2x+1)(x-6) = 0$$
ja yhtälö
$$(2y+1)(y-6) = -6$$
eri tavoilla niin, että toinen yhtälö ratkaistaan kertomalla sulkeet auki ja toinen niin, että sulkeita ei kerrota auki. (6 p.)

2. Ratkaise yhtälö
$$5(7x-2) + 7(7x-2) = 12$$
ja yhtälö
$$5(7y-2) + 7(7y+2) = 12$$
eri tavoilla niin, että toinen yhtälö ratkaistaan kertomalla sulkeet auki ja toinen niin, että sulkeita ei kerrota auki. (6 p.)

Ratkaisu.

1. Ratkaistaan yhtälö $(2x+1)(x-6)=0$ kertomatta sulkuja auki ja yhtälö $(2y+1)(y-6)=-6$ kertomalla sulut auki.

$$(2x+1)(x-6)=0$$

Tulon nollasäännön nojalla yhtälö on tosi, kun

$$2x+1=0 \quad \text{tai} \quad x-6=0 \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

$$2x=-1 \quad \| :2 \quad \text{tai} \quad x=6 \quad \text{1p (yht. 2p)}$$

$$x=-\frac{1}{2} \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Ratkaisu: $x=-\dfrac{1}{2}$ tai $x=6$.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$(2y+1)(y-6)=-6$$

$$2y\cdot y+2y\cdot(-6)+1\cdot y+1\cdot(-6)=-6$$

$$2y^2-12y+y-6=-6$$

$$2y^2-11y=0 \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

$$y(2y-11)=0$$

Tulon nollasäännön nojalla yhtälö on tosi, kun

$$2y-11=0 \quad \text{tai} \quad y=0 \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

$$2y=11 \quad \| :2$$

$$y=\frac{11}{2}. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Ratkaisu: $y=0$ tai $y=\dfrac{11}{2}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$(2y+1)(y-6) = -6$$
$$2y \cdot y + 2y \cdot (-6) + 1 \cdot y + 1 \cdot (-6) = -6$$
$$2y^2 - 12y + y - 6 = -6$$
$$2y^2 - 11y + 0 = 0$$ 1p (yht. 4p)

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$y = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2}$$
$$y = \frac{11 \pm 11}{4}$$
$y = 0$ 1p (yht. 5p) tai $y = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$. 1p (yht. 6p)

Ratkaisu: $y = 0$ tai $y = \frac{11}{2}$.

2. Ratkaistaan yhtälö $5(7x-2) + 7(7x-2) = 12$ kertomatta sulkuja auki ja yhtälö $5(7x-2) + 7(7x+2) = 12$ kertomalla sulut auki.

$$5(7x-2) + 7(7x-2) = 12$$

Otetaan $(7x-2)$ yhteiseksi tekijäksi.

$$(5+7)(7x-2) = 12$$
$$12(7x-2) = 12$$ 1p (yht. 7p) $\quad \| : 12$
$$7x - 2 = 1$$ 1p (yht. 8p)
$$7x = 3 \quad \| : 7$$
$$x = \frac{3}{7}$$ 1p (yht. 9p)

Ratkaisu: $x = \dfrac{3}{7}$.

$$5(7y-2)+7(7y+2)=12$$
$$5\cdot 7y+5\cdot(-2)+7\cdot 7y+7\cdot 2=12$$
$$35y-10+49y+14=12 \quad \text{1p (yht. 10p)}$$
$$84y+4=12 \quad \text{1p (yht. 11p)}$$
$$84y=8 \quad \| : 84$$
$$y=\frac{8}{84}$$
$$y=\frac{2}{21} \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Ratkaisu: $y = \dfrac{2}{21}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

3. $abBA$-tehtävä (12 p.)

1. Sievennä lauseke $(a^2 + \sqrt{2}\,ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}\,ab + b^2)$. (6 p.)
2. Funktiosta
$$f(x) = Ae^{2x} + B\cos(3x)$$
tiedetään, että $f(0) = 4$ ja $f'(0) = 5$. Määritä vakioiden A ja B arvot. (6 p.)

Ratkaisu.

1. Pisteytyksestä: Tämän lausekkeen sieventämiseen löytyi suoraan kaava MAOL-taulukoista. Arviomme mukaan sievennöksen lopputulos on 2p arvoinen ja sievennöksen välivaiheet ovat 4p arvoiset, joten suoraan oikean lopputuloksen kirjoittaminen MAOL-taulukoista löytyneen kaavan avulla on arviomme mukaan 2p arvoinen ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

$$(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$$
$$= (a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)$$

Käytetään kaavaa $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. Tässä tapauksessa $x = a^2 + b^2$ ja $y = \sqrt{2}ab$.

$$= (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2$$ 2p (yht. 2p)

Käytetään kaavaa $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$. Tässä tapauksessa $x = a^2$ ja $y = b^2$.

$$= (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - (\sqrt{2})^2a^2b^2$$
$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2$$ 2p (yht. 4p)
$$= a^4 + b^4.$$ 2p (yht. 6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$$

Kerrotaan sulut auki.

$$\begin{aligned}
&= a^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot (-\sqrt{2}ab) + a^2 \cdot b^2 + \sqrt{2}ab \cdot a^2 + \sqrt{2}ab \cdot (-\sqrt{2}ab) + \sqrt{2}ab \cdot b^2 \\
&\quad + b^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot (-\sqrt{2}ab) + b^2 \cdot b^2 \quad \text{2p (yht. 2p)} \\
&= a^4 - \sqrt{2}a^3b + a^2b^2 + \sqrt{2}a^3b - 2a^2b^2 + \sqrt{2}ab^3 + a^2b^2 - \sqrt{2}ab^3 + b^4 \quad \text{2p (yht. 4p)} \\
&= a^4 - \sqrt{2}a^3b + \sqrt{2}a^3b + \sqrt{2}ab^3 - \sqrt{2}ab^3 + a^2b^2 + a^2b^2 - 2a^2b^2 + b^4 \\
&= a^4 + b^4. \quad \text{2p (yht. 6p)}
\end{aligned}$$

2.

$$f(x) = Ae^{2x} + B\cos(3x).$$

Tiedetään, että

$$\begin{aligned}
f(0) &= 4 \\
Ae^{2\cdot 0} + B\cos(3 \cdot 0) &= 4 \\
Ae^{0} + B\cos(0) &= 4 \\
A \cdot 1 + B \cdot 1 &= 4 \\
A + B &= 4 \quad \text{1p (yht. 7p)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Derivoidaan f.

$$f'(x) = 2Ae^{2x} - 3B\sin(3x). \quad \text{2p (yht. 9p)}$$

Jos osasit derivoida funktion ongelmitta, hyppää alla olevan värillisen tekstin yli!

Lisäselitys lukijalle derivoinnista: Kummankin termin saa derivoitua yhdistetyn funktion derivointisäännöllä. Merkitään $g(x) = Ae^{2x}$, $h(x) = Ae^{x}$ ja $i(x) = 2x$. Tällöin siis $g(x) = h(i(x))$. Funktioiden h ja i derivaatat ovat

$$h'(x) = Ae^{x}$$
$$i'(x) = 2,$$

joten yhdistetyn funktion derivointisäännöllä saadaan

$$g'(x) = h'(i(x)) \cdot i'(x) = Ae^{2x} \cdot 2 = 2Ae^{2x}.$$

Vastaavasti, jos merkitään $j(x) = B\cos(3x)$, $k(x) = B\cos(x)$ ja $l(x) = 3x$, funktioiden k ja l derivaatat ovat

$$k'(x) = -B\sin(x)$$
$$l'(x) = 3,$$

joten yhdistetyn funktion derivointisäännöllä saadaan

$$j'(x) = k'(l(x)) \cdot l'(x) = -B\sin(3x) \cdot 3 = -3B\sin(3x).$$

Tiedetään, että

$$\begin{aligned}
f'(0) &= 5 \\
2Ae^{2\cdot 0} - 3B\sin(3\cdot 0) &= 5 \\
2Ae^{0} - 3B\sin(0) &= 5 \\
2A\cdot 1 - 3B\cdot 0 &= 5 \\
2A &= 5 \quad \boxed{\text{1p (yht. 10p)}} \quad \| :2 \\
A &= \frac{5}{2}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 11p)}}
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (1) ja ratkaistaan B.

$$
\begin{aligned}
A + B &= 4 \\
\frac{5}{2} + B &= 4 \\
B &= 4 - \frac{5}{2} \\
&= \frac{8}{2} - \frac{5}{2} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

1p (yht. 12p)

Vastaus: $A = \frac{5}{2}$ ja $B = \frac{3}{2}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

4. Polynomit (12 p.)

Polynomien $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$ ja $g(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$ kuvaajat leikkaavat toisensa kolmessa pisteessä $(2, 0)$, $(-2, 0)$ ja (x_0, y_0), missä $-2 < x_0 < 0$.

1. Määritä leikkauspiste (x_0, y_0). (4 p.)
2. Laske polynomien kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0, 2]$. (8 p.)

Ratkaisu.

1.

$$f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$$
$$g(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$$

Ratkaistaan leikkauskohta, kun $-2 < x_0 < 0$.

$$f(x_0) = g(x_0)$$
$$\cancel{(x_0-2)(x_0+2)}(x_0-1) = -2\cancel{(x_0-2)(x_0+2)}(x_0+1) \quad \text{1p (yht. 1p)}$$
$$x_0 - 1 = -2(x_0+1) \quad \text{1p (yht. 2p)}$$
$$x_0 - 1 = -2x_0 - 2$$
$$3x_0 = -1 \quad \| :3$$
$$x_0 = -\frac{1}{3} \quad \text{1p (yht. 3p)}$$

Lasketaan leikkauskohdan y-koordinaatti.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{3}+2\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)$$
$$= -\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{140}{27} \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

Vastaus: Kysytty leikkauspiste on $\left(-\frac{1}{3}, \frac{140}{27}\right)$.

2. Funktioilla f ja g ei ole leikkauspisteitä välillä $[0, 2[$. Sijoitetaan $x = 0$ funktion lausekkeisiin, jotta saadaan selville, kumpi funktioista saa suurempia arvoja tällä välillä.

$$f(0) = (0-2)(0+2)(0-1) = 4$$
$$g(0) = -2(0-2)(0+2)(0+1) = 8.$$

Näin ollen siis tarkasteluvälillä $g(x) > f(x)$ 1p (yht. 5p), joten kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan integroimalla erotusfunktiota $g(x) - f(x)$ kyseisen välin yli. Muodostetaan erotusfunktion lauseke.

$$\begin{aligned}
g(x) - f(x) &= -2(x-2)(x+2)(x+1) - (x-2)(x+2)(x-1) \\
&= (x-2)(x+2)(-2(x+1) - (x-1)) \\
&= (x-2)(x+2)(-2x-2-x+1) \\
&= (x-2)(x+2)(-3x-1) \quad \text{1p (yht. 6p)} \\
&= (x^2-4)(-3x-1) \\
&= -3x^3 - x^2 + 12x + 4 \quad \text{1p (yht. 7p)}
\end{aligned}$$

Erotusosamäärän lausekkeen voi sieventää myös seuraavasti, jos ei hoksannut ottaa yhteistä tekijää:

$$\begin{aligned}
g(x) - f(x) &= -2(x-2)(x+2)(x+1) - (x-2)(x+2)(x-1) \\
&= -2(x^2-2^2)(x+1) - (x^2-2^2)(x-1) \\
&= -2(x^2-4)(x+1) - (x^2-4)(x-1) \\
&= -2(x^3+x^2-4x-4) - (x^3-x^2-4x+4) \\
&= -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8 - x^3 + x^2 + 4x - 4 \\
&= -3x^3 - x^2 + 12x + 4
\end{aligned}$$

Lasketaan kuvaajien rajoittama pinta-ala.

$$A = \int_0^2 (-3x^3 - x^2 + 12x + 4)\,\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 8p)

$$= \bigg/_{\!\!0}^{2} \left(-\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 4x\right)$$ 2p (yht. 10p)

$$= -\frac{3}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{3}\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - \left(-\frac{3}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2 + 4\cdot 0\right)$$ 1p (yht. 11p)

$$= -12 - \frac{8}{3} + 24 + 8$$

$$= 20 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{60}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{52}{3}$$ 1p (yht. 12p) $= 17\frac{1}{3}$

Vastaus: Kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0, 2]$ on $\frac{52}{3}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

5. Monivalinnat (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 tai 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

5.1. Kaikissa suunnikkaissa lävistäjät (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”ovat yhtä pitkät”, ”puolittavat toisensa”, ”ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan”, ”jakavat suunnikkaan neljäksi keskenään yhdenmuotoiseksi kolmioksi.”.

5.2. Kuutiossa on (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”4 tahkoa, 6 kärkeä ja 8 särmää”, ”6 tahkoa, 8 kärkeä ja 10 särmää”, ”6 tahkoa, 8 kärkeä ja 12 särmää”, ”8 tahkoa, 10 kärkeä ja 12 särmää”.

5.3. Suora, jolla on ympyrän kanssa kaksi yhteistä pistettä, on ympyrän (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”kaari”, ”sekantti”, ”tangentti”, ”segmentti”.

5.4. Paraabeli muodostuu niistä tason pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä suorasta ja paraabelin (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”huipusta”, ”nollakohdista”, ”polttopisteestä”, ”symmetria-akselista”.

5.5. Kun vektori, joka ei ole nollavektori, kerrotaan pituutensa käänteisluvulla, saadaan vektorin (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”vastavektori”, ”pistetulo itsensä kanssa”, ”päätepisteen paikkavektori”, ”kanssa samansuuntainen yksikkövektori”.

5.6. Avaruuden kolme eri pistettä ei koskaan määrää yksikäsitteistä (1 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: ”palloa”, ”ympyrää”, ”kolmiota”, ”tasoa”.

5.7. Kun a ja b ovat reaalilukuja, niin epäyhtälö $a < b$ toteutuu täsmälleen silloin, kun (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "$|a| < |b|$", "$a < b^2$", "$a^3 < b^2$", "$a^2 < b^2$", "$a^2 < b^3$", "$a^3 < b^3$".

5.8. Polynomi $(x^2 + 5x + 1)(x + 3)$ derivoidaan. Mikä on derivaatan arvo pisteessä 0? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "0", "1", "3", "8", "10", "16", "28".

5.9. Tiedetään, että $x^x = 100$. Mitä voidaan sanoa luvusta x? (2 p.)

Vastauslaatikon vaihtoehdot: "$x = 10$", "$x = 5$", "$3 < x < 4$", "$x < 3$", "$4 < x < 5$", "$x < 10$".

Ratkaisu.

5.1. puolittavat toisensa 1p (yht. 1p)

Lisäselitys lukijalle: Alla on piirretty kaksi suunnikasta $ABCD$ ja $FGHI$.

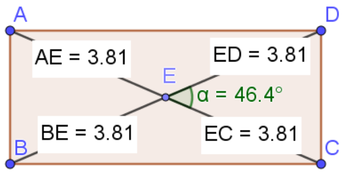
Suunnikkaasta $ABCD$ nähdään:

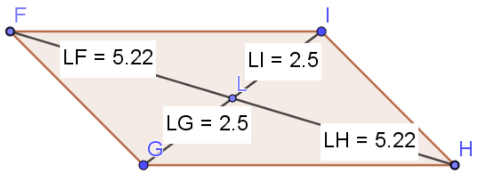
Lävistäjät eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Lävistäjät eivät jaa suunnikasta neljäksi keskenään yhdenmuotoiseksi kolmioksi.

Suunnikkaasta $FGHI$ nähdään, että lävistäjät eivät ole yhtä pitkät.

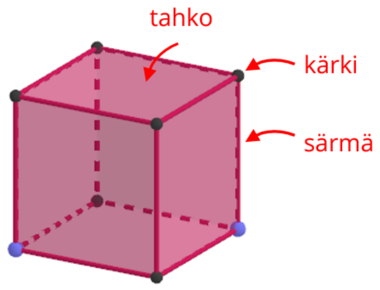
Ainoa vaihtoehto, joka pätee näihin molempiin suunnikkaisiin, on se, että lävistäjät puolittavat toisensa.





5.2. 6 tahkoa, 8 kärkeä ja 12 särmää 1p (yht. 2p)

Lisäselitys lukijalle:



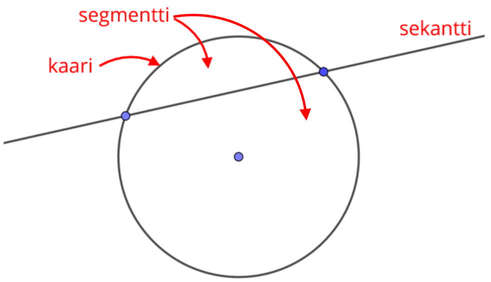
5.3. sekantti 1p (yht. 3p)

Lisäselitys lukijalle:

Tangentti sivuaa ympyrän kehää yhdessä pisteessä, kun taas sekantti leikkaa ympyrän kehän kahdessa eri pisteessä.

Sekantilla ja ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä.

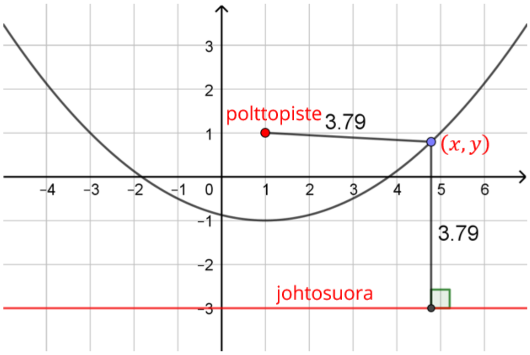
Segmentillä tarkoitetaan ympyrän jänteen ja sen ympyrästä rajaaman kaaren sisälle jäävää aluetta.



5.4. polttopisteestä 1p (yht. 4p)

Lisäselitys lukijalle:

Paraabeli muodostuu niistä tason pisteistä (x, y), jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta ja polttopisteestä.



5.5. kanssa samansuuntainen yksikkövektorin 1p (yht. 5p)

Lisäselitys lukijalle:
Olkoon vektori $\bar{a} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{a}$ pituus on $|\bar{a}|$.
Vektorin $\bar{a}$ pituuden käänteisluku on $\frac{1}{|\bar{a}|}$.
Kun vektori $\bar{a}$ kerrotaan pituutensa käänteisluvulla, saadaan yksikkövektorin $\bar{a}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori $\bar{a} \cdot \frac{1}{|\bar{a}|} = \bar{a}^0$.

5.6. palloa 1p (yht. 6p)

Myös vastaus “kolmiota” tulisi hyväksyä.

Lisäselitys lukijalle:
Pisteet määräävät yksikäsitteisen objektin (pallon, ympyrän, kolmion tai tason), mikäli on olemassa vain yksi tällainen objekti, joka kulkee annettujen pisteiden kautta.

Valitaan kolme pistettä niin, että ne eivät ole samalla suoralla. Kyseiset kolme pistettä määräävät yksikäsitteisen tason ja yksikäsitteisen ympyrän, joka siis on tässä tasossa.

On olemassa useita palloja, jotka kulkevat näiden pisteiden kautta. Jos taas pisteet ovat samalla suoralla, ei ole olemassa palloa, joka kulkisi näiden pisteiden kautta.

Tässä kolmen pisteen määräämässä tasossa on useita eri kolmioita, jotka kulkevat näiden pisteiden kautta. Huomaa, että pisteiden ei tarvitse olla kolmion kärkipisteitä. Jos taas pisteet ovat samalla suoralla, on olemassa useita kolmioita, joiden yksi sivu sisältää annetut pisteet.

5.7. $a^3 < b^3$ 2p (yht. 8p)

Lisäselitys lukijalle:

Kun $|3| < |-4|$, niin epäyhtälö $3 < -4$ ei toteudu.

Kun $3 < (-4)^2$, niin epäyhtälö $3 < -4$ ei toteudu.

Kun $1^3 < (-2)^2$, niin epäyhtälö $1 < -2$ ei toteudu.

Kun $3^2 < (-4)^2$, niin epäyhtälö $3 < -4$ ei toteudu.

Kun $2^2 < 2^3$, niin epäyhtälö $2 < 2$ ei toteudu.

Korotetaan epäyhtälö $a < b$ puolittain kolmanteen:

$$\begin{aligned} a &< b \quad \|(\ )^3 \\ a^3 &< b^3 \end{aligned}$$

Näin saadaan tehdä, koska kolmanteen korotuksessa epäyhtälön suuruusjärjestys säilyy (mikä johtuu siitä, että x^3 on aidosti kasvava).

5.8. 16 2p (yht. 10p)

Lisäselitys lukijalle:

Sievennetään polynomi:

$$\begin{aligned} (x^2+5x+1)(x+3) &= x^3+5x^2+x+3x^2+15x+3 \\ &= x^3+8x^2+16x+3 \end{aligned}$$

Derivoidaan sievennetty lauseke:

$$\begin{aligned} D(x^3+8x^2+16x+3) &= 3\cdot x^{3-1}+8\cdot 2\cdot x^{2-1}+16\cdot 1+0 \\ &= 3x^2+16x+16 \end{aligned}$$

Derivaatta pisteessä $x = 0$ on $3\cdot 0^2+16\cdot 0+16 = 16$.

5.9. $3 < x < 4$ 2p (yht. 12p)

Lisäselitys lukijalle:

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan yhtälö $x^x = 100$ laskinohjelmalla, jolloin saadaan $x = 3{,}597\ldots$, joten vain vaihtoehto $3 < x < 4$ kelpaa ratkaisuksi.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$4^4 = 256 > 100$. Kun $x > 0$, niin $x^x = e^{x \ln x}$ on jatkuva (ulko- ja sisäfunktio jatkuvia) ja aidosti kasvava (tämä on ainakin intuitiivisesti selvää, koska sekä kantaluvun että eksponentin kasvattaminen kasvattaa potenssin arvoa), niin yhtälön ratkaisu on pienempi kuin 4. Toisaalta $3^3 = 27 < 100$, joten yhtälön ratkaisu on suurempi kuin 3. Siis $3 < x < 4$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

6. Ympyrä kohtaa paraabelin (12 p.)
Tämän tehtävän voi ratkaista likimääräisesti ohjelmistolla. Tällöin perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on tehty. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti laskemalla.

Olkoon $r > 0$. Paraabeli $y = x^2$ ja ympyrä $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ sivuavat toisiaan kahdessa pisteessä. Määritä paraabelin ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Piirretään ensin pistejoukot $y = x^2$ ja $x^2+(y-2)^2 = r^2$ kirjoittamalla syöttökenttään $\mathtt{y} = \mathtt{x}^2$ ja $\mathtt{x}^2 + (\mathtt{y}-2)^2 = \mathtt{r}^2$.

Kun komento $\mathtt{x}^2 + (\mathtt{y}-2)^2 = \mathtt{r}^2$ on kirjoitettu, luodaan GeoGebran ehdottama liukusäädin $\mathtt{r}$.

GeoGebra nimeää pistejoukon $y = x^2$ kirjaimella $\mathtt{f}$ ja pistejoukon $x^2+(y-2)^2 = r^2$ yhtälöksi $\mathtt{eq1}$.

Muodostetaan pistejoukkojen $\mathtt{f}$ ja $\mathtt{eq1}$ leikkauspisteet kirjoittamalla komento

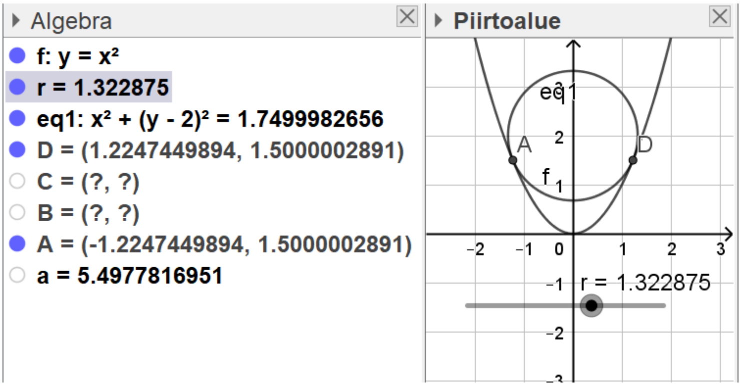
$$\mathtt{leikkauspiste}(\mathtt{f}, \mathtt{eq1}).$$

Etsitään seuraavaksi liukusäätimen $\mathtt{r}$ arvo, jolloin pistejoukko $\mathtt{eq1}$ sivuaa pistejoukkoa $\mathtt{f}$ kahdessa eri pisteessä.

GeoGebran asetuksista pyöristys kannattaa muuttaa esimerkiksi 10 desimaalin tarkkuuteen.

Avataan liukusäätimen $\mathtt{r}$ ominaisuudet ja pienennetään animaatioaskeletta vaiheittain, kunnes pistejoukko $\mathtt{eq1}$ sivuaa pistejoukkoa $\mathtt{f}$ kahdessa eri pisteessä.

Haluttu tilanne saadaan, kun animaatioaskeleeksi asetetaan arvo 0.000001 ja liukusäädin $\mathtt{r} = 1.322875$.



Pistejoukot ja liukusäädin tehty laskinohjelmalla 2p (yht. 2p)

Liukusäätimen avulla löydetty kaksi eri sivuamispistettä 2p (yht. 4p)

Oikea liukusäätimen muuttujan (tässä r) arvo 1p (yht. 5p)

Määritetään seuraavaksi ympyrän eq1 ja paraabelin f väliin jäävän alueen pinta-ala integraalin avulla:

Ratkaistaan ensin yhtälö $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ muuttujan y suhteen:

Kirjoitetaan GeoGebran CAS-ikkunaan komento:

$$\texttt{Ratkaise}(\mathtt{x}^2 + (\mathtt{y} - 2)^2 = \mathtt{r}^2, \mathtt{y}).$$

Saadaan yhtälöt $y = \sqrt{r^2 - x^2} + 2$ ja $y = -\sqrt{r^2 - x^2} + 2$, 1p (yht. 6p) joista yhtälö

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} + 2$$

kuvaa ympyrän alakaarta sivuamispisteiden välillä. 1p (yht. 7p)

Ympyrän ja paraabelin väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan integraalin

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$

avulla.

Integraaliväli $[a, b]$ saadaan ympyrän ja paraabelin sivuamispisteiden x-koordinaateista, joten $a = -1{,}2247449894$, $b = 1{,}2247449894$.

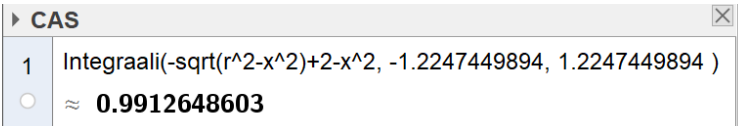
Koska paraabelin kuvaaja on alempana kuin ympyrän alakaari, saadaan yhtälö

$$f(x) - g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} + 2 - x^2.$$ 2p (yht. 9p)

Lasketaan integraali

$$A = \int_{-1{,}2247449894}^{1{,}2247449894} \left(-\sqrt{r^2 - x^2} + 2 - x^2\right)\, dx$$ 2p (yht. 11p)

Geogebran avulla, jolloin saadaan pinta-alaksi $A = 0{,}99126\ldots \approx 0{,}99.$ 1p (yht. 12p)



Ratkaisuvaihtoehto 2

Selvitetään ensin paraabelin $y = x^2$ ja ympyrän $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ sivuamispisteet. Ympyrän ja paraabelin sivuamispisteet voidaan ratkaista yhtälöparin avulla:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y-2)^2 = r^2 \end{cases} \tag{1}$$

Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla $x^2 = y$ alempaan yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö:

$$y + (y-2)^2 = r^2 \quad \| - r^2$$

$$y + y^2 - 4y + 4 - r^2 = 0$$

$$y^2 - 3y + 4 - r^2 = 0$$ 1p (yht. 1p)

Paraabelilla ja ympyrällä on kaksi eri sivuamispistettä, kun yhtälöllä

$$y^2 - 3y + 4 - r^2 = 0$$

on vain yksi ratkaisu.

Yllä esitetyllä yhtälöllä on yksi ratkaisu, kun diskriminantti on nolla. 1p (yht. 2p) Muodostetaan diskriminantin yhtälö:

$$D = 0$$

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - r^2) = 0$$ 1p (yht. 3p)

Laskinohjelmalla saadaan $r = \sqrt{\frac{7}{4}}$, koska $r > 0$. 1p (yht. 4p)

Sijoitetaan $r = \sqrt{\frac{7}{4}}$ yhtälöpariin (1) ja ratkaistaan yhtälöpari laskinohjelmalla, jolloin saadaan $y = \frac{3}{2}$ ja $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. 1p (yht. 5p)

Ympyrän ja paraabelin sivuamispisteet ovat siis $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$ ja $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$.

Ratkaistaan yhtälö $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ muuttujan y suhteen:

Kirjoitetaan GeoGebran CAS-ikkunaan komento:

$$\mathtt{Ratkaise}(\mathtt{x}^2 + (\mathtt{y} - 2)^2 = \mathtt{r}^2, \mathtt{y}).$$

Saadaan yhtälöt $y = \sqrt{r^2 - x^2} + 2$ ja $y = -\sqrt{r^2 - x^2} + 2$, 1p (yht. 6p) joista yhtälö

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} + 2$$

kuvaa ympyrän alakaarta sivuamispisteiden välillä. 1p (yht. 7p)

Ympyrän ja paraabelin väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan integraalin

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$

avulla.

Koska paraabelin kuvaaja on alempana kuin ympyrän alakaari, saadaan yhtälö

$$f(x) - g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} + 2 - x^2$$

. 2p (yht. 9p)

Lasketaan integraali

$$A = \int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} \left(-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2 - x^2} + 2 - x^2\right) dx$$ 2p (yht. 11p)

Geogebran avulla, jolloin saadaan pinta-alaksi $A = 0{,}99126\ldots \approx 0{,}99$. 1p (yht. 12p)

Ratkaisuvaihtoehto 3

Selvitetään ensin paraabelin $y = x^2$ ja ympyrän $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ sivuamispisteet.

Ympyrän ja paraabelin sivuamispisteet voidaan ratkaista yhtälöparin avulla:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y-2)^2 = r^2 \end{cases} \tag{2}$$

Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla $x^2 = y$ alempaan yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö:

$$y + (y-2)^2 = r^2 \quad \| - r^2$$

$$y + y^2 - 4y + 4 - r^2 = 0$$

$$y^2 - 3y + 4 - r^2 = 0$$ 1p (yht. 1p)

Paraabelilla ja ympyrällä on kaksi eri sivuamispistettä, kun yhtälöllä

$$y^2 - 3y + 4 - r^2 = 0$$

on vain yksi ratkaisu.

Yllä esitetyllä yhtälöllä on yksi ratkaisu, kun diskriminantti on nolla. 1p (yht. 2p) Muodostetaan diskriminantin yhtälö:

$$D = 0$$

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - r^2) = 0$$ 1p (yht. 3p)

Laskinohjelmalla saadaan $r = \sqrt{\frac{7}{4}}$, koska $r > 0$. 1p (yht. 4p)

Sijoitetaan $r = \sqrt{\frac{7}{4}}$ yhtälöpariin (2) ja ratkaistaan yhtälöpari laskinohjelmalla, jolloin saadaan $y = \frac{3}{2}$ ja $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. 1p (yht. 5p)

Ympyrän ja paraabelin sivuamispisteet ovat siis $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$ ja $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$.

Ratkaistaan seuraavaksi integraalin avulla ympyrän ja paraabelin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. Tarkastelualueen päätepisteillä on sama y-koordinaatti, joten piirretään apusuora $y = \frac{3}{2}$.

Apusuoran avulla kysytty pinta-ala voidaan laskea vähentämällä apusuoran ja paraabelin muodostamasta pinta-alasta apusuoran muodostama ympyräsegmentin pinta-ala. 1p (yht. 6p)

Lasketaan apusuoran ja paraabelin välinen pinta-ala:

$$A_1 = \int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} \left(\frac{3}{2} - x^2\right)\, dx = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 2{,}449\ldots$$ 2p (yht. 8p)

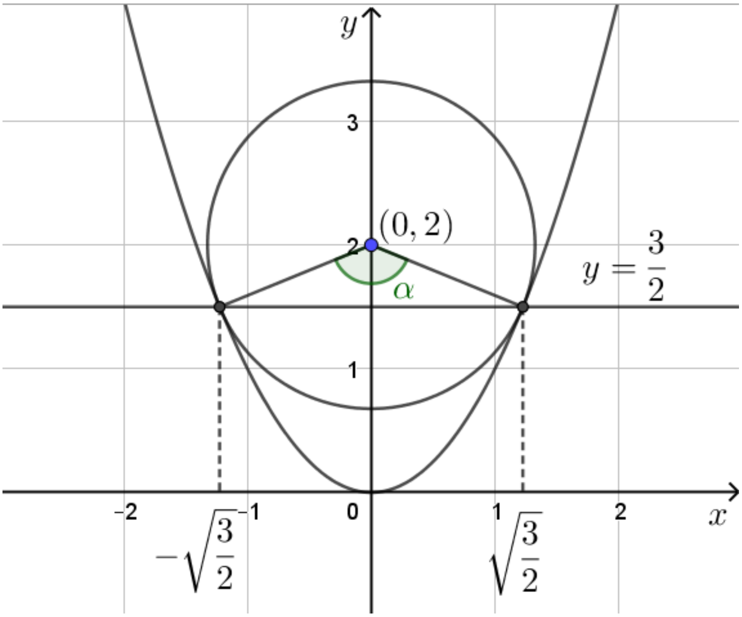
Lasketaan seuraavaksi ympyrään muodostuneen segmentin pinta-ala:

Segmentin pinta-ala saadaan, kun sektorin pinta-alasta A_2 vähennetään keskuskolmion pinta-ala A_3.

Selvitetään ensin sektorin keskuskulma α.

Koska ympyrän keskipisteen y-koordinaatti on 2, niin etäisyys keskipisteestä apusuoraan $y = \frac{3}{2}$ on $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Apusuora $y = \frac{3}{2}$, säde r ja y-akseli muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion avulla keskuskulma α:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3/2}}{1/2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3/2}}{1/2}\right) \quad \| \cdot 2$$

$$\alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3/2}}{1/2}\right)$$ 1p (yht. 9p)

Sektorin pinta-ala on tällöin

$$A_2 = \frac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot r^2$$

$$= \frac{2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3/2}}{1/2}\right)}{360°}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2$$

$$= 2{,}070\ldots$$ 1p (yht. 10p)

Keskuskolmion pinta-ala on tällöin

$$A_3 = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2\cdot\sin\left(2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3/2}}{1/2}\right)\right)$$

$$= 0{,}612\ldots$$ 1p (yht. 11p)

Ympyrän ja paraabelin väliin jäävän alueen pinta-alaksi saadaan:

$$A = A_1 - (A_2 - A_3)$$

$$= 2{,}449\ldots - (2{,}070\ldots - 0{,}612\ldots)$$

$$= 0{,}991\ldots$$

$$\approx 0{,}99$$ 1p (yht. 12p)

Vastaus: $0{,}99$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

7. Makeismatematiikkaa (12 p.)

1. Makeispussissa on 22 salmiakkimakeista ja 19 hedelmämakeista. Eeri ottaa pussista kolme makeista. Millä todennäköisyydellä kaikki kolme ovat hedelmämakeisia? (6 p.)

2. Kaikki Eerin ottamat makeiset olivat hedelmämakeisia, jolloin makeispussissa on jäljellä 22 salmiakkimakeista ja 16 hedelmämakeista. Kuura ottaa nyt pussista viisi makeista. Millä todennäköisyydellä näiden viiden makeisen joukossa on vähintään yksi salmiakkimakeinen ja vähintään yksi hedelmämakeinen? (6 p.)

Ratkaisu.

Oletetaan, että jokaisen makeisen ottotodennäköisyys on yhtä suuri.

1.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Yhteensä makeisia on pussissa $22 + 19 = 41$. 1p (yht. 1p) Todennäköisyys, että ensimmäinen on hedelmämakeinen on

$$\frac{19}{41}. \text{ 1p (yht. 2p)}$$

Kun Eeri on ottanut yhden hedelmämakeisen, pussissa on jäljellä 40 makeista, joista 18 on hedelmämakeisia. Todennäköisyys, että toinen makeinen on hedelmämakeinen, kun ensimmäinen oli myös hedelmämakeinen, on

$$\frac{18}{40}. \text{ 1p (yht. 3p)}$$

Kun Eeri on ottanut kaksi hedelmämakeista, pussissa on jäljellä 39 makeista, joista 17 on hedelmämakeisia. Todennäköisyys, että kolmas makeinen on hedelmämakeinen, kun kaksi ensimmäistä olivat myös hedelmämakeisia, on

$$\frac{17}{39}. \text{ 1p (yht. 4p)}$$

Todennäköisyys, että kaikki kolme ovat hedelmämakeisia on siis

$$\frac{19}{41} \cdot \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \text{ 1p (yht. 5p)} = \frac{969}{10660} \approx 0{,}091 \text{ 1p (yht. 6p)}$$

Vastaus: $9{,}1$ %.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Eeri ottaa makeisista kolmen makeisen osajoukon.

Hedelmämakeisia on 19. Kolmen hedelmämakeisen osajoukkoja on siis

$$\binom{19}{3} = 969. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$$

Yhteensä makeisia on pussissa $22 + 19 = 41$. 1p (yht. 3p) Kolmen makeisen osajoukkoja on siis

$$\binom{41}{3} = 10660. \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$$

Todennäköisyys, että kaikki kolme makeista ovat hedelmämakeisia on siis

$$\frac{969}{10660} \boxed{\text{1p (yht. 5p)}} \approx 0{,}091. \quad \boxed{\text{1p (yht. 6p)}}$$

Vastaus: $9{,}1$ %.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Eeri ottaa makeisista kolmen makeisen jonon.

Hedelmämakeisia on 19. Kolmen hedelmämakeisen jonoja on siis

$$19 \cdot 18 \cdot 17 = 5814. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$$

Yhteensä makeisia on pussissa $22 + 19 = 41$. 1p (yht. 3p) Kolmen makeisen jonoja on siis

$$41 \cdot 40 \cdot 39 = 63960. \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}}$$

Todennäköisyys, että kaikki kolme makeista ovat hedelmämakeisia on siis

$$\frac{5814}{63960} \boxed{\text{1p (yht. 5p)}} = \frac{969}{10660} \approx 0{,}091. \quad \boxed{\text{1p (yht. 6p)}}$$

Vastaus: $9{,}1$ %.

2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Merkitään tapahtumia:

A: “Kaikki Kuuran ottamat makeiset ovat hedelmämakeisia.”
B: “Kaikki Kuuran ottamat makeiset ovat salmiakkimakeisia.”

Tapahtuma “Kuuran makeisissa on vähintään yksi salmiakkimakeinen ja vähintään yksi hedelmämakeinen” on tapahtuman (A tai B) vastatapahtuma. 1p (yht. 7p)
Sen todennäköisyys on siis

$$1 - P(A \text{ tai } B) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - P(A) - P(B),$$ 1p (yht. 8p)

sillä tapahtumat A ja B ovat erilliset.

Lasketaan tapahtumien A ja B todennäköisyydet. Yhteensä makeisia on jäljellä $22 + 16 = 38$.

$$P(A) = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{38}{5}} = \frac{104}{11951}$$ 1p (yht. 9p)

$$P(B) = \frac{\binom{22}{5}}{\binom{38}{5}} = \frac{33}{629}$$ 1p (yht. 10p)

Todennäköisyys, että Kuura saa vähintään yhden hedelmämakeisen ja vähintään yhden salmiakkimakeisen on siis

$$1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{104}{11951} - \frac{33}{629} \text{ 1p (yht. 11p) } = \frac{660}{703} \approx 0{,}939$$ 1p (yht. 12p)

Vastaus: $93{,}9$ %.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Merkitään satunnaismuuttujalla X Kuuran saamien hedelmämakeisten määrää.
1p (yht. 7p)

Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X = k$.

Lasketaan niiden osajoukkojen, joissa hedelmämakeisten määrä on k, lukumäärä. Tällöin salmiakkimakeisia on $5 - k$. Hedelmämakeisen osajoukkoja on $\binom{16}{k}$

ja salmiakkimakeisten osajoukkoja on $\binom{22}{5-k}$. Tuloperiaatteella saadaan, että osajoukkojen, joissa hedelmämakeisten määrä on k, lukumäärä on

$$\binom{16}{k}\cdot\binom{22}{5-k}.$$ 1p (yht. 8p)

Todennäköisyys, että Kuura saa hedelmämakeisia k kappaletta on siis

$$P(X=k)=\frac{\binom{16}{k}\cdot\binom{22}{5-k}}{\binom{38}{5}}.$$ 1p (yht. 9p)

Tapahtuma “Kuuran makeisissa on vähintään yksi salmiakkimakeinen ja vähintään yksi hedelmämakeinen” on siis tapahtuma $1\leq X\leq 4$. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(1\leq X\leq 4)&=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\frac{\binom{16}{1}\cdot\binom{22}{4}}{\binom{38}{5}}+\frac{\binom{16}{2}\cdot\binom{22}{3}}{\binom{38}{5}}+\frac{\binom{16}{3}\cdot\binom{22}{2}}{\binom{38}{5}}+\frac{\binom{16}{4}\cdot\binom{22}{1}}{\binom{38}{5}}\quad\text{2p (yht. 11p)}\\&=\frac{660}{703}\\&\approx 0{,}939\quad\text{1p (yht. 12p)}\end{aligned}$$

Vastaus: $93{,}9$ %.

8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio (12 p.)

Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, joka ei ole derivoituva kohdassa $x=1$. Perustele erotusosamäärän

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

avulla, miksi funktio ei ole derivoituva kohdassa $x=1$. Perustele lisäksi funktion jatkuvuus.

Ratkaisu.

Tehtävään on useita ratkaisuja. Tämän takia teimme kolme esimerkkiratkaisua!

Huomaa! Tarkempi pisteohje on viimeisen esimerkkiratkaisun lopussa.

Esimerkkifunktio 1

Funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{kun } x<1 \\ 1, & \text{kun } x\geq 1 \end{cases}$$

on jatkuva, mutta ei ole derivoituva kohdassa $x=1$. 2p (yht. 2p)

Funktioon voi päätyä seuraavasti: Paloittain määriteltyinä funktioista saa helposti ei-derivoituvia. Funktio täytyy jakaa juurikin kohdasta $x=1$, koska haluamme ettei funktio ole siinä kohdassa derivoituva. Halutaan valita lausekkeet siten, että ne saavat saman arvon kohdassa $x=1$, jotta funktiosta tulisi jatkuva. Lisäksi halutaan valita lausekkeet siten, että niillä on eri derivaatta kohdassa $x=1$, jotta funktio ei olisi derivoituva tässä kohdassa.

Valitaan toiseksi lausekkeeksi esimerkiksi x. Tämän arvo kohdassa $x=1$ on 1 ja derivaatta on 1. Valitaan toiseksi lausekkeeksi esimerkiksi vakiofunktio, jonka derivaatta on siis nolla. Koska senkin tulee saada kohdassa $x=1$ arvo 1, valitaan se vakioksi 1.

Osoitetaan ensin funktion jatkuvuus.

Kun $x<1$, on olemassa väli, johon x kuuluu siten, että funktio on tällä välillä määritelty lausekkeella x. Tämä on polynomifunktiona tunnetusti jatkuva eli funktio f on jatkuva kaikilla $x<1$.

Vastaavasti, kun $x>1$, on olemassa väli, johon x kuuluu siten, että funktio on tällä välillä määritelty lausekkeella 1. Tämä on vakiofunktiona tunnetusti jatkuva eli funktio f on jatkuva kaikilla $x>1$.

Osoitetaan vielä, että funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$.

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$, mikäli

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1+} f(x) = f(1).$$

Lasketaan raja-arvot ja funktion arvo.

Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} x = 1.$$

Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} 1 = 1.$$

Funktion arvo on

$$f(1) = 1.$$

Funktion raja-arvo on siis funktion arvo kohdassa $x = 1$. Funktio on siis jatkuva myös kohdassa $x = 1$. Funktio f on siis jatkuva. $\boxed{\text{5p (yht. 7p)}}$

Osoitetaan derivaatan määritelmän avulla, ettei funktio ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$, mikäli erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x = 1$ on olemassa.

Lasketaan erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1-} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to1-} 1 = 1$$

Lasketaan erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1+} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to1+} \frac{0}{x - 1} = \lim_{x\to1+} 0 = 0$$

Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja-arvo eivät ole yhtä suuria kohdassa $x = 1$. Erotusosamäärän raja-arvoa ei siis ole olemassa kohdassa $x = 1$. Funktio ei siis ole derivoituva kohdassa $x = 1$. $\boxed{\text{5p (yht. 12p)}}$

$\boxed{\text{Esimerkkifunktio 2}}$

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

on jatkuva, mutta ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. 2p (yht. 2p)

Funktioon voi päätyä esimerkiksi seuraavasti: Muistetaan, että funktio $|x|$ on jatkuva, mutta ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Haluttiin kuitenkin, ettei funktio ole derivoituva kohdassa $x = 1$. "Siirretään" siis funktiota yhden yksikön verran oikealle korvaamalla x lausekkeella $x - 1$.

Funktioon voi myös päätyä muistamalla, että itseisarvo peilaa funktion kuvaajan negatiiviset arvot x-akselin suhteen. Tällöin, jos kohdassa $x = 1$ jatkuva funktio saa arvon nolla, funktion toispuoleiset erotusosamäärän raja-arvot ovat toistensa vastaluvut, kun funktiosta otetaan itseisarvo. Valitaan siis jokin funktio, joka saa kohdassa $x = 1$ arvon nolla, mutta sen derivaatta ei ole nolla, esimerkiksi funktio $x - 1$, ja otetaan tästä itseisarvo.

Funktio $x - 1$ on polynomifunktiona tunnetusti jatkuva. Jatkuvan funktion itseisarvo on jatkuva. Siis funktio $f(x) = |x - 1|$ on jatkuva. 5p (yht. 7p)

Osoitetaan derivaatan määritelmän avulla, ettei funktio ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$, mikäli erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x = 1$ on olemassa.

Erotusosamäärää varten lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 1$.

$$f(1) = |1-1| = |0| = 0$$

Lasketaan erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-} -\frac{x-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-} -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+}\frac{x-1-0}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1+} 1\\ &= 1\end{aligned}$$

Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja-arvo eivät ole yhtä suuret kohdassa $x = 1$. Erotusosamäärän raja-arvoa ei siis ole olemassa kohdassa $x = 1$. Funktio ei siis ole derivoituva kohdassa $x = 1$. 5p (yht. 12p)

Esimerkkifunktio 3

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

on jatkuva, mutta ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. 2p (yht. 2p)

Funktioon voi päätyä seuraavasti: Muistetaan, että funktio $\sqrt{x}$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Haluttiin kuitenkin, ettei funktio ole derivoituva kohdassa $x = 1$. “Siirretään” siis funktiota yhden yksikön verran oikealle korvaamalla x lausekkeella $x-1$.

Funktio $\sqrt{x-1}$ on kuitenkin määritelty vain kun $x \geq 1$, joten valitaan funktiolle f toinen lauseke välille $]-\infty, 1[$. Tämän lausekkeen tulisi saada kohdassa $x = 1$ sama arvo kuin lausekkeen $\sqrt{x-1}$, jotta funktio olisi jatkuva. Lausekkeen $\sqrt{x-1}$ arvo kohdassa $x = 1$ on $\sqrt{1-1} = 0$, joten valitaan toiseksi lausekkeeksi esimerkiksi vakiofunktio 0.

Osoitetaan ensin funktion jatkuvuus.

Kun $x < 1$, on olemassa väli, johon x kuuluu siten, että funktio on tällä välillä määritelty lausekkeella 0. Tämä on vakiofunktiona tunnetusti jatkuva eli funktio f on jatkuva kaikilla $x < 1$.

Vastaavasti, kun $x > 1$, on olemassa väli, johon x kuuluu siten, että funktio on tällä välillä määritelty lausekkeella $\sqrt{x-1}$. Tämä on jatkuvan funktion neliöjuurena tunnetusti jatkuva eli funktio f on jatkuva kaikilla $x > 1$.

Osoitetaan vielä, että funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$.

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$, mikäli

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$

Lasketaan raja-arvot ja funktion arvo.

Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 0 = 0.$$

Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0.$$

Funktion arvo on

$$f(1) = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0.$$

Funktion raja-arvo on siis funktion arvo kohdassa $x = 1$. Funktio on siis jatkuva myös kohdassa $x = 1$. Funktio f on siis jatkuva. 5p (yht. 7p)

Osoitetaan derivaatan määritelmän avulla, ettei funktio ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$, mikäli erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x = 1$ on olemassa.

Lasketaan erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

Osoittajan raja-arvo on

$$\lim_{x\to 1+} 1 = 1.$$

Nimittäjän raja-arvo on

$$\lim_{x\to 1+} (\sqrt{x-1}) = \sqrt{1-1} = 0.$$

Osoittaja lähestyy arvoa 1 ja nimittäjä nollaa. Osamäärällä ei siis ole raja-arvoa. Funktio ei siis ole derivoituva kohdassa $x = 1$. 5p (yht. 12p)

Pisteohje:

- Oikean funktion löytäminen = 2p
- Jatkuvuuden todistaminen = 5p. Tarkemmin:
  - Jatkuvuus muualla kuin kohdassa $x = 1$ = 1p
  - Vasemmanpuoleinen raja-arvo = 1p
  - Oikeanpuoleinen raja-arvo = 1p
  - Funktion arvosta $f(1)$ = 1p
  - Kolme edellä mainittua ovat yhtä suuria = 1p
- Derivoituvuuden todistaminen = 5p. Tarkemmin:
  - Vasemmanpuoleinen erotusosamäärän raja-arvo = 2p
  - Oikeanpuoleinen erotusosamäärän raja-arvo = 2p
  - Toispuoleiset raja-arvot eivät ole keskenään yhtä suuria tai että toinen niistä ei ole edes olemassa = 1p,

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

9. Ympyrä ja numeeriset menetelmät (12 p.)

Tarkastellaan yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevaa osaa, eli ehtojen $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ määräämää aluetta B. Arvioidaan alueen B pinta-alaa puolisuunnikassäännöllä ja keskipistesäännöllä. Keskipistesääntö tarkoittaa suorakaidesääntöä, jossa suorakaiteen korkeus määräytyy osavälin keskipisteen mukaan.

Valitse kolme seuraavista väitteistä, ja selvitä, ovatko ne tosia vai epätosia:

- Väite 1. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 2. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 3. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 4. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.

Muista myös perustella vastauksesi.

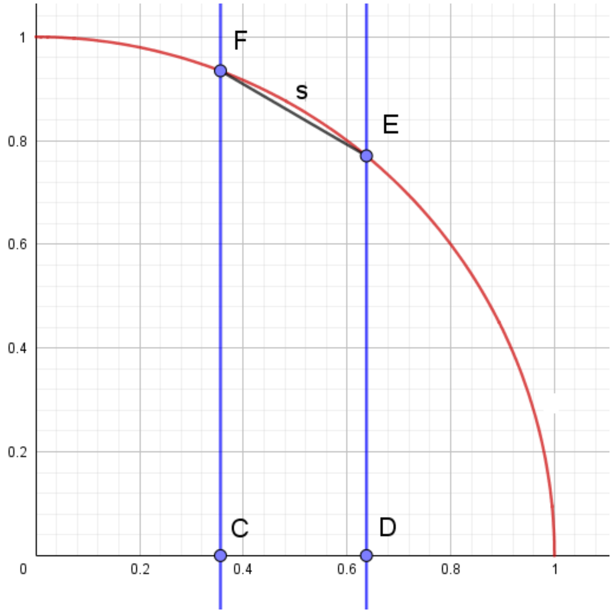
Ratkaisu.

Väite 2 oli hankalin käsiteltävä, ja luultavasti oli hyvä strategia jättää se välistä ja käsitellä väitteet 1, 3 ja 4. Teimme esimerkin vuoksi kaksi ratkaisuvaihtoehtoa, joista toisessa on käsitelty myös väite 2.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Väitteet 3 ja 4

Piirretään tilannekuva mielivaltaisella osavälillä CD.



Merkitään puolisuunnikkaan $CDEF$ pinta-alaa A_{CDEF}. Kyseinen pinta-ala on puolisuunnikassäännön mukainen arvio todelliselle pinta-alalle $A_{\text{todellinen}}$, jota rajoittavat murtoviiva $FCDE$ ja kaari s. 2p (yht. 2p)

Kaari s on ylöspäin kaareva, joten janan EF yläpuolelle muodostuu alue, jota rajoittavat jana EF ja kaari s. Merkitään kyseisen alueen pinta-alaa A_{EFs}.

$$A_{\text{todellinen}} = A_{CDEF} + A_{EFs},$$

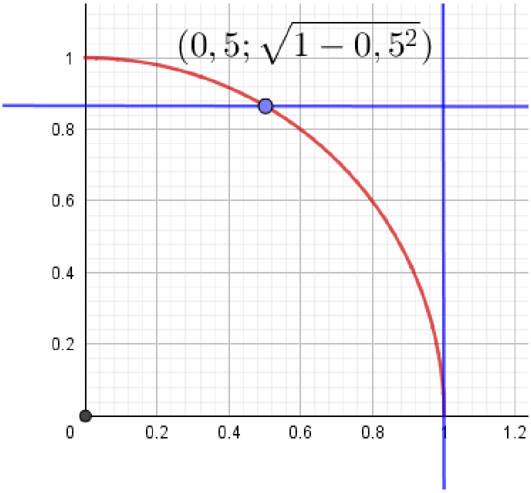
joten

$$A_{\text{todellinen}} > A_{CDEF}.$$ 2p (yht. 4p)

Koska edellä selitetty pätee mille tahansa osavälille CD, on myös puolisuunniassäännöllä saatu summa pienempi kuin yksikköympyrän ensimmäisen neljänneksen todellinen pinta-ala. 2p (yht. 6p) Siten väite 3 on epätosi 1p (yht. 7p) ja väite 4 on tosi. 1p (yht. 8p)

Väite 1

Osoitetaan väite todeksi tutkimalla esimerkkiä, jossa käytetään vain yhtä, koko neljännesympyrän kattavaa osaväliä $[0, 1]$.



Suorakaiteen korkeus on $\sqrt{1-0{,}5^2}$, 1p (yht. 9p) joten sen pinta-ala on

$$A_{\text{arvio}} = 1 \cdot \sqrt{1-0{,}5^2} = 0{,}866\ldots$$ 1p (yht. 10p)

Neljännesympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{todellinen}} = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^1 = 0{,}785\ldots \text{ 1p (yht. 11p) } < A_{\text{arvio}}$$

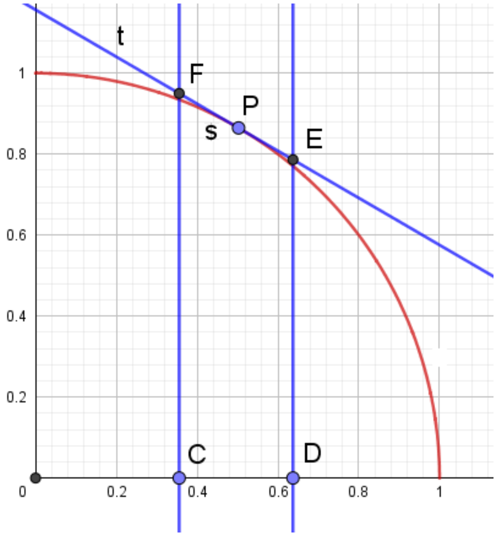
On siis löydetty esimerkkitapaus, jossa arvioitu pinta-ala on suurempi kuin todellinen pinta-ala, joten väite 1 on tosi. 1p (yht. 12p)

Nyt on saatu kolme väitettä perusteltua joko todeksi tai epätodeksi. Tämä riitti tehtävän ratkaisuksi.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Väitteet 1 ja 2

Piirretään tilannekuva mielivaltaisella osavälillä CD.



Piste P sijaitsee ympyrän kaarella, x-akselin osavälin CD keskikohdassa. Pisteen P kautta on piirretty tangentti t. Tangentille on merkitty pisteet E ja F, jotka sijaitsevat samoissa x-akselin kohdissa kuin osavälin päätepisteet D ja C.

Merkitään puolisuunnikkaan $CDEF$ pinta-alaa A_{CDEF}. Se on yhtä suuri kuin keskipistesäännön mukaisen suorakulmion pinta-ala. Tämä perustellaan myöhemmin. Merkitään välille CD rajoittuvan neljännesympyrän osan pinta-alaa $A_{\text{todellinen}}$. Kaari s on ylöspäin kupera, joten janan EF alapuolelle muodostuu pisteen P molemmin puolin kaksi aluetta, joita rajoittavat jana EF ja kaari s. Merkitään kyseisten alueiden yhteenlaskettua pinta-alaa A_{EFs}.

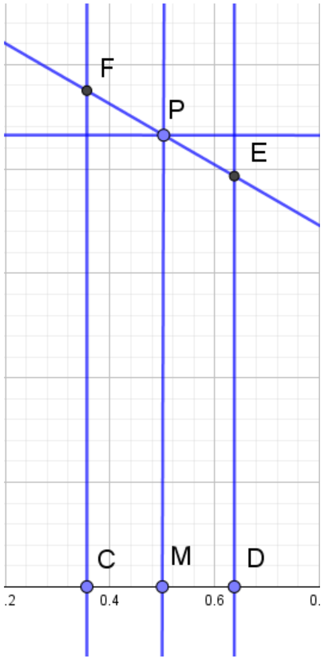
Koska

$$A_{CDEF} = A_{\text{todellinen}} + A_{EFs},$$

niin

$$A_{CDEF} > A_{\text{todellinen}}.$$ 2p (yht. 2p)

Osoitetaan, että A_{CDEF} on yhtä suuri kuin keskipistesäännön mukaisen suorakaiteen pinta-ala $A_{\text{suorakaide}}$.



Janan keskipisteen koordinaatit ovat keskiarvoja sen päätepisteiden koordinaateista. Siten pisteen P y-koordinaatti on

$$MP = \frac{CF + DE}{2}.$$

MP-korkuisen suorakaiteen pinta-ala on

$$A_{\text{suorakaide}} = CD \cdot MP = CD \cdot \frac{CF + DE}{2}.$$

Edelleen puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_{CDEF} = CD \cdot \frac{CF + DE}{2} = A_{\text{suorakaide}}.$$

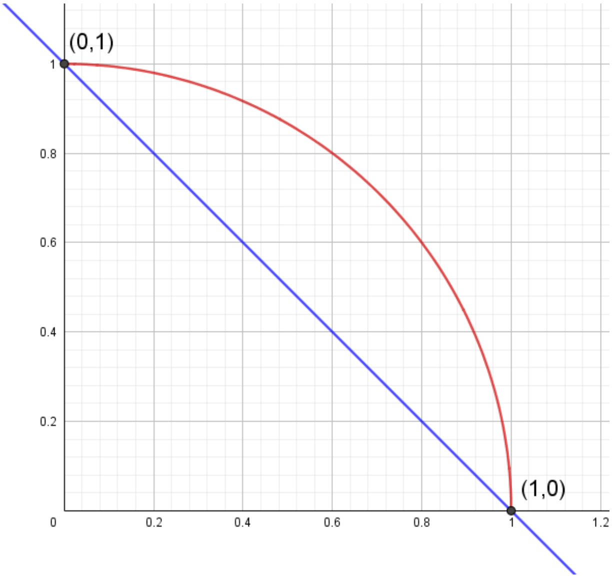
Näin ollen

$$A_{\text{suorakaide}} > A_{\text{todellinen}}.$$ 2p (yht. 4p)

Koska edellä selitetty pätee mille tahansa osavälille CD, on myös keskipistesäännöllä saatu summa suurempi kuin yksikköympyrän ensimmäisen neljänneksen todellinen pinta-ala. 2p (yht. 6p) Siten väite 1 on tosi 1p (yht. 7p) ja väite 2 on epätosi. 1p (yht. 8p)

Väite 4

Osoitetaan väite todeksi tutkimalla esimerkkiä, jossa käytetään vain yhtä, koko neljännesympyrän kattavaa osaväliä $[0, 1]$.



Puolisuunnikas on tässä erikoistapauksessa kolmio, jonka kanta ja korkeus ovat 1, 1p (yht. 9p) joten sen pinta-ala on

$$A_{\text{arvio}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5. \quad \text{1p (yht. 10p)}$$

Neljännesympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{todellinen}} = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^1 = 0{,}785\ldots \quad \text{1p (yht. 11p)} \quad > A_{\text{arvio}}.$$

On siis löydetty esimerkkitapaus, jossa arvioitu pinta-ala on pienempi kuin todellinen pinta-ala, joten väite 4 on tosi. 1p (yht. 12p)

Nyt on saatu kolme väitettä perusteltua joko todeksi tai epätodeksi. Tämä riitti tehtävän ratkaisuksi.

Perusteluja voi toki yhdistellä muillakin tavoilla. Kaikkia väitteitä ei kuitenkaan kannata tutkia yleisessä tapauksessa, koska väitteet 1 ja 4 on mahdollista perustella tosiksi esimerkin avulla, mikä on helpompaa.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

10. Veistos (12 p.)

Aineisto:

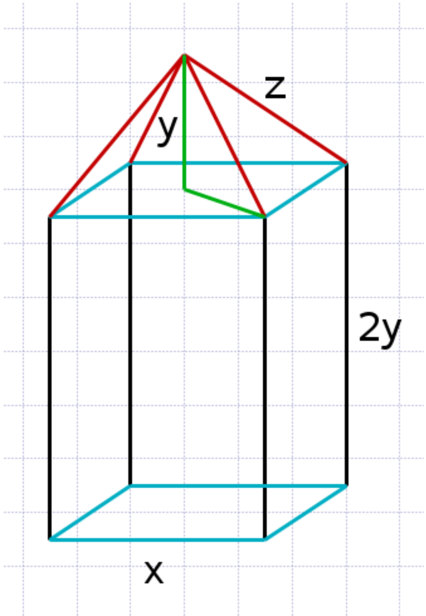
10. A Kuva: Veistos

Puistossa sijaitseva veistos on rakennettu käyttäen rautatankoja geometristen muotojen särminä kuvan 10.A mukaisesti. Veistoksen yläosa on pyramidi ja alaosa on suorakulmainen särmiö, jonka pohja on neliön muotoinen. Tiedekeskuksen pihalle on tarkoitus rakentaa vaakasuoralle alustalle samanmallinen veistos, jossa särmiön kehikkoon kuuluu myös pohjaneliön sivutangot (kuvassa pohjaneliö ei ole näkyvissä). Uuden rakennelman pitää toteuttaa seuraavat ehdot: rakennelman sisätilavuus on 21 kuutiometriä ja yläosan (pyramidin) korkeus on puolet alaosan korkeudesta. Mikä on tähän rakennelmaan tarvittavan rautatangon pienin mahdollinen kokonaispituus L?

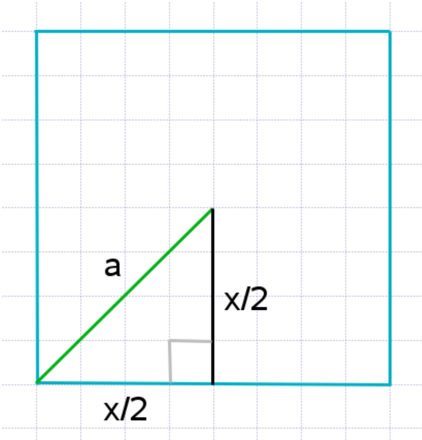
Tehtävässä oletetaan, että rautatangon koko pituus L voidaan käyttää rakennelmaan. Liitoksiin käytettävää materiaalia ei tarvitse ottaa huomioon. Anna vastaus metreinä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu.

Piirretään veistoksesta mallikuva. Merkitään neliön sivun pituutta x:llä, suorakulmaisen särmiön pystysärmän pituutta $2y$:llä (jolloin pyramidin korkeus on y) ja pyramidin viiston särmän pituutta z:lla.



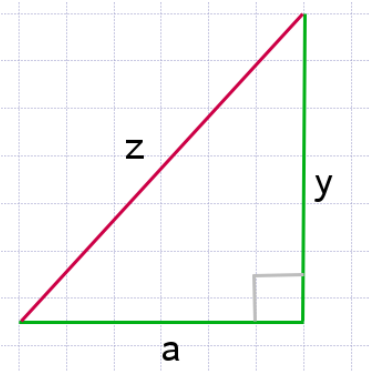
Piirretään pyramidin pohja ja lasketaan etäisyys pyramidin pohjan kulmasta pyramidin pohjan keskelle.



Pythagoraan lauseella:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
a^2 &= \frac{x^2}{2} \\
a &= \underset{(-)}{+} \frac{x}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Piirretään sitten kolmio, missä on pyramidin korkeusjana, pyramidin viisto särmä sekä yllä olevan kuvan jana, jonka pituus on a.



Pythagoraan lauseella:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= a^2 + y^2 \\
z^2 &= \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 \\
z^2 &= \frac{x^2}{2} + y^2 \\
z &= \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{x^2}{2} + y^2} \quad \text{1p (yht. 1p)}
\end{aligned}
$$

Pohjaneliön pinta-ala on $A = x^2$. Suorakulmaisen särmiön tilavuus on siis

$$V_1 = A \cdot 2y = x^2 \cdot 2y = 2x^2y.$$

Pyramidin pohjan pinta-ala on myös $A = x^2$ ja pyramidin korkeus on y, joten pyramidin (kartio) tilavuus on

$$V_2 = \frac{1}{3}Ay = \frac{1}{3}x^2y.$$

Veistoksen kokonaistilavuus on siis

$$V = V_1 + V_2 = 2x^2y + \frac{1}{3}x^2y = \frac{7}{3}x^2y.$$

Tehtävänannon mukaan tilavuus on 21 kuutiometriä, eli

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{3}x^2y &= 21 \quad \text{2p (yht. 3p)} \\
y &= \frac{63}{7x^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Veistoksessa on kahdeksan särmää, joiden pituus on x, neljä särmää, joiden pituus on $2y$ ja neljä särmää, joiden pituus on z. Rautatangon kokonaispituus on siis

$$
\begin{aligned}
L &= 8x + 4 \cdot 2y + 4z \\
&= 8x + 8y + 4 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2} + y^2} \quad \text{2p (yht. 5p)}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan tähän (1), jolloin saadaan rautatangon kokonaispituus x:n funktiona.

$$L(x) = 8x + 8 \cdot \frac{63}{7x^2} + 4 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2} + \left(\frac{63}{7x^2}\right)^2}$$ 2p (yht. 7p)

Derivoidaan $L(x)$.

$$L'(x) = \frac{-4 \cdot \sqrt{2 \cdot (x^6 + 162)}}{x^3} + \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3}{\sqrt{x^6 + 162}} - \frac{144}{x^3} + 8$$ 1p (yht. 8p)

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat, kun $x > 0$.

$$L'(x) = 0$$

$$\frac{-4 \cdot \sqrt{2 \cdot (x^6 + 162)}}{x^3} + \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3}{\sqrt{x^6 + 162}} - \frac{144}{x^3} + 8 = 0$$

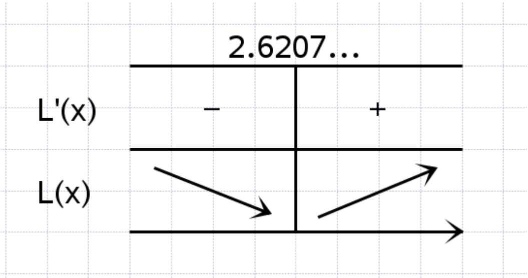
Laskinohjelman avulla saadaan

$$x = 2{,}6207\ldots$$ 1p (yht. 9p)

Tehdään kulkukaavio. Lasketaan derivaatan arvo kohdissa $x = 2$ ja $x = 3$.

$$L'(2) = -16{,}1146\ldots < 0$$

$$L'(3) = 4{,}0880\ldots > 0$$



Näin ollen kyseessä on minimikohta. 1p (yht. 10p) Lasketaan minimikohtaa vastaava rautatangon kokonaispituus.

$$L(2{,}6207\ldots) = 40{,}5274\ldots \approx 41\,\mathrm{m}.$$ 2p (yht. 12p)

Vastaus: Rautatangon pienin mahdollinen kokonaispituus on $41\,\mathrm{m}$.

Ratkaisussa (ja Hyvän vastauksen piirteissä (luettu 35.3.2022) on oletettu pyramidin olevan suora. Tehtävänannossa ei kuitenkaan sanota, etteikö pyramidi voisi olla myös vino. Pyramidin vinous vaikuttaa sen viistojen särmien (ratkaisussa z) pituuden määrittämiseen. Neliöpohjaisen pyramidin viistojen särmien pituus on kuitenkin mahdollisimman pieni silloin, kun pyramidi on suora, joten pyramidin vinous vain heikentäisi lopputulosta.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

11. Mitkä vektorit? (12 p.)

1. Tason vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = 2 \\ 2\,\bar{a}\cdot\bar{a} + 3\,\bar{b}\cdot\bar{b} = 5. \end{cases}$$

   Määritä vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pituudet. (5 p.)

2. Osatehtävän 1 vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ toteuttavat lisäksi yhtälöparin

$$\begin{cases} \bar{a}\cdot\bar{b} = \dfrac{\sqrt{11}}{10} \\ \bar{b}\cdot(\sqrt{3}\,\bar{i} - \bar{j}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

   Merkitään vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välistä kulmaa symbolilla φ ja vektorien $\sqrt{3}\,\bar{i} - \bar{j}$ ja $\bar{b}$ välistä kulmaa symbolilla θ. Määritä kulmien φ ja θ suuruudet. (5 p.)

3. Määritä kaikki mahdolliset vektorit $\bar{a}$, jotka toteuttavat osatehtävien 1 ja 2 ehdot, kun $\bar{b} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$. (2 p.)

Ratkaisu.

1. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) &= 2 \\ \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot(-\bar{b}) + \bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{b}\cdot(-\bar{b}) &= 2 \\ \bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{b}\cdot\bar{b} &= 2. \end{aligned}$$

   Vektorin pistetulo itsensä kanssa on vektorin pituus toiseen. Saadaan

$$|\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2 = 2 \quad \text{2p (yht. 2p)} \tag{1}$$

   Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 2\bar{a}\cdot\bar{a} + 3\bar{b}\cdot\bar{b} &= 5 \\ 2|\bar{a}|^2 + 3|\bar{b}|^2 &= 5. \quad \text{1p (yht. 3p)} \end{aligned} \tag{2}$$

Ratkaistaan yhtälöiden (1) ja (2) muodostama yhtälöpari laskinohjelmalla, kun $|\overline{a}| \geq 0$ ja $|\overline{b}| \geq 0$. Saadaan

$$|\overline{a}| = \frac{\sqrt{55}}{5} \quad \text{1p (yht. 4p)}$$

$$|\overline{b}| = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{1p (yht. 5p)}$$

Vastaus: Vektorin $\overline{a}$ pituus on $\dfrac{\sqrt{55}}{5}$ ja vektorin $\overline{b}$ pituus on $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vastauksen voi antaa myös muodossa: Vektorin $\overline{a}$ pituus on $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$ ja vektorin $\overline{b}$ pituus on $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulolle pätee

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \varphi.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä ja vektorien pituuksista saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot \overline{b} &= \frac{\sqrt{11}}{10} \\
|\overline{a}||\overline{b}| \cos \varphi &= \frac{\sqrt{11}}{10} \\
\frac{\sqrt{55}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \cos \varphi &= \frac{\sqrt{11}}{10} \quad \text{1p (yht. 6p)} \\
\cos \varphi &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vektorien välinen kulma on määritelty olevan välillä $[0°, 180°]$. Saadaan siis

$$\varphi = 60°. \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Ratkaistaan seuraavaksi kulma θ. Lasketaan ensin vektorin $\sqrt{3}\overline{i} - \overline{j}$ pituus.

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{3}\bar{i}-\bar{j}| &= \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2 \quad \boxed{\text{1p (yht. 8p)}}
\end{aligned}
$$

Yhtälöparin alemmasta yhtälöstä saadaan

$$
\begin{aligned}
\bar{b}\cdot(\sqrt{3}\bar{i}-\bar{j}) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\
|\bar{b}||\sqrt{3}\bar{i}-\bar{j}|\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \boxed{\text{1p (yht. 9p)}} \\
\cos\theta &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vektorien välinen kulma on määritelty olevan välillä $[0°, 180°]$. Saadaan siis

$$\theta = 60°. \quad \boxed{\text{1p (yht. 10p)}}$$

Vastaus: Kulmien φ ja θ suuruudet ovat $\varphi = \theta = 60°$.

3. Merkitään vektoria $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Yhtälöstä $\bar{a}\cdot\bar{b} = \dfrac{\sqrt{11}}{10}$ saadaan

$$
\begin{aligned}
(x\bar{i}+y\bar{j})\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}\right) &= \frac{\sqrt{11}}{10} \\
-\frac{1}{\sqrt{5}}y &= \frac{\sqrt{11}}{10} \\
y &= -\frac{\sqrt{55}}{10}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 11p)}}
\end{aligned}
$$

Koska vektorin $\overline{a}$ pituus on $\dfrac{\sqrt{55}}{5}$ saadaan

$$x^2 + y^2 = |\overline{a}|^2$$

$$x^2 + \left(-\frac{\sqrt{55}}{10}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{55}}{5}\right)^2$$

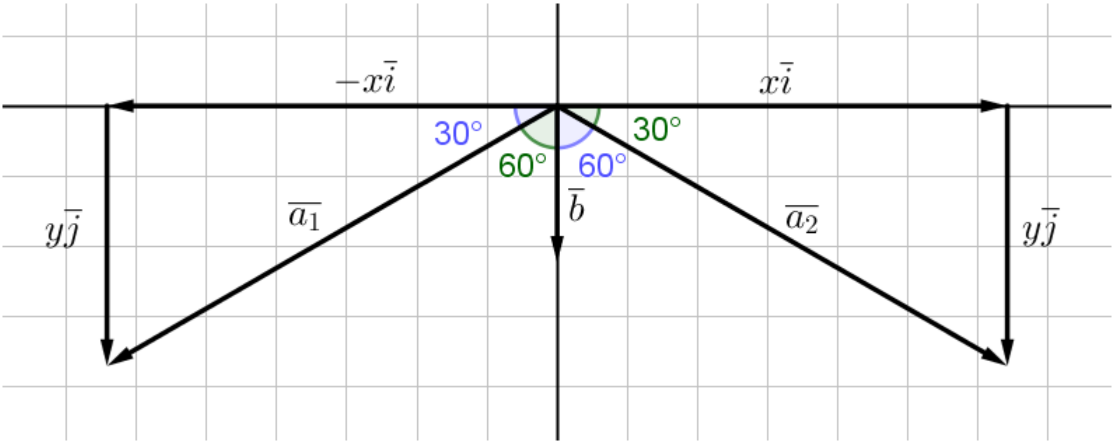
$$x = \pm\frac{\sqrt{165}}{10}.$$

Vastaus: $\overline{a} = \dfrac{\sqrt{165}}{10}\overline{i} - \dfrac{\sqrt{55}}{10}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -\dfrac{\sqrt{165}}{10}\overline{i} - \dfrac{\sqrt{55}}{10}\overline{j}$ 1p (yht. 12p)

Vastauksen voi antaa myös muodossa $\overline{a} = \dfrac{\sqrt{33}}{2\sqrt{5}}\overline{i} - \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -\dfrac{\sqrt{33}}{2\sqrt{5}}\overline{i} - \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\overline{j}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Koska vektorin $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $60°$, vektorin $\overline{a}$ suunnalle on kaksi vaihtoehtoa, jotka on piirretty kuvaan vektoreina $\overline{a}_1$ ja $\overline{a}_2$. Vektoreiden pituuksille pätee $|\overline{a}_1| = |\overline{a}| = |\overline{a}_2|$.



Saadaan

$$\sin 30° = \frac{|y\overline{j}|}{|\overline{a}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-y}{\frac{\sqrt{55}}{5}}$$

$$y = -\frac{\sqrt{55}}{10}.$$ 1p (yht. 11p)

Saadaan myös

$$\cos 30° = \frac{|x\overline{i}|}{|\overline{a}|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\frac{\sqrt{55}}{5}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{165}}{10}.$$

Vastaus: Mahdolliset vektorit ovat $\overline{a} = \frac{\sqrt{165}}{10}\overline{i} - \frac{\sqrt{55}}{10}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -\frac{\sqrt{165}}{10}\overline{i} - \frac{\sqrt{55}}{10}\overline{j}$.

1p (yht. 12p)

Vastauksen voi antaa myös muodossa $\overline{a} = \frac{\sqrt{33}}{2\sqrt{5}}\overline{i} - \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -\frac{\sqrt{33}}{2\sqrt{5}}\overline{i} - \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\overline{j}$.

12. Pascalin kolmio (12 p.)

Aineisto:

12. A [Animaatio: Pascalin kolmio]

Pascalin kolmion sisällä jokainen luku saadaan laskemalla yhteen kaksi sen yläpuolella olevaa lukua (ks. animaatio 12.A). Jokaisen rivin reunimmaiset luvut ovat ykkösiä.

Rivillä n kohdassa k olevalle luvulle käytetään merkintää $p_{n,k}$. Pascalin kolmion luvut määritellään rekursiivisesti asettamalla $p_{n,0} = p_{n,n} = 1$ kaikilla $n \geq 0$ ja

$$p_{n,k} = p_{n-1,k} + p_{n-1,k-1},$$

kun $n \geq 2$ ja $0 < k < n$. Huomaa, että indeksien n ja k numerointi alkaa nollasta.

Osoita induktiolla, että Pascalin kolmion rivillä n olevien lukujen summa on 2^n, eli

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 2^n.$$

Ratkaisu.

Oletukset: Olkoon

$$p_{n,0} = p_{n,n} = 1$$

kaikilla $n \geq 0$ ja olkoon

$$p_{n,k} = p_{n-1,k} + p_{n-1,k-1},$$

kun $n \geq 2$ ja $0 < k < n$.

Väite:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 2^n.$$

Todistus:

Alkuaskel: Tarkistetaan ensin, että väite on tosi tapauksissa (eli riveillä) $n = 0$ ja $n = 1$. Huomaa! Nämä molemmat tapaukset täytyy tarkastaa alkuaskeleessa, koska tehtävän rekusiokaava pätee vain, kun $n \geq 2$.

$$\sum_{k=0}^{0} p_{0,k} = p_{0,0} = 1 = 2^0. \qquad \text{Ok!}$$

$$\sum_{k=0}^{1} p_{1,k} = p_{1,0} + p_{1,1} = 1 + 1 = 2 = 2^1. \qquad \text{Ok!}$$

2p (yht. 2p)

Tehdään seuraavaksi induktio-oletus, että väite pätee tapauksessa n ja osoitetaan, että tästä seuraa, että väite pätee myös tapauksessa $n+1$.

Induktio-oletus:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 2^n.$$

2p (yht. 4p)

Induktioväite:

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_{n+1,k} = 2^{n+1}.$$

2p (yht. 6p)

Induktioaskel:

Tarkastellaan tapausta eli riviä $n+1$. Aloitetaan erottelemalla summalausekkeesta ensimmäinen ja viimeinen termi.

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_{n+1,k} = \sum_{k=0}^{0} p_{n+1,k} + \sum_{k=1}^{n} p_{n+1,k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} p_{n+1,k}$$

$$= p_{n+1,0} + \sum_{k=1}^{n} p_{n+1,k} + p_{n+1,n+1}$$ 1p (yht. 7p)

Ensimmäinen ja viimeinen termi ovat kumpikin ykkösiä.

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n+1,k} + 1$$

Annetun rekursiokaavan nojalla $p_{n+1,k} = p_{n,k} + p_{n,k-1}$.

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (p_{n,k} + p_{n,k-1}) + 1$$ 1p (yht. 8p)

Erotellaan summa kahdeksi summaksi.

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k-1} + 1$$

Pidetään jälkimmäinen summa samana, mutta muutetaan summalausekkeen indeksointia siten, että termi saadaan muotoon $p_{n,k}$.

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k} + 1$$

Sijoitetaan ensimmäisen ykkösen tilalle $1 = p_{n,0}$ ja viimeisen ykkösen tilalle $1 = p_{n,n}$.

$$= p_{n,0} + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k} + p_{n,n}$$ 1p (yht. 9p)

Yhdistetään ensimmäinen termi ja ensimmäinen summa keskenään, sekä toinen summa ja viimeinen termi keskenään.

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$$ 1p (yht. 10p)

$$= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$$

Nyt lausekkeessa oleva summa on induktio-oletuksen nojalla 2^n.

$$= 2 \cdot 2^n$$ 1p (yht. 11p)

$$= 2^{n+1}$$

Näin ollen väite on induktion nojalla tosi. 1p (yht. 12p) □

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa!

13. Korkea-asteinen polynomi (12 p.)

Tarkastellaan polynomia

$$P(x) = x^{2n+1} - (x-n)(x-n+1)\cdots(x+n-1)(x+n),$$

missä $n > 0$ on kokonaisluku ja x on reaaliluku.
Osoita, että polynomilla $P(x)$

1. on ainakin yksi nollakohta (4 p.)
2. on korkeintaan $2n-1$ nollakohtaa (4 p.)
3. ei ole nollakohtaa $x_0 \geq n$. (4 p.)

Ratkaisu.

Tarkasteltava polynomi on

$$P(x) = x^{2n+1} - (x-n)(x-n+1)\ldots(x+n-1)(x+n).$$

1. Polynomin $P(x)$ jälkimmäisessä termissä on $2n+1$ kappaletta muotoa $(x+k)$ olevia tekijöitä, joissa $k \in [-n, n]$. Yksi tekijöistä on siis $x + 0 = x$. 2p (yht. 2p) Polynomin $P(x)$ jälkimmäinen termi voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$-(x-n)(x-n+1)\ldots(x+n-1)(x+n) = -x \cdot Q(x),$$

missä $Q(x)$ on polynomi. Näin ollen

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2n+1} - x \cdot Q(x) \\ &= x \cdot x^{2n} - x \cdot Q(x) \\ &= x \cdot (x^{2n} - Q(x)). \end{aligned}$$ 1p (yht. 3p)

Tulon nollasäännön nojalla $P(x)$ on nolla, kun $x = 0$, joten polynomilla $P(x)$ on ainakin yksi nollakohta. 1p (yht. 4p) □

2. Polynomin $P(x)$ jälkimmäisessä termissä on $2n+1$ kappaletta muotoa $(x+k)$ olevia tekijöitä, joissa $k \in [-n, n]$. Kerrotaan polynomin $P(x)$ jälkimmäisen termin sulut auki.

$$(x-n)(x-n+1)\dots(x+n-1)(x+n)$$
$$= (x+(-n))(x+(-(n-1)))\dots(x+(n-1))(x+n)$$
$$= x^{2n+1} + (-n-(n-1)-\dots-1+1+\dots+(n-1)+n)x^{2n} + R(x)$$ 1p (yht. 5p)

Toisen termin kertoimessa ensimmäisen ja viimeisen termin summa on nolla, toisen ja toisiksi viimeisen termin summa on nolla, ja niin edelleen. Toisen termin kerroin on siis nolla.

$$= x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n} + R(x)$$
$$= x^{2n+1} + R(x)$$

missä $R(x)$ on asteen $2n-1$ polynomi. 1p (yht. 6p) Näin ollen $P(x)$ saa muodon

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2n+1} - (x-n)(x-n+1)\dots(x+n-1)(x+n) \\ &= x^{2n+1} - (x^{2n+1} + R(x)) \\ &= -R(x). \end{aligned}$$ 1p (yht. 7p)

Tiedetään, että polynomifunktiolla on korkeintaan sen asteluvun verran nollakohtia ja yllä oleva lasku osoittaa $P(x)$:n olevan astetta $2n-1$, joten polynomilla $P(x)$ on korkeintaan $2n-1$ nollakohtaa. 1p (yht. 8p) $\square$

3.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Polynomin $P(x)$ jälkimmäisessä termissä on $2n+1$ kappaletta muotoa $(x+k)$ olevia tekijöitä, joissa $k \in [-n, n]$. Yksi tekijöistä on x. Kutakin muuta tekijää $(x+k)$ vastaa toinen tekijä $(x-k)$. Muokataan polynomin $P(x)$ lauseketta hyödyntämällä kaavaa $(x+k)(x-k) = (x^2-k^2)$.

$$P(x) = x^{2n+1} - (x-n)(x-n+1)\dots(x+n-1)(x+n)$$
$$P(x) = x^{2n+1} - x(x^2-n^2)(x^2-(n-1)^2)\dots(x^2-1^2)$$ 1p (yht. 9p)

Otetaan x^{2n+1} yhteiseksi tekijäksi.

$$P(x) = x^{2n+1} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{(n-1)^2}{x^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Jos $x = n$, polynomin $P(x)$ arvoksi tulee

$$\begin{aligned} P(n) &= n^{2n+1} - (n-n)(n-n+1)\dots(n+n-1)(n+n) \\ &= n^{2n+1} - 0 \cdot 1 \dots (2n-1)(2n) \\ &= n^{2n+1} > 0. \end{aligned}$$

Jos $x > n$, kukin polynomin $P(x)$ lausekkeessa olevan tulon

$$\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{(n-1)^2}{x^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

tekijöistä on välillä $]0,1[$, ja näin ollen myös niiden tulo on välillä $]0,1[$. 1p (yht. 10p)
Tällöin siis polynomin $P(x)$ lausekkeessa oleva erotus

$$1 - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{(n-1)^2}{x^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

on suurempi kuin nolla. Myös $x^{2n+1} > 0$, kun $x > n$, 1p (yht. 11p) joten

$$P(x) = x^{2n+1} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{(n-1)^2}{x^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$P(x) > 0.$$

Näin ollen polynomilla $P(x)$ ei voi olla nollakohtia $x_0 > n$. 1p (yht. 12p) $\square$

Ratkaisuvaihtoehto 2

Polynomin $P(x)$ jälkimmäisessä termissä on $2n+1$ kappaletta muotoa $(x+k)$ olevia tekijöitä, joissa $k \in [-n, n]$. Yksi tekijöistä on x. Kutakin muuta tekijää $(x+k)$ vastaa toinen tekijä $(x-k)$. Muokataan polynomin $P(x)$ lauseketta hyödyntämällä kaavaa $(x+k)(x-k) = (x^2 - k^2)$.

$$P(x) = x^{2n+1} - (x-n)(x-n+1)\dots(x+n-1)(x+n)$$

$$P(x) = x^{2n+1} - x(x^2 - n^2)(x^2 - (n-1)^2)\dots(x^2 - 1^2)$$ 1p (yht. 9p)

Kun $x = n$, polynomin P arvo on

$$\begin{aligned} P(n) &= n^{2n+1} - n(n^2 - n^2)(n^2 - (n-1)^2)\dots(n^2 - 1^2) \\ &= n^{2n+1} - n \cdot 0 \cdot (n^2 - (n-1)^2)\dots(n^2 - 1^2) \\ &= n^{2n+1} > 0. \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten tilannetta $x > n$. Kirjoitetaan polynomin $P(x)$ ensimmäinen termi muodossa

$$x^{2n+1} = x \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^2,$$

missä on n kappaletta tekijöitä x^2.

$$\begin{aligned} P(x) = x \quad &\cdot x^2 \qquad\qquad \cdot x^2 \qquad\qquad \dots \quad \cdot x^2 \\ &- x(x^2 - n^2)(x^2 - (n-1)^2)\dots(x^2 - 1^2) \end{aligned}$$ 1p (yht. 10p)

Huomataan, että molemmissa termeissä on x. Tämän lisäksi jokaista positiivisen termin tekijää x^2 kohden negatiivisessa termissä on tekijä, joka on muotoa $x^2 - a^2$, missä $a \leq n$. Koska $x > n$, jokainen näistä muotoa $x^2 - a^2$ olevista tekijöistä on pienempi kuin x^2, 1p (yht. 11p) ja näin ollen positiivisen termin itseisarvo on siis suurempi kuin negatiivisen termin itseisarvo, kun $x > n$. Polynomilla $P(x)$ ei siis voi olla nollakohtaa, kun $x > n$. 1p (yht. 12p) $\square$